UNIVERZITA JANA EVANGELISTY PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM
PEDAGOGICKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATIKY – ODDĚLENÍ ELEMENTÁRNÍ MATEMATIKY

GEOMETRIE S DIDAKTIKOU

učební text pro studium
učitelství prvního stupně základní školy

Doc. PaedDr. Miroslav Bělík, CSc.

Ústí nad Labem
2005

Obsah :

Systematický rozvoj geometrických pojmů.

Axiomatická a deduktivní výstavba geometrie

(axiomy, definice, věty) :
Při vytváření geometrického pojmového systému (podobně jako i při vytváření pojmového systému jiné matematické teorie, např. Peanovy aritmetiky přirozených čísel) se vychází z tzv. základních neboli axiomatických pojmů, které se zavádějí vyslovením axiomů.

Axiomy dané teorie (tedy i geometrické axiomy) jsou výroky o pojmech této teorie (v našem případě proto výroky o geometrických pojmech), které přijímáme jako pravdivé a tedy je nedokazujeme.

Vhodným systémem axiomů jsou zavedeny tzv. **základní** čili **axiomatické pojmy** dané teorie - tyto pojmy se tedy nedefinují.

Příklady axiomatických pojmů v geometrii (*viz příloha: Axiomy eukleidovské geometrie*) :
axiomatické pojmy zavedené pomocí
- **axiomů incidence**: bod, přímka, rovina, bod leží na přímce, bod leží v rovině,
- **axiomů uspořádání**: vztah „mezi“ pro body,
- **axiomů shodnosti**: shodnost úseček.

Další pojmy dané teorie (tj.všechny pojmy dané teorie kromě axiomatických pojmů) jsou definovány, tj. jsou zaváděny **definicemi** - jsou to **definované pojmy**.
Uveďme hned příklady alespoň některých pojmů, které budeme v budovaném pojmovém systému později definovat :
úsečka, polopřímka, opačná polopřímka, polorovina, opačná polorovina, poloprostor, opačný poloprostor, konvexní úhel, nekonvexní úhel, trojúhelník, rovinný pás, čtyřstěn atd., binární relace „menší“ pro úsečky, kružnice, kruh, kulová plocha, koule, pravý úhel, binární relace rovnoběžnost, různoběžnost, mimoběžnost, kolmost přímek, , atd., atd.
Pravdivost definic není třeba dokazovat.

Definice se formuluje ve dvou částech, uvádí se:
definovaný pojem - *definiendum* (nově zaváděný pojem) a
definující část - *definiens* (vše, co je v této části uvedeno, to znamená vše, čeho se k definování nového pojmu využívá, musí být již předtím v daném pojmovém systému zavedeno: ať již třeba pomocí axiomů nebo pomocí předcházejících definic).

V axiomech jsou vysloveny některé „vlastnosti“ axiomatických pojmů
- např. v axiomech I1 – I7, U1 – U4

(*viz* Axiomy incidence a Axiomy uspořádání *v příloze* Axiomy eukleidovské geometrie)
nebo i „vlastnosti“ některých mezitím již definovaných pojmů:
- např. v axiomech S1 – S6 , A, C, R (*viz* Axiomy shodnosti, Axiomy spojitosti, Axiom rovnoběžnosti *v příloze* Axiomy eukleidovské geometrie).

Další „vlastnosti“ pojmů matematické teorie se vyslovují v **matematických větách** (*namísto* matematická věta *se stručně říká* věta, poučka, teorém).
Věty se dokazují pomocí matematické logiky na základě axiomů, definic a vět dříve dokázaných.
Další poznatky - tj. nové pojmy a jejich vlastnosti - v naší budované teorii **odvozujeme** neboli **dedukujeme** (*latinsky* deduco *znamená* odvádím *nebo*

odvozuji) z axiomů, definic a vět dříve dokázaných. Proto hovoříme o deduktivní výstavbě naší teorie –
tedy v našem případě o **deduktivní výstavbě geometrie**.

Shrnutí: při systematickém rozvíjení geometrických pojmů jde tedy o **deduktivní výstavbu axiomatického systému geometrie**.

Vyu•ování geometrii na prvním stupni základní školy.

Ve škole, zvláště na škole prvního stupně, není z psychologických důvodů tj. zejména vzhledem k věkovým zvláštnostem žáků vhodné ani možné pěstovat geometrii ani axiomaticky ani přísně deduktivně. Učitel rozvíjí geometrické učivo **intuitivně**, tj.vychází z představ a zkušeností žáků a tyto zkušenosti rozšiřuje a obohacuje. Pomocí názorných pomůcek a manipulací s nimi, modelováním v prostoru i v rovině, kreslením a rýsováním jsou žáci vedeni k tomu, že si vytvářejí vhodné **geometrické představy**. Pod učitelovým vedením si žáci tyto představy na základě své vlastní tvůrčí činnosti postupně dále obohacují, zpřesňují a zobecňují, zejména zkoumáním vlastností a souvislostí postupně vytvářených pojmů.

V odborně didaktické přípravě učitelů je však základním požadavkem, aby se studenti neomezovali pouze na útržkovité představy a znalosti některých pojmů, ale aby soustavným studiem (studiem tvůrčího typu, založeném na uvažování, nikoliv jen na pamětném memorování nebo bezduchém napodobování) pronikali do geometrického pojmového systému a naučili se jej správně užívat a podle potřeby správně a tvořivě transformovat do své didaktické činnosti.

Pohled do právě uvedeného vytváření geometrického pojmového systému je třeba dokumentovat na konkrétních případech zavádění pojmů a zkoumání jejich vlastností:

Množinové pojetí geometrie – geometrické útvary jako množiny bodů

Připomeňme, že geometrické pojmy si výhodně představujeme jako množiny bodů.
Tyto **množiny bodů** nazýváme obvykle **geometrické útvary** (nebo zkráceně jen **útvary**).

Kterákoliv množina bodů se nazývá **geometrický útvar**

Připomeňme, že podle této definice je geometrickým útvarem i prázdná množina nebo množina, která má pouze jeden prvek.
Jestliže geometrické útvary chápeme jako množiny bodů, pak jsou v geometrii s výhodou využívány pojmy a termíny z teorie množin a tedy i z matematické logiky. Jde o tzv. **množinové pojetí geometrie**. Uvědomme si, že množinové pojetí je mocným nástrojem při zkoumání geometrických pojmů, zejména proto, že dovoluje využít

- různé **relace mezi množinami**, především např. ***množinovou inkluzi*** (tj. vztah *„být podmnožinou“*), ***rovnost množin*** a
- všechny **operace s množinami**, jako např. ***průnik, sjednocení, rozdíl dvou množin, doplněk množiny*** .

Víme, jakou roli hraje v teorii množin tzv. ***základní množina*** (neboli ***univerzální množina***).

V množinovém pojetí geometrie používáme často jako základní množinu :

- **trojrozměrný eukleidovský prostor** - stručné označení: $\mathbf{E_3}$
- **dvojrozměrný eukleidovský prostor** - stručné označení: $\mathbf{E_2}$
  (dvojrozměrným prostorem může být kterákoliv rovina)
- **jednorozměrný eukleidovský prostor** - stručné označení: $\mathbf{E_1}$
  (jednorozměrným prostorem může být kterákoliv přímka).

Dva typy úloh o geometrických útvarech:

1. zakreslete nebo vymodelujte útvar, který je oborem pravdivosti dané výrokové formy – tvořte a řešte vlastní úlohy tohoto typu,

2. zapište daný útvar jako obor pravdivosti výrokové formy, tzn. určete výrokovou formu, jejímž oborem pravdivosti je daný útvar – tímto způsobem zapište např. definici daného útvaru.

Uveďme příklady takových úloh :

Úloha 1. typu :

Jsou dány body A,B. Zakreslete $\{X \in E_3 : X \mu A,B\}$.
Slovy : Zakreslete množinu všech bodů X trojrozměrného eukleidovského prostoru, pro které platí, že bod X je mezi body A, B .
Řešení:
Zvolíme dva různé body a označíme je A, B .
Vyznačíme množinu všech bodů, které leží mezi body A,B .

A  B

Je zřejmé, že se jedná o množinu všech bodů úsečky AB kromě jejích krajních bodů A,B .

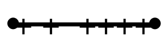
Problémy **definování geometrických pojmů**:
metody vytváření definic geometrických pojmů uveďme na příkladech. Zabývejme se např. stanovením definic některých geometrických pojmů, které jsou většinou podle představ známé: **úsečka, polopřímka, polorovina, poloprostor, konvexní úhel, trojúhelník** a dalších.
Chceme-li definovat např. pojem úsečky, vyjdeme z běžné představy úsečky jako určité množiny bodů.

Úloha 2. typu :

Zapište úsečku jako obor pravdivosti vhodné výrokové formy.
Řešení:
Z řešení předcházející úlohy je zřejmé, že úsečce AB náleží všechny body, které leží mezi body A, B . Kromě nich patří úsečce AB body A, B (její tzv.krajní body) a pak už žádné jiné.
Úsečka AB je tedy sjednocením dvou množin: množiny všech bodů, které leží mezi body A, B a dvouprvkové množiny {A,B} . Zapišme toto zjištění pomocí zavedených symbolů :

$$AB = \{X \in E_3 : X \mu A,B\} \cup \{A,B\}$$

nebo takto $AB = \{X \in E_3 : X \mu A,B \vee X=A \vee X=B\}$.

A  B

Podařilo se nám vyjádřit **definici pojmu úsečka** :

$$\boxed{AB = \{X \in E_3 : X\ \mu A,B\} \cup \{A,B\}}$$

Slovy : Úsečka AB je sjednocení dvou množin: množiny všech bodů X , pro které platí, že bod X je mezi body A, B a množiny, která obsahuje body A, B .

Lze ji vyjádřit také takto:

$$\boxed{AB = \{X \in E_3 : X\ \mu A,B \vee X=A \vee X=B\}}$$

Vyšetřete a zakreslete množinu $\{X \in E_3 : X\ \mu A,B \vee X=A \vee X=B\}$ v případě, že $A = B$, tj. když body A, B splynou.

Řešení: Snadno zjistíme dosazením různých bodů za proměnnou X do výrokové formy $X\ \mu A,B \vee X=A \vee X=B$, že ji splňuje pouze jeden bod a to samotný bod A (může být též označen B).

Uzavřeme dohodu, že i v tomto případě budeme tuto množinu (tj. množinu, která obsahuje právě jeden bod) uznávat jako úsečku a budeme ji nazývat **nulová úsečka .** Proto:

Jestliže $A=B$, pak úsečka $AB = \{A\}$ a nazývá se **nulová úsečka** .

Využijme a obohaťme zkušenosti z úsilí formulovat definici úsečky a utvořme definici polopřímky.

Řešte úlohu:

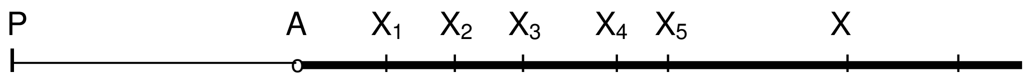
Jsou dány body A, B tak, že $A \neq B$. Zjistěte $\{X \in E_3 : B\ \mu A,X\}$.

Řešení :

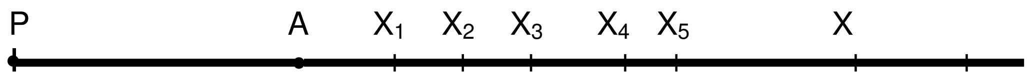
Zvolte body A, B . Zkusmo hledejte body, které splňují výrokovou formu $B\ \mu A,X$ (tj. dosazujte různé body do výrokové formy za proměnnou X a zjišťujte, pro které z nich se výroková forma $B\ \mu A,X$ stává pravdivým výrokem).

Zjistíte, že takové body (např. X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 , ... atd.) vyplňují část přímky AB .

Tuto část přímky AB vyznačte silně :



Když k této části „přidáme“ úsečku PA, vznikne polopřímka PA :



Zaveďme pro ni symbol $\rightarrow PA$.

Symbol $\rightarrow PA$ čteme: „polopřímka PA“ .

Definice polopřímky tedy zní :

Jsou dány body P, A tak, že $P \neq A$.
$\rightarrow PA = \{X \in E_3 : A\ \mu P,X\} \cup PA$

Čtení symbolického zápisu : polopřímka PA je sjednocení dvou množin: množiny všech bodů X trojrozměrného prostoru, pro které platí, že bod A je mezi body P, X a úsečky PA .

Další úloha 1. typu :

Jsou dány body A,B,C, které neleží v přímce (tzv. nekolineární body).

Zakreslete množinu $\{X \in E_2 : AX \cap BC \neq \varnothing\}$.

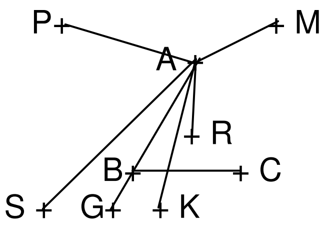
Čtení symbolického zápisu : množina všech bodů X dvojrozměrného prostoru, pro které platí, že průnik úsečky AX a úsečky BC se nerovná prázdné množině

Návod k řešení:

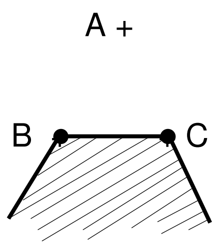
Zvolíme body A,B,C, které neleží v přímce.

Volíme další body v rovině, dosazujme je postupně za proměnnou X do výrokové formy $AX \cap BC \neq \emptyset$ a zjišťujme, pro které z nich se tato výroková forma stává pravdivým výrokem. Takové body jsou prvky množiny $\{X \in E_2 \colon AX \cap BC \neq \emptyset\}$.

Obr.1



Obr.2



Na obr.1 body G, K, B, C patří množině $\{X \in E_2 \colon AX \cap BC \neq \emptyset\}$, protože průniky úseček AG, AK, AB, AC s úsečkou BC se vesměs nerovnají prázdné množině (protínají ji), zatímco body P, M, R, S množině $\{X \in E_2 \colon AX \cap BC \neq \emptyset\}$ nepatří, neboť průniky úseček AP, AM, AR, AS s úsečkou BC jsou prázdné (neprotínají ji). Lze najít mnoho dalších bodů, které dané množině patří.

Na obr.2 na základě náležitého zobecnění vyznačíme množinu $\{X \in E_2 \colon AX \cap BC \neq \emptyset\}$ tím, že ji zakreslíme **„šrafováním“**.

Hranice útvaru je v tomto případě podmnožinou útvaru, proto ji zakreslíme **„silnou plnou čarou“.**

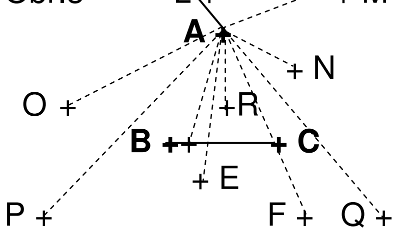
Skutečnost, že hraniční body B, C v tomto případě útvaru patří, zdůrazníme tím, že je zakreslíme jako **„plné kroužky“** .

Uveďme další úlohy 1. typu:

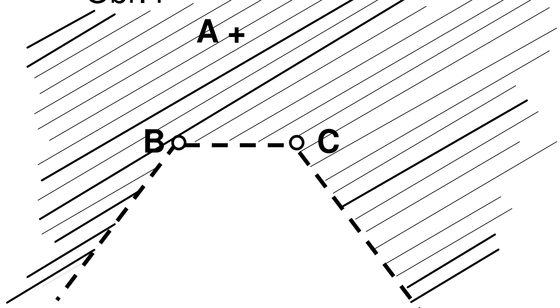
Jsou dány nekolineární body A,B,C. Zakreslete $\{ X \in E_2 \colon AX \cap BC = \emptyset \}$.

Řešení :

Obr.3



Obr.4



Volte různé body prostoru E_2 a zjišťujte, které z nich patří do oboru pravdivosti výrokové formy $AX \cap BC = \emptyset$. Na Obr.3 byly např. voleny body L, O, M, N, R, P, E, F, Q.

Z nich splňují výrokovou formu $AX \cap BC = \emptyset$ body L, O, M, N, R, P, Q, protože úsečky AL, AO, AM, AN, AR, AP, AQ neprotínají úsečku BC a to znamená, že jejich průnik s úsečkou BC je prázdná množina.

Na obr.3 však nesplňují výrokovou formu $AX \cap BC = \emptyset$ body E, F, B, C a to proto, že každá z úseček AE, AF, AB, AC má s úsečkou BC jeden společný bod.

Lze najít mnoho dalších bodů, které dané množině patří.

Na obr.4 na základě náležitého zobecnění vyznačíme množinu $\{X \in E_2 : AX \cap BC = \emptyset\}$ tím, že ji zakreslíme **„šrafováním“**.
Protože **hranice útvaru v tomto případě není podmnožinou útvaru, zakreslíme ji „čárkovanou čarou“.**
Protože **hraniční body B, C útvaru nepatří**, **vyznačíme je jako „prázdné kroužky“.**

Na základě řešení úloh 1. a 2. typu formulujte definice geometrických útvarů :
úsečka, polopřímka, opačná polopřímka, polorovina, opačná polorovina, poloprostor, opačný poloprostor, konvexní úhel, nekonvexní úhel, trojúhelník, čtyřstěn.
a podle toho formulujte jejich definice.

Úsečka

symbol KL čteme: „úsečka KL“
Nakreslete úsečku s krajními body K, L . Vyznačte alespoň několik dalších bodů úsečky KL .
Zjistěte, v jakém vztahu jsou tyto body vzhledem k bodům K, L (vezměte v úvahu axiomy uspořádání).
Zformulujte odpověď na otázku: *co je úsečka KL ?*
Definice úsečky:

$$\boxed{KL = \{X \in E_3 : X \ \mu \ K,L\} \cup \{K,L\}}$$

Definici pojmu úsečka čteme takto: *Úsečka* KL *je sjednocení množiny všech bodů* X *prostoru, které leží mezi body* K, L *a dvouprvkové množiny s body* K, L *.*

nebo $KL = \{X \in E_3 : X \ \mu \ K,L \vee X=K \vee X=L\}$.

Je zřejmé, že toto tvrzení je ekvivalentní s definicí úsečky uvedené v rámečku. Je tomu tak podle definice sjednocení množin.

Nulová úsečka

KL se nazývá <u>nulová úsečka</u> $\Leftrightarrow$ K=L
nebo KL se nazývá <u>nulová úsečka</u> $\Leftrightarrow$ KL = {K}

Polopřímka

symbol $\rightarrow PA$ čteme: „polopřímka PA“ . Bod P se nazývá počátek polopřímky PA .
Narýsujte polopřímku s počátkem P a bodem A (tak, jak ji znáte ze základní nebo střední školy). Zakreslete několik jejích dalších bodů.
Pokuste se najít a zapsat odpověď na otázku: *co je polopřímka PA* ?
Odpovědí na tuto otázku je definice polopřímky.

Definice polopřímky:

Jsou dány body P, A tak, že $P \neq A$.
$\rightarrow PA = \{X \in E_3 : A \ \mu \ P,X\} \cup PA$

Zjistěte, zda uvedená definice polopřímky odpovídá vaší představě polopřímky.
Ověřte, že pro každé dva navzájem různé body P, A platí, že

$$\rightarrow PA = \{X \in E_3 : A \ \mu \ P,X \vee X \in PA\}$$

a také platí, že $\rightarrow PA = \{X \in E_3 : A \ \mu \ P,X \vee X \ \mu \ P,A\} \cup \{P,A\}$.

Opačná polopřímka

symbol $\leftarrow PA$ čteme: „opačná polopřímka k polopřímce PA“.
Uvědomte si, co je opačná polopřímka. Zakreslete dva navzájem různé body P, A .
Zakreslete opačnou polopřímku k polopřímce PA . Vyznačte několik bodů této

opačné polopřímky. Ukažte si i několik bodů roviny (prostoru E_2), které zmíněné opačné polopřímce nepatří.
Položte si otázku: *co je polopřímka opačná k polopřímce PA* ?
Odpovědí na tuto otázku je definice opačné polopřímky.

Definice opačné polopřímky: Jsou dány body P, A tak, že $P \neq A$.
$\leftarrow PA = \{X \in E_3 : P\ \mu\ A, X \vee X = P\}$

Ověřte, že pro každé dva navzájem různé body P, A také platí, že

$$\leftarrow PA = \{X \in E_3 : P\ \mu\ A, X\} \cup \{P\}$$

Zjistěte, zda uvedená definice opačné polopřímky odpovídá vaší představě .

Polorovina

symbol $\rightarrow pA$ čteme: „polorovina pA“. Je to polorovina určená přímkou p a bodem A . Zakreslete přímku p a mimo ni bod A. Podle svých představ pak dále šrafováním zakreslete polorovinu určenou přímkou p a bodem A . Spojujte úsečkami bod A s různými body prostoru E_2 a zjišťujte, v kterých případech tyto úsečky přímku p protínají a v kterých případech ji neprotínají (tj. mají s ní prázdný průnik). Uvažujte a zjišťujte, které body roviny (tj. body prostoru E_2) polorovině $\rightarrow pA$ patří a které jí nepatří. Patří polorovině $\rightarrow pA$ i body přímky p ? Podle toho se snažte zformulovat definici poloroviny.

Definice poloroviny : Je dána přímka p a bod A tak, že $A \notin p$.
$\rightarrow pA = \{X \in E_2 : AX \cap p = \emptyset\} \cup p$

I v tomto případě ověřte, zda uvedená definice poloroviny odpovídá vaší představě, tj. útvaru, který jste zakreslili šrafováním. V negativním případě si svou chybnou představu opravte.

Ověřte, že pro každou přímku p a bod A, který jí nenáleží také platí, že

$$\rightarrow pA = \{X \in E_2 : AX \cap p = \emptyset \vee X \in p\}$$

nebo $$\rightarrow pA = \{X \in E_3 : AX \cap p = \emptyset \wedge X \in \leftrightarrow pA\} \cup p$$

(*symbol* $\leftrightarrow pA$ *v předcházejícím zápise čteme*:„rovina pA“ - *viz dále*)

Opačná polorovina

symbol $\leftarrow pA$ čteme: „opačná polorovina k polorovině pA“

Definice opačné poloroviny: Je dána přímka p a bod A tak, že $A \notin p$.
$\leftarrow pA = \{X \in E_3 : AX \cap p \neq \emptyset\}$

Poloprostor

symbol $\rightarrow \sigma A$ čteme: „poloprostor σA“, (poloprostor „sigma A“), je to poloprostor určený rovinou σ a bodem A .

Definice poloprostoru: Je dána rovina σ a bod A tak, že $A \notin \sigma$.
$\rightarrow \sigma A = \{X \in E_3 : AX \cap \sigma = \emptyset\} \cup \sigma$

nebo $$\rightarrow \sigma A = \{X \in E_3 : AX \cap \sigma = \emptyset \vee X \in \sigma\}$$

Opačný poloprostor

symbol $\leftarrow \sigma A$ čteme: „opačný poloprostor k poloprostoru σA“

Definice opačného poloprostoru: Je dána rovina σ a bod A tak, že $A \notin \sigma$.
$\leftarrow \sigma A = \{X \in E_3 : AX \cap \rho \neq \emptyset\}$

Přímka

symbol $\leftrightarrow AB$ čteme: „přímka AB“
přímky zapisujeme též malými písmeny latinské abecedy
přímka je axiomatický pojem (nedefinuje se, zavádí se pomocí axiomů, tj. axiomaticky).

Rovina

symbol $\leftrightarrow ABC$ čteme „rovina ABC“ nebo „rovina určená body A,B,C“
$\leftrightarrow pK$ čteme „rovina pK“ nebo „rovina určená přímkou p a bodem K“
roviny zapisujeme též malými písmeny řecké abecedy ρ (ró), σ (sigma), ν (ný)),…
rovina je axiomatický pojem (nedefinuje se, zavádí se pomocí axiomů - axiomaticky).

Konvexní úhel

Zakreslete konvexní úhel AVB . Ověřte na obrázku, že konvexní úhel AVB je průnikem dvou polorovin a zjistěte, které poloroviny to jsou. Výsledek: jsou to $\rightarrow AVB$ a $\rightarrow BVA$. Polorovina $\rightarrow AVB$ je určena přímkou $\leftrightarrow AV$ a bodem B, polorovina $\rightarrow BVA$ je určena přímkou $\leftrightarrow BV$ a bodem A .

Definice konvexního úhlu tedy zní: Konvexní úhel AVB = $\rightarrow AVB \cap \rightarrow BVA$.

Nekonvexní úhel

Zakreslete (šrafováním) opačnou polorovinu k polorovině AVB a opačnou polorovinu k polorovině BVA. Zjistětete, co je sjednocením těchto dvou opačných polorovin.
Zajisté poznáte, že je to **nekonvexní úhel AVB** . Proto vám bude pochopitelná jeho definice:

Definice nekonvexního úhlu: Nekonvexní úhel AVB = $\leftarrow AVB \cup \leftarrow BVA$.

Trojúhelník

Zvolte nekolineární body A, B, C . Zakreslete (šrafováním) poloroviny $\rightarrow ABC$, $\rightarrow BCA$, $\rightarrow CAB$. Zjistěte, co je průnikem uvedených tří polorovin.
Snadno poznáte, že jejich průnikem je trojúhelník ABC.
„Trojúhelník ABC“ zapisujeme symbolem Δ ABC .

Definice trojúhelníka : $\Delta ABC = \rightarrow ABC \cap \rightarrow BCA \cap \rightarrow CAB$.

Čtyřstěn

Definice čtyřstěnu: Čtyřstěn ABCD = $\rightarrow ABCD \cap \rightarrow BCDA \cap \rightarrow CDAB \cap \rightarrow ABDC$.

Čtyřstěn ABCD je průnikem uvedených čtyř poloprostorů.
Snažte se tuto situaci si představit, popřípadě znázornit „modelováním“ vyznačených poloprostorů.

Rovinný pás

Definice rovinného pásu:
Jsou dány přímky a, b tak, že $a \| b \wedge a \neq b$,
dále jsou dány body A, B tak, že $A \in a \wedge B \in b$.
Rovinný pás určený přímkami a,b je $\rightarrow aB \cap \rightarrow bA$.

Příklady dalších úloh, které je možno generovat z výše uvedených úloh :

Jsou dány nekolineární body K,L,M (body, které neleží v přímce). Zakreslete

a) $\{X \in E_2: KX \cap \rightarrow LM = \emptyset\}$, $\{X \in E_2: KX \cap \rightarrow LM \neq \emptyset\}$,
b) $\{X \in E_2: KX \cap \leftarrow LM = \emptyset\}$, $\{X \in E_2: KX \cap \leftarrow LM \neq \emptyset\}$,
c) $\{X \in E_2: KX \cap \leftrightarrow LM = \emptyset\}$, $\{X \in E_2: KX \cap \leftrightarrow LM \neq \emptyset\}$,
d) $\{X \in E_2: \rightarrow KX \cap LM = \emptyset\}$, $\{X \in E_2: \rightarrow KX \cap LM \neq \emptyset\}$,
e) $\{X \in E_2: \leftarrow KX \cap LM = \emptyset\}$, $\{X \in E_2: \leftarrow KX \cap LM \neq \emptyset\}$,
f) $\{X \in E_2: \leftrightarrow KX \cap LM = \emptyset\}$, $\{X \in E_2: \leftrightarrow KX \cap LM \neq \emptyset\}$ atd.

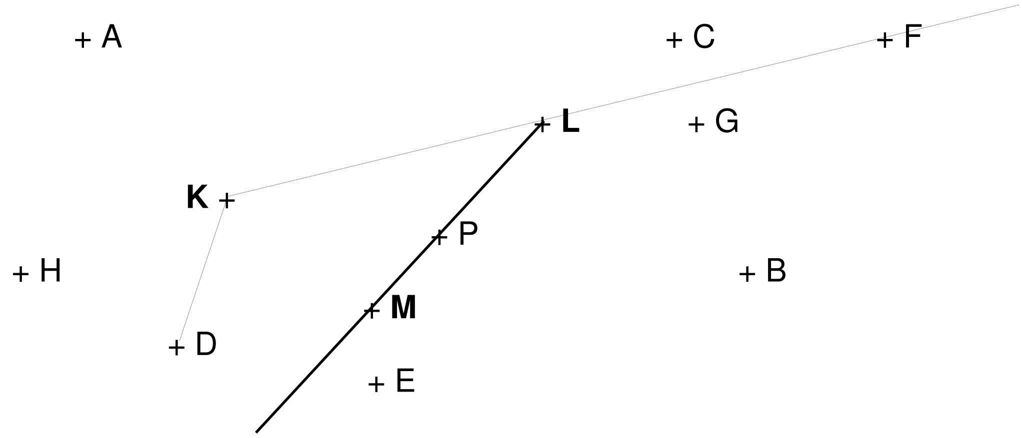
Je zřejmé, že z úlohy „Zakreslete $\{X \in E_2: KX \cap LM = \emptyset\}$“ získáme další úlohy tím, že v zadání

- nahradíme úsečku LM postupně těmito útvary: $\rightarrow LM$, $\leftarrow LM$, $\leftrightarrow LM$, $\rightarrow ML$, $\leftarrow ML$
- nahradíme úsečku KX postupně těmito útvary: $\rightarrow KX$, $\leftarrow KX$, $\leftrightarrow KX$, $\rightarrow XK$, $\leftarrow XK$
- symbol = nahradíme symbolem $\neq$

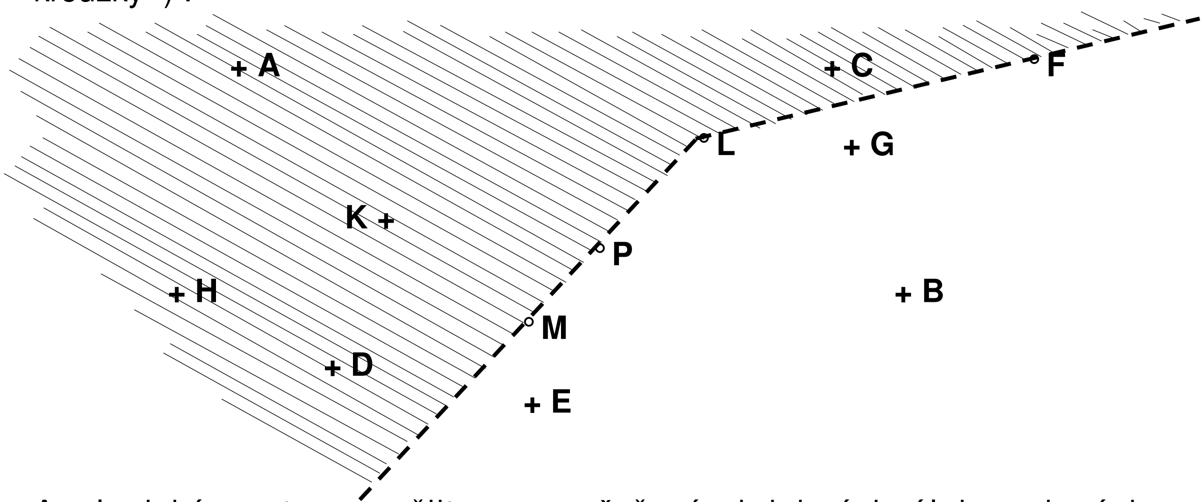
a všechny tyto změny budeme vzájemně kombinovat.
(Tím získáme 72 různých úloh.)
Alespoň některé z uvedených úloh si vyřešme.

ÚLOHA:
Jsou dány nekolineární body K, L, M . Zakreslete $\{X \in E_2: KX \cap \to LM = \emptyset\}$.

Řešení:
Vyzkoušejme alespoň některé body roviny, zda do uvedené množiny patří nebo ne.
Jak je v textu úlohy uvedeno, měl by být průnik úsečky KX s polopřímkou →LM prázdný, jinými slovy : „úsečka KX nemá mít s uvedenou polopřímkou žádný společný bod“. Pouze takové body, které toto splňují, patří do hledané množiny.
Ověřte, které z bodů A, B, C, D, E, F, G, H, L, M, P na následujícím obrázku do hledané množiny $\{X \in E_2: KX \cap \to LM = \emptyset\}$ patří a které do ní nepatří:



To znamená: zakreslete nebo si alespoň ukažte úsečky KA, KB, KC, KD, KE, KF, KG, KH, KL, KM a vyberte z nich ty, které neprotínají →LM (tj. ty, jejichž průnik s →LM se rovná prázdné množině).
Volte další body roviny, pokračujte s nimi v předcházející činnosti a opět určete všechny ty z nich, které zadané množině $\{X \in E_2: KX \cap \to LM = \emptyset\}$ patří.
Zobecněním těchto výsledků i pro další body roviny (prostoru E_2) získáte řešení úlohy, které zakreslíte běžnými způsoby grafické komunikace („šrafováním, použitím plných nebo čárkovaných čar, zakreslením bodů plnými nebo prázdnými kroužky“) :



Analogický postup použijte pro vyřešení obdobných úloh zadaných na předcházející stránce.

Uvažte, které z množin uvedených v úlohách a) – f) zadaných na předcházející stránce souvisejí s pojmem: polorovina, opačná polorovina, konvexní úhel, nekonvexní úhel.

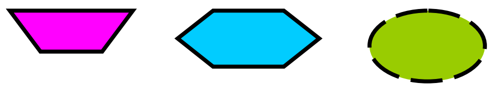
Konvexnost a nekonvexnost geometrických útvarů

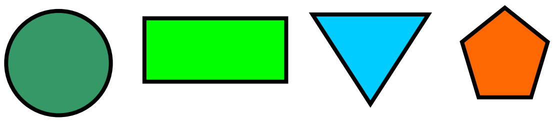
Definice konvexnosti geometrických útvarů:

$$\text{Útvar } U \text{ je konvexní} \Leftrightarrow (\forall X,Y)\ X \in U \wedge Y \in U \Rightarrow XY \subset U$$

Slovy :
Útvar U je konvexní, právě když pro každé dva body X , Y platí: jestliže bod X je prvkem útvaru U a bod Y je prvkem útvaru U, pak úsečka XY je podmnožinou útvaru U .

Příklady **konvexních** útvarů v rovině:





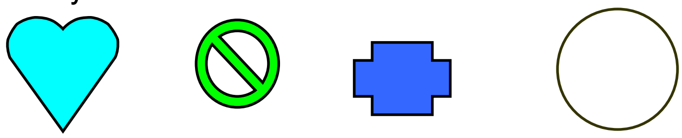
čtverec, konvexní úhel, trojúhelník, kruh, polorovina, rovinný pás atd.,

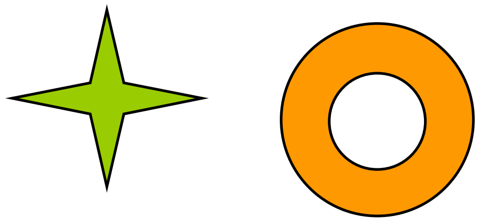
Příklady **konvexních** útvarů v prostoru: kvádr, koule, čtyřstěn, válec, kužel atd.
Z definice konvexního útvaru zároveň vyplývá:

Útvar U není konvexní $\Leftrightarrow (\exists X,Y)\ X \in U \wedge Y \in U \wedge XY \not\subset U$

Slovy:
Útvar U není konvexní, právě když existují aspoň dva body X , Y , pro které platí: bod X je prvkem útvaru U a bod Y je prvkem útvaru U, ale úsečka XY není podmnožinou útvaru U .

Příklady **nekonvexních** útvarů v rovině:





kružnice, nekonvexní čtyřúhelník, mezikruží, nekonvexní mnohoúhelník atd.

Příklady **nekonvexních** útvarů v prostoru:

kulová plocha, množina n bodů (n je přirozené číslo větší než jedna) atd.

Věta o průniku konvexních útvarů:

Průnik každých dvou konvexních útvarů je konvexní útvar .

Důkaz :
Vycházíme z předpokladu, že každý ze dvou daných útvarů U , V je konvexní. Zjišťujeme, zda průnik těchto útvarů je konvexní. Sledujme proto libovolné dva body X , Y tohoto průniku. Protože útvar U je konvexní, je (podle definice konvexnosti) úsečka XY jeho podmnožinou. Protože útvar V je konvexní, je úsečka XY také jeho podmnožinou. Úsečka XY je tedy podmnožinou průniku $U \cap V$ útvarů U , V a tedy podle definice konvexnosti útvaru, je i průnik $U \cap V$ konvexní útvar.

Tato věta je velmi účinná: podle ní například zjišťujeme, že konvexní úhel (to je průnik dvou polorovin, tedy konvexních útvarů) je konvexní útvar (odtud má tento úhel své jméno). Také např. každý trojúhelník jako průnik konvexního úhlu a

poloroviny je konvexní útvar. Rovněž každý průnik dvou trojúhelníků (ať je tímto průnikem prázdná množina bodů, jednobodová množina, úsečka, trojúhelník, čtyřúhelník, pětiúhelník nebo šestiúhelník), je konvexní útvar.
Tedy platí : průnikem kterýchkoliv dvou konvexních útvarů je konvexní útvar.

ÚLOHA: Zjistěte, zda analogické tvrzení platí i o sjednocení dvou konvexních útvarů.

Řešení : Na vhodném příkladu lze dokázat, že existují dva konvexní útvary, jejichž sjednocením je útvar, který není konvexní. Narýsujte takové dva útvary.

Tvrzení obdobné větě o průniku konvexních útvarů tedy pro sjednocení dvou konvexních útvarů neplatí.

Shodnost v geometrii

Shodnost úseček

Pojem **shodnost úseček** je zaveden pomocí axiomů shodnosti (v přehledu axiomů jsou uvedeny jako S1 až S6) .

Shodnost úseček je relace typu ekvivalence.

Z axiomů S1 až S3 totiž vyplývá, že shodnost úseček je relace

reflexivní (každá úsečka je shodná sama se sebou),

symetrická (je-li jedna úsečka shodná s druhou, je i druhá z nich shodná s první) a

tranzitivní (je-li jedna úsečka shodná s druhou a tato druhá úsečka shodná s třetí, pak je i první z nich shodná s třetí).

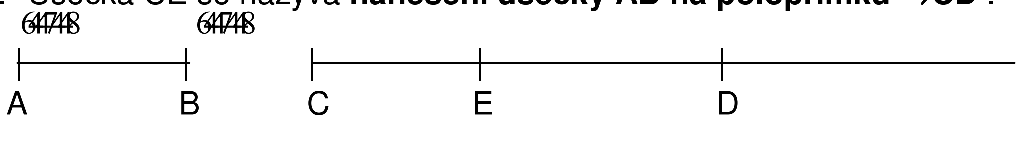
Protože tedy **shodnost úseček** je relace typu ekvivalence, **indukuje rozklad množiny všech úseček na třídy navzájem shodných úseček**.

Pojmy definované pomocí shodnosti úseček:

Nanesení (přenesení) úsečky na polopřímku

Tento pojem nejprve popíšeme pomocí algoritmu:

1. Nechť je dána úsečka AB a polopřímka →CD.
2. Na polopřímce →CD najděte bod E tak, aby platilo, že CE ≅ AB .
   (Podle axiomu S2 takový bod v každém případě existuje.)
   (Technická poznámka: *při rýsování uvedený bod najdete způsobem, který znáte ze školy, např. pomocí proužku papíru nebo použitím kružítka, to však z teoretického hlediska není podstatné* .)
3. Úsečka CE se nazývá **nanesení úsečky AB na polopřímku →CD** .



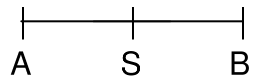
Náš pojem jsme uvedli vyslovením algoritmu (je možno hovořit o „algoritmické definici“ pojmu).

Definujme uvedený pojem bez použití algoritmu.

Definice pojmu nanesení úsečky na polopřímku:

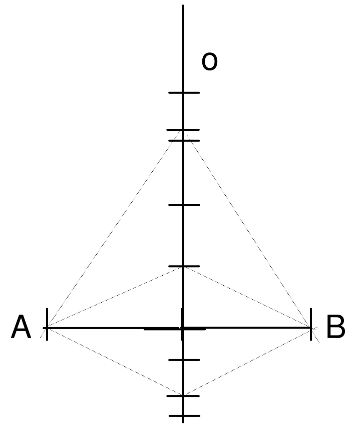
> Úsečka CE se nazývá **nanesení úsečky AB na polopřímku →CD**, právě když bod E leží na polopřímce →CD a úsečka CE je shodná s úsečkou AB (tj. když $E \in \rightarrow CD \;\wedge\; CE \cong A$).

Střed úsečky



> Bod S se nazývá **střed úsečky AB**, právě když $S \in AB \wedge AS \cong BS$.

Osa úsečky



> Předpokládejme, že $A \neq B$.
> **Osa úsečky AB** je $\{X \in E_2 : XA \cong XB\}$.

Osa úsečky AB je množina všech bodů X prostoru E_2, pro které platí, že úsečka XA je shodná s úsečkou XB .

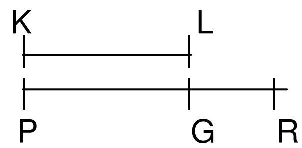
Rovina souměrnosti úsečky

> **Rovina souměrnosti (nenulové) úsečky AB** je $\{X \in E_3 : XA \cong XB\}$.

Rovina souměrnosti (nenulové) úsečky AB je množina všech bodů X prostoru E_3, pro které platí, že úsečka XA je shodná s úsečkou XB .

Porovnávání úseček (binární relace <, > pro úsečky)

Symbolický zápis $KL < PR$ čtěte: úsečka KL je menší než úsečka PR



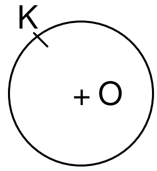
Definice :

> **KL < PR** , právě když existuje takový bod G, že úsečka KL je shodná s úsečkou PG a bod G leží mezi body P, R ,
> (tj. když $(\exists G)\ KL \cong PG \wedge G \mu P,R$.

$PR > KL$ (čtěte: úsečka PR je větší než úsečka KL)

Binární relaci > lze definovat jako inverzní relaci k relaci <, tedy takto :

> **PR > KL**, právě když $KL < PR$.



ÚLOHA: Jsou dány dva navzájem různé body O, K.
Zakreslete $\{X \in E_2 \colon OX \cong OK\}$.

Řešení : Je zřejmé, že hledanou množinou bodů je kružnice se středem O a poloměrem OK.

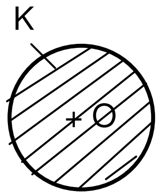
Kružnice

Definice :

> Nechť jsou dány body S,A tak, že S≠A.
> **Kružnice se středem S a poloměrem SA** je $\{X \in E_2 \colon SX \cong SA\}$.

Slovy : Kružnice se středem S a poloměrem SA je množina všech bodů X prostoru E_2 , pro které platí, že úsečka SX je shodná s úsečkou SA (za předpokladu, že bod A nesplyne s bodem S).

ÚLOHA : Jsou dány dva navzájem různé body O, K.
Zakreslete $\{X \in E_2 \colon OX \cong OK \vee OX < OK\}$.



Řešení : Je zřejmé, že hledanou množinou bodů je kruh se středem O a poloměrem OK.

Kruh

> Nechť je dán bod S a bod A tak, že S≠A.
> **Kruh se středem S a poloměrem SA** je $\{X \in E_2 \colon SX \cong SA \vee SX < SA\}$.

Slovy : Kruh se středem S a poloměrem SA je množina všech bodů X prostoru E_2, pro které platí, že úsečka SX je shodná s úsečkou SA nebo úsečka SX je menší než úsečka SA .

Kulová plocha

> Nechť jsou dány body S a A tak, že S≠A.
> **Kulová plocha se středem S a poloměrem SA** je $\{X \in E_3 \colon SX \cong SA\}$.

Slovy: Kulová plocha se středem S a poloměrem SA je množina všech bodů X prostoru E_3, pro které platí, že úsečka SX je shodná s úsečkou SA .

Koule

> Nechť jsou dány body S a A tak, že S≠A.
> **Koule se středem S a poloměrem SA** je $\{X \in E_3 \colon SX \cong SA \vee SX < SA\}$.

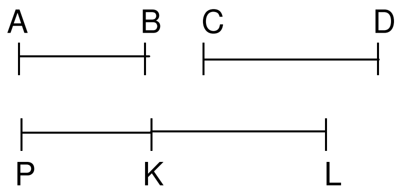
Slovy : Koule se středem S a poloměrem SA je množina všech bodů X prostoru E_2, pro které platí, že úsečka SX je shodná s úsečkou SA nebo úsečka SX je menší než úsečka SA .

Grafický součet úseček, grafický rozdíl úseček

Pojem grafického součtu dvou úseček zaveďme pomocí algoritmu:

1. Nechť jsou dány úsečky AB , CD .
2. Zvolte polopřímku $\rightarrow PQ$.
3. Naneste úsečku AB na polopřímku $\rightarrow PQ$.
   Úsečku, která je nanesením úsečky AB na polopřímku $\rightarrow PQ$, označte PK .
4. Naneste úsečku CD na polopřímku $\leftarrow KP$ (tj. na polopřímku opačnou k polopřímce $\rightarrow KP$).
   Úsečku, která je nanesením úsečky CD na polopřímku $\leftarrow KP$, označte KL .
5. **Úsečka PL je grafický součet úseček AB a CD** .
   Symbolický zápis: **PL = AB + CD** .

Definujme pojem grafického součtu dvou úseček bez použití algoritmu:



Definice pojmu **grafický součet úseček**:

> **Úsečka PL je grafický součet úseček AB a CD** (**PL = AB + CD**),
> právě když $(\exists K)\ K \in PL \ \wedge\ PK \cong AB \ \wedge\ KL \cong CD$
> (tj. když existuje takový bod K, který leží na úsečce PL , úsečka PK je shodná s úsečkou AB a úsečka KL je shodná s úsečkou CD).

Z uvedené definice je zřejmé, že grafický součet dvou úseček je binární operace na množině všech úseček.

Binární operaci „grafický rozdíl“ lze definovat jako inverzní operaci k operaci grafický součet :

Definice pojmu **grafický rozdíl úseček**:

> **AB = PL – CD** $\Leftrightarrow$ PL = AB + CD

Symbolický zápis AB = PL – CD čtěte: úsečka AB je grafický rozdíl úseček PL a CD (v tomto pořadí) .

Podle uvedené definice se lze snadno přesvědčit, že v případě, že TU < RQ , grafický rozdíl úseček TU – RQ neexistuje.

ÚKOLY :

- Utvořte algoritmus pro konstrukci grafického rozdílu dvou úseček.

- Formulujte definici grafického rozdílu dvou úseček samostatně bez použití pojmu grafický součet úseček, tedy nikoliv jako inverzní operace k binární operaci grafický součet.

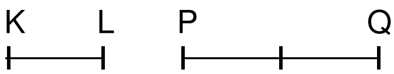
n – násobek úsečky

Zápis n AB čteme: „ n násobek úsečky AB “ (n je přirozené číslo)
Definice n-násobku úsečky :

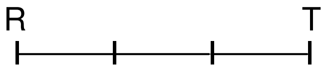
$$\boxed{\begin{array}{l} 1AB = AB \\ (n+1)AB = nAB + AB \end{array}}$$

(jedná se o definici matematickou indukcí).
Z uvedené definice plyne :
pro n = 1 : 2 AB = 1 AB + AB = AB + AB , tedy že <u>2 AB = AB + AB</u> ,
pro n = 2 : 3 AB = 2 AB + AB = (AB + AB) + AB , tedy že <u>3 AB = AB + AB + AB</u>
atd.

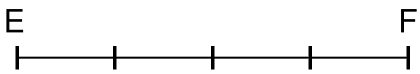
ÚLOHY o n-násobku úsečky :
1. Je dána úsečka KL , sestrojte její dvojnásobek, trojnásobek, čtyřnásobek .



PQ = 2 KL , tj.úsečka PG je dvojnásobkem úsečky KL

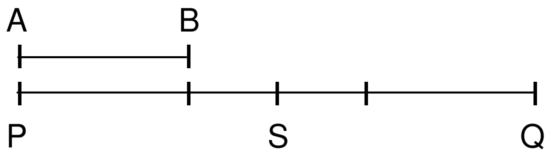


RT = 3 KL ,
tj. úsečka RT je trojnásobkem úsečky KL ,



EF = 4 KL ,
tj. úsečka EF je čtyřnásobkem úsečky MN .

2. Je dána úsečka AB , sestrojte úsečku CD tak, aby 3 AB = 2 CD .



3 AB = PQ

S je střed úsečky PQ , to znamená, že 2 PS = PQ
Zvolme úsečku CD tak, aby byla shodná s PS

jestliže CD ≅ PS , pak 2 CD = 2 PS
a tedy 2 CD = PQ a proto 2 CD = 3 AB
tj. dvojnásobek úsečky CD se rovná trojnásobku úsečky AB
(to se dá vyjádřit též takto: úsečka CD se rovná třem polovinám úsečky AB nebo úsečka AB se rovná dvěma třetinám úsečky CD) .

3. Zvolte dva navzájem různé body G, H . Zakreslete
a) bod M tak, aby M byl mezi body G, H a aby platilo,že GM = 3 MH ,
b) bod P tak, aby platilo, že P∈←HG a GP = 3 HP ,
c) bod T tak, aby T byl mezi body G, H a aby platilo, že GH = 3 TH .

Shodnost úhlů

PŘÍPRAVNÁ ÚLOHA:

Narýsujte dva konvexní úhly : $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle CUD$.
Přeneste úsečku VA na $\rightarrow UC$ a označte nalezený bod A' ,
přeneste úsečku VB na $\rightarrow UD$ a označte nalezený bod B' .
Porovnejte na vašem obrázku úsečky AB a $A'B'$.
Jsou, jak víte, tři možnosti: $AB \cong A'B'$, $AB < A'B'$, $AB > A'B'$.

Zjistil(a) jste, že $AB \cong A'B'$? Pak také $\sphericalangle AVB \cong \sphericalangle CUD$.
Zjistil(a) jste, že $AB < A'B'$? Pak také $\sphericalangle AVB < \sphericalangle CUD$
Zjistil(a) jste, že $AB > A'B'$? Pak také $\sphericalangle AVB > \sphericalangle CUD$.
Na základě těchto zjištění lze formulovat definice :

Definice shodnosti konvexních úhlů :

$$\boxed{\sphericalangle AVB \cong \sphericalangle CUD \;\Leftrightarrow\; (\exists A',B')\; A' \in \rightarrow UC \wedge VA \cong UC \wedge B' \in \rightarrow UD \wedge VB \cong UD \wedge AB \cong A'B'}$$

Zjistěte, zda uvedená definice shodnosti konvexních úhlů platí i pro nekonvexní úhly.

ÚKOLY :

- Zapište definici relace < („menší než“) pro konvexní úhly.

Výsledek :

$$\boxed{\sphericalangle AVB < \sphericalangle CUD \;\Leftrightarrow\; (\exists A',B')\; A' \in \rightarrow UC \wedge VA \cong UC \wedge B' \in \rightarrow UD \wedge VB \cong UD \wedge AB < A'B'.}$$

- Zapište definici relace > („větší než“) pro konvexní úhly.

Výsledek :

$$\boxed{\sphericalangle AVB > \sphericalangle CUD \;\Leftrightarrow\; (\exists A',B')\; A' \in \rightarrow UC \wedge VA \cong UC \wedge B' \in \rightarrow UD \wedge VB \cong UD \wedge AB > A'B'.}$$

Technická poznámka:
Zjišťování, zda jsou dva konvexní úhly shodné nebo zda je některý z nich menší než druhý, můžete provést tak, jak to znáte ze základní školy, tj. pomocí oblouků kružnic o shodných poloměrech. Jeden z těchto poloměrů se opíše kolem bodu V a druhý kolem bodu U tak, až protnou ramena příslušných úhlů. Porovnáte pak tětivy na obou obloucích. Uveďte souvislost s uvedenými definicemi.

ÚKOLY : Formulujte definice relací < , > pro nekonvexní úhly.

Pojmy definované pomocí shodnosti úhlů :

Osa konvexního úhlu

PŘÍPRAVNÁ ÚLOHA :

Narýsujte libovolný konvexní úhel $\sphericalangle AVB$.
Určitě víte ze základní školy, jak se tzv. „půlí“ úhel :
Sestrojíte $\rightarrow VO$ tak, že $O \in \sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle AVO \cong \sphericalangle BVO$.

Definice osy konvexního úhlu :

$\rightarrow VO$ je **osa konvexního úhlu** $\sphericalangle AVB \;\Leftrightarrow\; O \in \sphericalangle AVB \;\wedge\; \sphericalangle AVO \cong \sphericalangle BVO$.

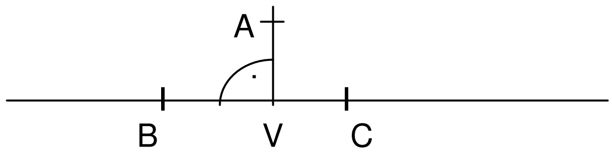
Pravý úhel

Přípravná „praktická“ úloha pro další pojem (pojem pravého úhlu): Připravte si z papíru model poloroviny (část okraje kusu papíru bude „rovná“). Přehněte tento papír tak, aby obě vzniklé rovné části přehnutého papíru splývaly (se zakrývaly). Je zřejmé, že přehnutý papír pak modeluje pravý úhel.

Papír opět rozložte a vhodně si na něm označte body A, V, B , aby bylo zřejmé, že úhel $\sphericalangle AVB$ je pravý (bod A volte na přehybu) a na $\leftarrow VB$ zvolte bod C .

Tím máme připraveno vše pro formulování **definice pravého úhlu** :

$\sphericalangle AVB$ je **pravý úhel** $\Leftrightarrow (\exists\, C)$ V je mezi B,C $\wedge \sphericalangle AVB \cong \sphericalangle AVC$.



Didaktická poznámka :

Manipulace s papírem přesně tak, jak je uvedena v tomto textu v přípravné úloze k pojmu pravý úhel, je velmi vhodná pro první stupeň základní školy v souvislosti s učivem o pravém úhlu, kolmosti přímek apod. Žáci mohou příslušné modelování provádět sami a tím dochází k dokonalé interiorizaci a k vytváření zcela jasných představ. Žáci si vytvářejí sami vlastní pomůcku pro další činnost s pravým úhlem a s kolmostí přímek.

Kolmost přímek

Je vám zajisté známo, jak souvisí pojem pravého úhlu s kolmostí přímek (často se říká, že dvě přímky jsou na sebe kolmé, když „svírají“ pravý úhel).
Snadno vyslovíme **definici kolmosti dvou různoběžných přímek**, když budou zadány takto: $\leftrightarrow VA$, $\leftrightarrow VB$

$\leftrightarrow VA \perp \leftrightarrow VB \;\Leftrightarrow\; \sphericalangle AVB$ je pravý úhel

Jsou-li různoběžné přímky označeny a, b , pak definici jejich kolmosti lze vyjádřit takto :

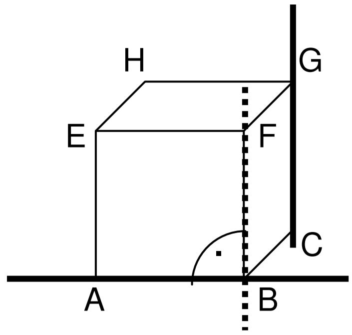
Jsou dány navzájem různoběžné přímky a , b .
$\mathbf{a \perp b} \;\Leftrightarrow\; (\exists\, A,B,V)\;\; a = \leftrightarrow VA \wedge b = \leftrightarrow VB \wedge \sphericalangle AVB$ je pravý

Definice kolmosti dvou navzájem mimoběžných přímek :

Jsou dány navzájem mimoběžné přímky c , d .
$\mathbf{c \perp d} \;\Leftrightarrow$ c je kolmá na alespoň jednu svou různoběžku, která je rovnoběžná s přímkou d .

Příklad :

Je dána krychle ABCDEFGH.
Platí, že $\leftrightarrow$**AB** $\perp$ $\leftrightarrow$**CG** ,
protože (podle definice):
přímka AB je různoběžná a kolmá na přímku BF
a přímka BF je rovnoběžná s přímkou CG .



ÚLOHY ke kapitole Shodnost v geometrii :

Zvolte navzájem různé body A, B . Zakreslete

a) $\{X\in E_2: AX \cong AB\}$ *Řešení* : kružnice se středem A a poloměrem AB .
b) $\{X\in E_2: AX < AB\}$ *Řešení* : vnitřek kruhu se středem A a poloměrem AB .
c) $\{X\in E_2: AX > AB\}$ *Řešení* : vnějšek kruhu se středem A a poloměrem AB .
d) $\{X\in E_2: AX \cong BX\}$ *Řešení* : osa úsečky AB .
e) $\{X\in E_2: AX < BX\}$ *Řešení* : vnitřek poloroviny oA , kde o je osa úsečky AB .
f) $\{X\in E_2: AX > BX\}$ *Řešení* : vnitřek poloroviny oB , kde o je osa úsečky AB .
g) $\{X\in E_2: AX \cong AB \vee AX < AB\}$ *Řešení* : kruh se středem A a poloměrem AB .
h) $\{X\in E_2: AX \cong BX \vee AX < BX\}$ *Řešení* : polorovina oA , kde o je osa úsečky AB.
i) $\{X\in E_2: AX \cong BX \vee AX > BX\}$ *Řešení* : polorovina oB , kde o je osa úsečky AB.

KOMBINOVANÉ ÚLOHY :

Jsou dány
a) nekolineární body A, B, C,
b) body A, B, C tak, že $AB \cong BC \wedge BC \cong AC$,
c) body A, B, C tak, že úhel ABC je pravý a $AC = 2\,AB$,
d) body A, B, C tak, že B je středem úsečky AC ,
e) body A, B, C tak, že B je mezi body A, C a platí, že $BC = 2\,AB$.

Zakreslete množiny

1. $\{X\in E_2: AX < AB \wedge CX > CA\}$, $\{X\in E_2: AX < AB \vee CX > CA\}$,
2. $\{X\in E_2: AX < CX \wedge CX < CA\}$, $\{X\in E_2: AX < CX \vee CX < CA\}$,
3. $\{X\in E_2: AX < CX \wedge CX < CA\}$, $\{X\in E_2: AX < CX \vee CX < CA\}$,
4. $\{X\in E_2: BX > CX \wedge CX < CA\}$, $\{X\in E_2: BX > CX \vee CX < CA\}$,
5. $\{X\in E_2: BX > CX \wedge CX < CA\}$, $\{X\in E_2: BX > CX \vee CX < CA\}$,
6. $\{X\in E_2: BX > AX \wedge (CX < CA \vee CX \cong CA)\}$,
7. $\{X\in E_2: (BX \cong AX \vee BX > AX) \wedge CX < CA\}$,
8. $\{X\in E_2: AX \cap BC \neq \emptyset \wedge BX > CX\}$,
9. $\{X\in E_2: (AX \cap BC \neq \emptyset \vee BX \cap AC \neq \emptyset) \wedge AX < AC\}$,
10. $\{X\in E_2: CX \cap AB = \emptyset \wedge (AX \cong BX \vee AX < BX)\}$.

Poznámky a doporučení ke studiu :

Neřešte mnoho úloh najednou, ale postupně s přestávkami. Není také třeba řešit všechny úlohy, ale zásadně **důležité je osvojit si princip řešení** .

Je velmi vhodné volit si **vlastní úlohy** tím, že obdobné výrokové formy budete různě kombinovat i jinak než je tomu v daných úlohách. Obtížnější ale velmi účelné je připravovat si i obrácené úlohy: vhodné útvary v rovině zapsat jako obory pravdivosti výrokových forem.

ZOBRAZENÍ V GEOMETRII

Pojem zobrazení

Zopakujme si pojem zobrazení. Zobrazení je speciální případ binární relace.

Binární relace z množiny A do množiny B je množina uspořádaných dvojic, jejichž první složky jsou prvky množiny A a druhé složky jsou prvky množiny B .

(binární relace z A do B je tedy podmnožina kartézského součinu $A\times B$) .

Binární relace z A do B je **zobrazení** z A do B, právě když v této relaci **každý prvek množiny A je první složkou nejvýše jedné uspořádané dvojice.**

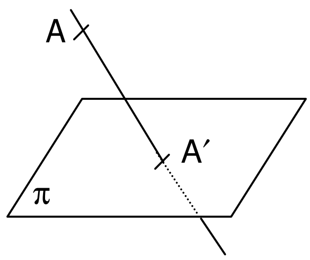
Jednoduchý příklad binární relace, která **je** zobrazením: {[k,o],[r,a],[m,o],[n,u]}
Jednoduchý příklad binární relace, která **není** zobrazením: {[k,o],[k,a],[m,o],[n,u]}

PROMÍTÁNÍ - zobrazení prostoru do roviny

Při řešení úloh o prostorových útvarech (o útvarech prostoru E_3) zobrazujeme tyto útvary do roviny. Jde o zobrazení prostoru E_3 na prostor E_2. V tomto zobrazení, které se nazývá **promítání**, „přiřadíme“ každému bodu z prostoru E_3 právě jeden bod prostoru E_2 takto**:**

1. Bodem (např. bodem A) prostoru E_3 vedeme přímku, nazývá se **promítací přímka** (např. promítací přímka bodu A)
2. zjistíme průsečík promítací přímky s rovinou, na kterou promítáme. Tato rovina se nazývá **průmětna**.
3. Průsečík promítací přímky bodu A s průmětnou se nazývá **průmět bodu A** (označujeme jej např. A' , A_1 , A_2 , apod.).

Vysvětlivky k obrázku: rovina π . . . průmětna
bod A . . . . promítaný bod
bod A' . . . . .průmět bodu A
$\leftrightarrow AA'$ . . . promítací přímka bodu A



---

1. Jestliže promítací přímky všech bodů prostoru E_3 jsou navzájem spolu rovnoběžné, jde o **rovnoběžné promítání.**

(Je zřejmé, že promítací přímky v tomto případě nemohou být rovnoběžné s průmětnou.)

Zvláštní případy rovnoběžného promítání :

a) je-li směr promítání kolmý k průmětně, jde o **pravoúhlé promítání**

b) není-li směr promítání kolmý k průmětně (a samozřejmě není ani rovnoběžný s průmětnou), jde o **kosoúhlé promítání** .

Volíme-li směr promítání (ovšem tak, aby nebyl k průmětně kolmý ani s ní rovnoběžný), jedná se o **volné rovnoběžné promítání**.

---

2. Jestliže promítací přímky všech bodů prostoru E_3 procházejí jedním bodem, jde o **středové promítání**, společný bod všech promítacích přímek se nazývá **střed promítání**.

Žádný bod, ležící v rovině, která prochází středem promítání a která je rovnoběžná s průmětnou, nemá středový průmět.

Zvláštním případem středového promítání je **perspektiva** (v tom případě se nepromítají všechny body prostoru E_3 , ale jen body v tzv. „zorném prostorovém úhlu) .

Rovnoběžné promítání

Určete sami některé **významné vlastnosti rovnoběžného promítání** na základě představivosti a úsudku :

určete, co všechno může být rovnoběžným průmětem

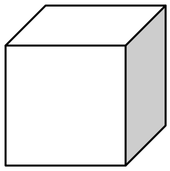
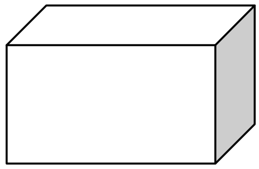
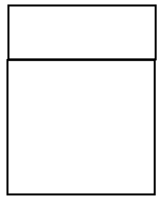
- bodu
- úsečky, přímky
- dvou navzájem rovnoběžných přímek
- pravého úhlu
- trojúhelníka
- čtyřúhelníka
- rovinného útvaru, který leží v rovině rovnoběžné s průmětnou

Řešení :

- rovnoběžným průmětem bodu je bod
- rovnoběžným průmětem úsečky je úsečka a rovnoběžným průmětem přímky je přímka, právě když tato úsečka nebo přímka **není** rovnoběžná s promítacími přímkami (se směrem promítání)

  rovnoběžným průmětem úsečky nebo přímky je bod, právě když tato úsečka nebo přímka **je** rovnoběžná s promítacími přímkami (se směrem promítání)
- rovnoběžné průměty dvou navzájem rovnoběžných a různých přímek a, b jsou dvě navzájem rovnoběžné přímky a′, b′ (může nastat i případ, že a′= b′) nebo dva různé body (tato možnost nastane, právě když přímky a, b jsou rovnoběžné se směrem promítání
- rovnoběžným průmětem pravého úhlu může být
  a) pravý úhel
  b) ostrý úhel
  c) tupý úhel
  d) polopřímka
  e) přímka
- rovnoběžným průmětem trojúhelníka může být buď trojúhelník anebo úsečka
- rovnoběžným průmětem čtyřúhelníka může být buď čtyřúhelník anebo úsečka
- jestliže rovinný útvar leží v rovině rovnoběžné s průmětnou, pak jeho rovnoběžným průmětem je útvar s ním shodný

Zakresleme některé ukázky volných rovnoběžných průmětů těles.

krychle (nadhled zprava) kvádr (nadhled zprava) krychle (přímý nadhled)

Úlohy *(všechny tyto úlohy řešte:ve volném rovnoběžném promítání)* :

- Narýsujte průměty krychle a kvádru: v nadhledu zleva, v podhledu zprava, v podhledu zleva, v přímém podhledu, pravoúhlý průmět.
- Určete všechny útvary, které mohou být rovnoběžnými průměty úsečky, polopřímky, přímky, trojúhelníka, konvexního úhlu, pravého úhlu, dvou přímek, které jsou navzájem rovnoběžné, různoběžné, mimoběžné.
- Určete všechny typy útvarů, které mohou být průniky : krychle a roviny, kvádru a roviny, krychle a přímky, kvádru a přímky.
- Řešte následující úlohy o průniku krychle a roviny, kvádru a roviny, krychle a poloprostoru, kvádru a poloprostoru, krychle a přímky, kvádru a přímky :

  - Je dána krychle ABCDEFGH a body S, O tak, že S je střed hrany GH a O je střed hrany AE .
    Sestrojte (ve volném rovnoběžném promítání) průnik krychle ABCDEFGH a roviny ↔SOB .
  - Je dána krychle ABCDEFGH a body K, L tak, že K∈←HD a KH ≅ HD, L∈←CD a CD = 2 CL .
    Zakreslete průnik krychle a roviny ↔ KLA .
  - Je dán kvádr ABCDEFGH a body S, O tak, že S je střed hrany EF a O je střed hrany GH .
    a) Zakreslete průnik kvádru ABCDEFGH a poloprostoru →OSBD. Tento průnik označme jako těleso **T** .
    b) Určete, kolik stěn má těleso **T** .
    c) Určete, kolik má těleso **T** stěn lichoběžníkových, obdélníkových atd.
  - Je dána krychle ABCDEFGH, dále je dán bod K tak, že K∈←AD a KA ≅ AD a bod L, který je středem hrany GH .
    a) Sestrojte průnik krychle ABCDEFGH a roviny ↔KLC .
    b) Určete, zda tímto průnikem je trojúhelník, kosočtverec, čtverec nebo pětiúhelník.
  - Je dána krychle ABCDEFGH a body K, L tak, že bod K je mezi body A,E a bod L je střed hrany HG .
    Zakreslete průnik krychle a poloprostoru → KLCD .
  - Je dán kvádr ABCDEFGH a bod M tak, že G je střed úsečky MF .
    a) Sestrojte průnik kvádru a roviny ↔BEM .
    b) Sestrojte těleso **T**, které je průnikem kvádru a poloprostoru →BEMD (vyznačte zřetelně viditelnost) .
    c) Určete u tělesa **T** počet všech jeho
       - stěn

- trojúhelníkových stěn
- lichoběžníkových stěn
- obdélníkových stěn
- pětiúhelníkových stěn .

SHODNÉ ZOBRAZENÍ (shodnost) v rovině

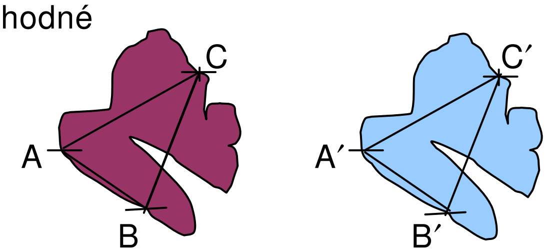
Zobrazení v rovině je **shodné zobrazení**, právě když $(\forall X,Y)\ X'Y' \cong XY$

Slovy : Zobrazení v rovině je **shodné zobrazení**, právě když pro každé dva body X, Y a jejich obrazy X′,Y′ platí, že $X'Y' \cong XY$

Definice shodnosti dvou útvarů:

Dva útvary jsou shodné, právě když existuje shodné zobrazení jednoho z nich na druhý.

Např.: při vyučování na 1.stupni ZŠ dva útvary nakreslené podle téže šablony jsou navzájem shodné



$A'B' \cong AB$

$A'C' \cong AC$

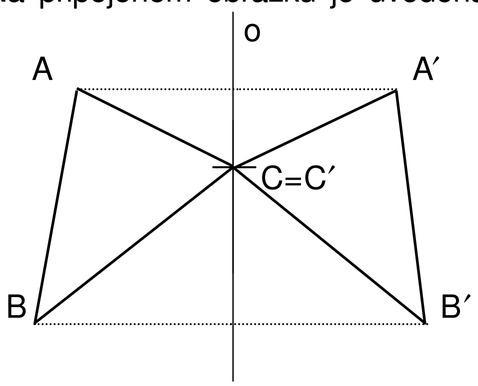
$B'C' \cong BC$

apod.

Speciální případy shodností v rovině (*seznámili jste se s nimi již ve studiu na střední škole*) :

osová souměrnost (axiální symetrie),
otáčení (rotace), **středová souměrnost** (centrální symetrie),
posunutí (translace),
totožnost (identita).

Na připojeném obrázku je uvedena osová souměrnost, která je dána osou o, dále body A, B, C a jejich obrazy A′, B′, C′ v osové souměrnosti s osou o .



Konstrukce obrazů jednotlivých bodů je zcela zřejmá z obrázku.
Ze situace na obrázku můžeme vycházet při formulování definice osové souměrnosti :

Vidíme, že pokud bod X leží mimo přímku o , pak X′ (obraz bodu X) je konstruován tak, že přímka o je osou úsečky XX′ .
Pokud bod X leží na přímce o , splývá se svým obrazem X′ (tj. X = X′), takový bod se nazývá **samodružný bod** v daném zobrazení.
Definice osové souměrnosti tedy zní :

V rovině je dána přímka, označme ji např. o . Zobrazení v rovině je **osová souměrnost s osou o** , právě když pro každé dva body X, Y a jejich obrazy X′, Y′ platí : 1. jestliže $X \in o$, pak $X' = X$, 2. jestliže $X \notin o$, pak přímka o je osou úsečky XX′ .

* Výše definovaná **osová souměrnost je shodné zobrazení**,

to lze dokázat např. tak, že posoudíme postupně všechny případy různého postavení dvou bodů v rovině vzhledem k ose o a dokážeme, že ve všech těchto případech pro každé dva body X, Y a jejich obrazy X', Y' platí, že $X'Y' \cong XY$.

* Použití osové souměrnosti ve výuce matematiky na prvním stupni ZŠ je bohaté, např. jde o

- **zakreslení a vystřihnutí ornamentu**, geom.útvaru na přehnutém papíru (papír je možno přehnout před vystřihnutím ornamentu vícekrát)
- vytváření obtisků (např. razítko a jeho obtisk), zde se projevuje významná vlastnost osové souměrnosti, že je to tzv. **nepřímá shodnost**
- vyšetřování, které rovinné **útvary** jsou **osově souměrné** (tj. zda obrazem takového útvaru je on sám), zda jsou souměrné podle jedné nebo více os, která velká písmena latinské abecedy jsou osově souměrná apod.
- řada zajímavých konstruktivních úloh, kdy **osová souměrnost umožňuje jednoduchý způsob řešení**, např. :
  1. Je dána přímka p a body A, B, které na přímce p neleží. Sestrojte na přímce p takový bod P, aby platilo, že $AP \cong PB$ (úloha o řešení praktického problému najít místo pro vybudování zastávky u železniční trati tak, aby ze dvou vesnic bylo k této zastávce stejně daleko).
  2. Je dána přímka p a body A, B, které na přímce p neleží. Sestrojte na přímce p takový bod P, aby grafický součet úseček $AP + PB$ byl ze všech možných nejmenší.

Skládání osových souměrností :

1. Skládání osových souměrností s navzájem různoběžnými osami :

Řešení:
Zvolte dvě navzájem různoběžné přímky o_1, o_2, dále zvolte body A, B, C (tři zástupce všech bodů roviny).
V osové souměrnosti s osou o_1 sestrojte obrazy bodů A, B, C a označte je A', B', C',
Dále pak v osové souměrnosti s osou o_2 sestrojte obrazy bodů A', B', C' a označte je A'', B'', C''.
Složením obou souměrností vzniklo zobrazení, v němž obrazy bodů A, B, C jsou body A'', B'', C''.
Snadno se přesvědčíte, že toto výsledné zobrazení je shodnost.
Podrobnějším zkoumáním zjistíme, že body A, A', A'' (obdobně body B, B', B'' a body C, C', C'') leží na kružnici, jejímž středem S je průsečík os o_1, o_2.
Výsledné zobrazení nazveme **otáčení**, průsečík os o_1, o_2 nazveme **střed otáčení**).
Navíc lze zjistit, že pro všechny body X roviny (kromě bodu S) jsou všechny úhly XSX'' navzájem shodné a rovnají se dvojnásobku úhlu os.
Proto pokud $o_1 \perp o_2$, pak složením je **středová souměrnost** .
Dále je zřejmé, že průsečík os o_1, o_2 je jediný samodružný bod tohoto výsledného zobrazení.
Uvedená zjištění nám umožní formulovat **definici otáčení** např. takto:

> **Otáčení** je složení dvou osových souměrností, jejichž osy jsou navzájem různoběžné.
> Průsečík os S se nazývá **střed otáčení**.
> Úhel XSX'' (kde X je libovolný bod roviny kromě bodu S a X'' je obraz bodu X v daném otáčení) se nazývá **úhel otáčení** .

2. Skládání osových souměrností s navzájem rovnoběžnými osami :

a) $o_1 \parallel o_2 \ \wedge \ o_1 \neq o_2$

Proveďte uvedené skládání.
Postup konstrukce je podobný jako v případě různoběžných os, výsledek je však odlišný: body A, A′, A″ (B, B′, B″ a také C, C′, C″) leží tentokrát v přímce.
Složením obou souměrností vzniká zobrazení, v němž obrazem bodu A je bod A″, obrazem bodu B je bod B″ a obrazem bodu C je bod C″ .
Ihned nahlédneme, že toto výsledné zobrazení je shodnost, protože platí, že $A''B'' \cong AB$, $B''C'' \cong BC$, $A''C'' \cong AC$.
Toto zobrazení nazveme **posunutí**.

Uvedená zjištění nám umožní formulovat **definici posunutí** např. takto:

> **Posunutí** je složení dvou osových souměrností, jejichž osy jsou navzájem rovnoběžné a různé.
> Pro každé dva body X, Y a jejich obrazy X″,Y″ v posunutí platí, že $XX'' \cong YY''$.
> Pro každý bod X platí, že XX″se rovná dvojnásobku „vzdálenosti“ os o_1, o_2 .

b) $o_1 = o_2$

Při skládání osové souměrnosti se sebou samou se každý bod roviny „vrátí na své původní místo“, to znamená, pro každý bod X platí, že $X = X''$. Jedná se tedy o shodnost, v níž každý bod je samodružný. Toto shodné zobrazení se nazývá **identita.**

Při dalším studiu shodných zobrazení lze prokázat, že každé shodné zobrazení lze složit ze dvou nebo ze tří osových souměrností.

Závěrem ke shodným zobrazením uveďme :

Uvažme algebraickou strukturu, kterou tvoří **množina všech shodností** v rovině vzhledem k binární operaci jejich **skládání** :

1. Skládání shodností je operace **úplná** (vždy proveditelná), protože složením libovolných dvou shodností je opět shodnost.

Uvedená struktura je tedy grupoid.

2. Skládání shodností je operace **asociativní** (lze dokázat obecně, zkuste alespoň ověřit na konkrétním případu).

Uvedená struktura je tedy pologrupa.

3. **Existuje neutrální prvek** (neutrálním prvkem je zde identita - ověřte).
4. **Ke každé shodnosti existuje shodnost inverzní** (lze najít ke každé shodnosti takovou shodnost, aby jejich složením vznikla identita – zjistěte, co je např. inverzním prvkem k osové souměrnosti, k otáčení, k posunutí).

Snadno lze zjistit, že skládání shodností není komutativní.

Výsledek uvedeného vyšetřování shrneme takto:

> **množina všech shodností** v rovině vzhledem k jejich **skládání** je **nekomutativní grupa**.

Topologické pojmy

Okolí bodu

Za <u>okolí daného bodu v rovině</u> (v prostoru E_2) budeme považovat kterýkoliv kruh se středem v tom daném bodě a ještě upřesníme, že se bude jednat o „kruh bez kružnice“ čili o útvar, kterému říkáme „vnitřek kruhu“.

Podle toho, jak známe definici kruhu (definici vnitřku kruhu), budeme formulovat okolí daného bodu (*označme tento bod např.A*) v prostoru E_2 takto: $\{X \in E_2 : AX < \delta\}$.

V uvedeném zápise δ je označení poloměru zmíněného kruhu, tedy v podstatě označení úsečky.
(*Znak* δ *je písmeno řecké abecedy, čteme je jej, jak známo* „delta“).

Ke každému bodu v prostoru E_2 existuje mnoho různých okolí. Jsou to kruhy (vnitřky kruhů) se společným středem a různými poloměry. Jedno určité okolí daného bodu je tímto daným bodem a určitým poloměrem δ jednoznačně dáno.

Zavádíme proto pojem **δ-okolí bodu** (*čteme:* „delta okolí bodu“).

Definici pojmu **δ-okolí bodu A v prostoru E_2** tedy budeme formulovat takto:

δ-okolí bodu A v prostoru E_2 je $\{X \in E_2 : AX < \delta\}$, kde δ je daná nenulová úsečka.

Pojem okolí bodu v prostoru E_2 (tj. v rovině) rozšiřme na pojem okolí bodu v prostoru E_3 (tj. v prostoru). Zatímco v rovině se jednalo o „kruhová okolí“, v prostoru půjde o „kulová okolí“:

Ke každému bodu existuje opět mnoho různých okolí. Jsou to koule (vnitřky koulí) se společným středem a různými poloměry. Jedno určité okolí daného bodu je tímto daným bodem a určitým poloměrem δ jednoznačně dáno.

Za <u>okolí daného bodu v prostoru</u> (v prostoru E_3) budeme považovat kteroukoliv kouli se středem v tom daném bodě a ještě upřesníme, že se bude jednat o „kouli bez kulové plochy“ čili o útvar, kterému říkáme „vnitřek koule“.

Pojem **δ-okolí bodu A v prostoru E_3** tedy budeme definovat takto:

δ-okolí bodu A v prostoru E_3 je $\{X \in E_3 : AX < \delta\}$, kde δ je daná nenulová úsečka.

Obdobným způsobem lze definovat δ-okolí bodu A v prostoru E_1 **:**

δ-okolí bodu A v prostoru E_1 je $\{X \in E_1 : AX < \delta\}$, kde δ je daná nenulová úsečka.

Vyšetřete, jakým útvarem je δ-okolí bodu A v prostoru E_1 .
(δ-okolí bodu A v prostoru E_1 je úsečka, jejímž středem je bod A a která je shodná s grafickým součtem $\delta + \delta$.)

Pojem okolí bodu lze zřejmě zobecnit pro kterýkoliv prostor E_1, E_2 nebo E_3 :

δ-okolí bodu A v prostoru E_n je $\{X \in E_n : AX < \delta\}$,
kde δ je daná nenulová úsečka a n je přirozené číslo 1, 2 nebo 3 .

Poznámka:
Teoretické úvahy mají smysl i pro různé eukleidovské prostory E_n (n-rozměrné eukleidovské prostory) pro libovolné přirozené číslo n.
V tomto textu se omezíme na n rovno jedné, dvěma nebo třem.

V další části textu budou uvedeny bez komentáře definice některých dalších topologických pojmů (k procvičení těchto pojmů a jejich aplikací jsou určeny úlohy na konci této kapitoly) :

Útvar U je omezený, právě když existuje aspoň jeden bod a aspoň jedno okolí tohoto bodu, že útvar U je podmnožinou toho okolí.

Bod A je **vnitřní bod útvaru** U, právě když existuje alespoň jedno okolí bodu A , které je podmnožinou útvaru U .

Bod A je **vnější bod útvaru** U, právě když existuje alespoň jedno okolí bodu A , které neobsahuje žádný bod útvaru U .

Bod A je **hraniční bod útvaru** U, právě když pro každé okolí bodu A platí, že obsahuje aspoň jeden bod, který útvaru U náleží a obsahuje aspoň jeden bod, který útvaru U nenáleží.

Hranice útvaru U je množina všech hraničních bodů útvaru U .

Útvar je uzavřený, právě když mu náleží všechny jeho hraniční body.

Útvar je otevřený, právě když mu nenáleží žádný jeho hraniční bod.

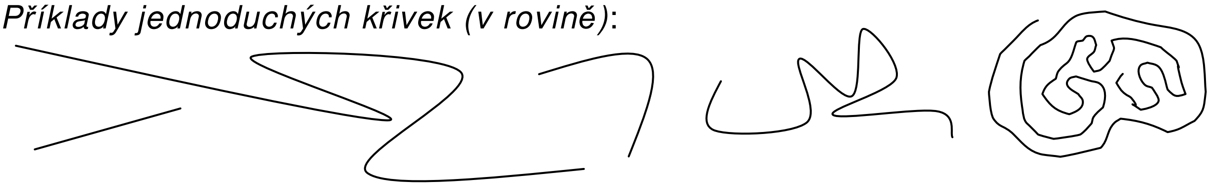
TOPOLOGICKÉ ZOBRAZENÍ

V tomto kurzu nebudeme uvádět exaktní definici topologického zobrazení, spokojíme se pouze s jeho intuitivním uvedením :

Topologické zobrazení nemusí „zachovat“ ani „velikost“ ani „tvar“ útvaru, ale každým dvěma různým bodům jsou v něm přiřazeny dva různé obrazy. (*Toto není definice, ale pouze intuitivní „přiblížení“ pojmu pomocí představ.*)

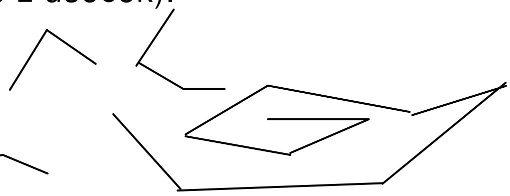
Jednoduchá křivka
je topologický obraz úsečky (obraz úsečky v topologickém zobrazení).

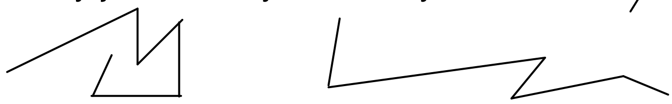
Příklady jednoduchých křivek (v rovině):



Speciální případ jednoduché křivky je **jednoduchá lomená čára**, (je to jednoduchá křivka, která se „skládá“ pouze z úseček).

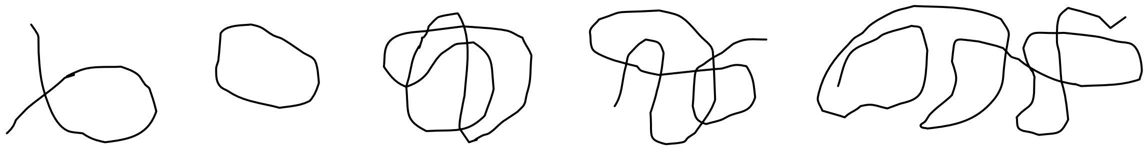
Příklady jednoduchých lomených čar:





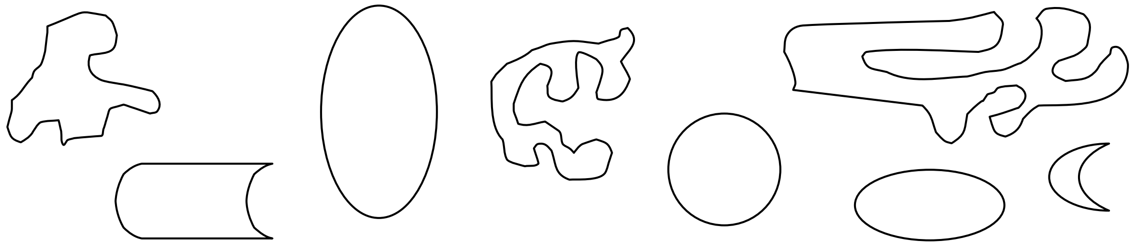
Jednoduchá křivka sama sebe neprotíná a má dva krajní body.

Příklady křivek (v rovině), které nejsou jednoduchými křivkami:

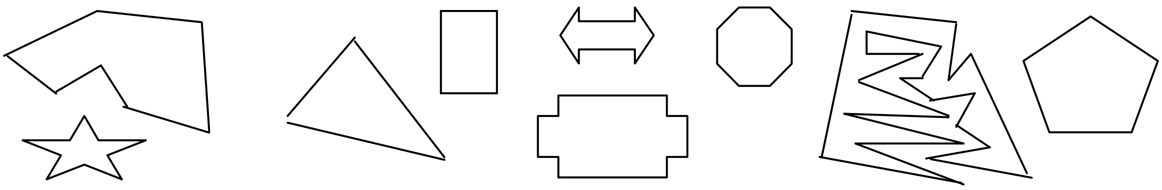


<u>Jednoduchá uzavřená křivka</u> je topologický obraz kružnice (obraz kružnice v topologickém zobrazení).

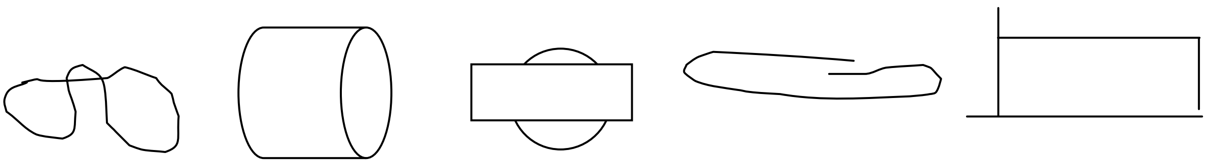
Příklady jednoduchých uzavřených křivek (v rovině):



Speciální případ jednoduché uzavřené křivky je **jednoduchá lomená uzavřená čára**,
(je to jednoduchá uzavřená křivka, která se „skládá“ pouze z úseček). *Příklady jednoduchých lomených uzavřených čar:*



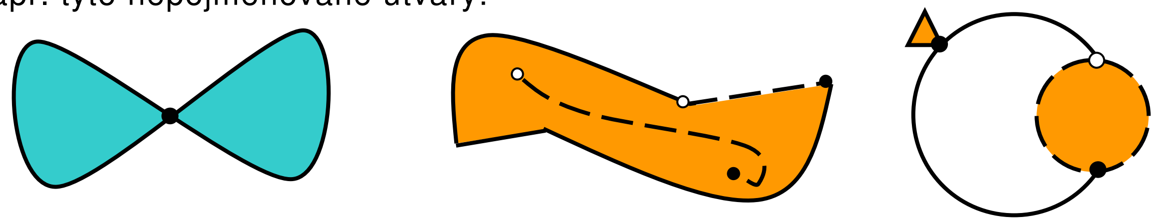
Příklady křivek (v rovině), které nejsou jednoduchými uzavřenými křivkami:



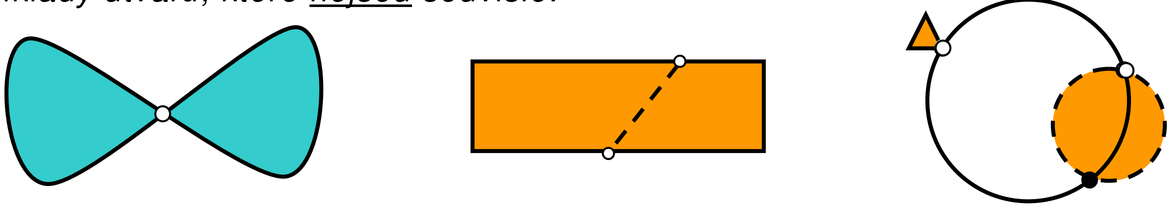
<u>Útvar U je souvislý</u>, právě když pro každé dva body X,Y platí, že existuje jednoduchá křivka, která body X,Y „spojuje“ a je podmnožinou útvaru U.

Příklady útvarů, které jsou souvislé:

trojúhelník, polorovina, konvexní úhel, nekonvexní úhel, mezikruží, čtyřúhelník (i nekonvexní čtyřúhelník !), kvádr, válec, polopřímka a další, např. tyto nepojmenované útvary:



Příklady útvarů, které nejsou souvislé:



Dva útvary se překrývají, právě když jejich průnik obsahuje alespoň jeden bod, který je vnitřním bodem alespoň jednoho z nich.

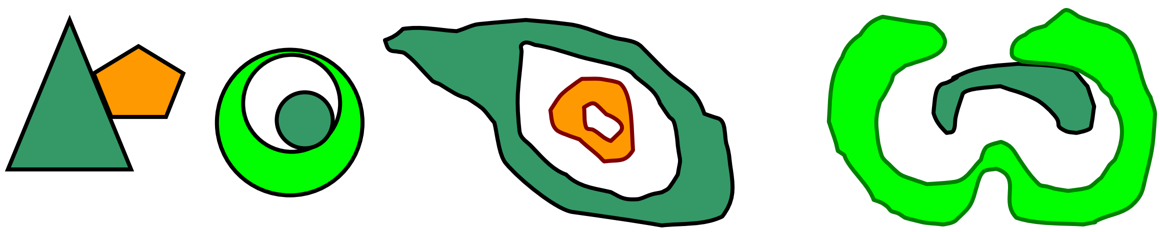
A tedy platí:

Dva útvary se nepřekrývají, právě když jejich průnik neobsahuje žádný bod, který by byl vnitřním bodem alespoň jednoho z nich.

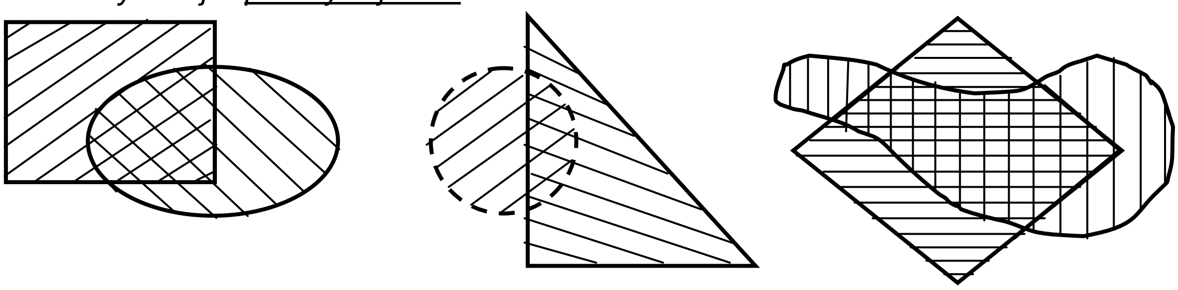
Jinak řečeno:

Dva útvary se nepřekrývají, právě když jejich průnik je podmnožinou průniku jejich hranic.

Příklady dvojic nepřekrývajících se útvarů v rovině:



Příklady dvojic překrývajících se útvarů v rovině:



ÚLOHY ke kapitole Topologické pojmy :

Řešte úlohy 1.-13. takto:

a) zakreslete útvar **U** ,
b) zapište hranici útvaru **U** v prostoru E_2 a hranici v prostoru E_3 ,
c) rozhodněte, zda útvar **U** je nebo není konvexní, omezený, uzavřený, otevřený, souvislý.

1. Zvolte nekolineární body R, T, D.
Útvar **U** je dán takto: **U =** $\leftarrow RTD \cup \{X \in E_2 : RX \cap TD \neq \emptyset\}$.

2. Zvolte K, L, M tak, aby úhel KLM byl pravý a aby úsečka KM byla dvojnásobkem úsečky KL.
U = $\{X \in E_2 : KX \cap LM \neq \emptyset\} \cup \{X \in E_2 : LX \cap KM \neq \emptyset\}$.

3. Zvolte konvexní čtyřúhelník ABCD. Průsečík jeho úhlopříček označte S .
Útvar **U** je dán takto: **U =** $\{X \in E_2 : SX \cap CD \neq \emptyset\} \cup \{A,B,S\}$.

4. Sestrojte pravidelný šestiúhelník MNOPQR se středem S .
Útvar **U** je dán takto: **U =** $(\Delta\, MNO - MN) \cup \{P, Q, R, S\}$.

5. Zvolte nekolineární body R, S, T .
Útvar **U** je dán takto: **U =** $(\leftarrow TSR \cup TR) - \{T\}$.

6. Zvolte nekolineární body A, B, C .
Útvar **U** je dán takto: **U =** $\{X \in E_2 : \leftrightarrow CX \cap AB \neq \emptyset\}$.

7. Zvolte nekolineární body K, L, M .
Útvar **U** je dán takto: **U =** $\{X \in E_2 : KX \cap LM = \emptyset \wedge LX \cap KM = \emptyset\}$.

8. Zvolte nekolineární body P, Q, R .
Útvar **U** je dán takto:
U = $\{X \in E_2 : PX \cap \rightarrow RQ \neq \emptyset\} \cup \{X \in E_2 : RX \cap PQ \neq \emptyset\}$.

9. Zvolte nekolineární body K, L, M .
Útvar **U** je dán takto: **U =** $(\{X \in E_2 : KX \cap ML \neq \emptyset\} \cup \leftarrow KLM) - \leftrightarrow KL$.

10. Zvolte nekolineární body K, L, M . Další bod O zvolte tak, aby **ne**náležel trojúhelníku Δ KLM.
Útvar **U** je dán takto: **U =** $\Delta KLM \cup \{O\}$.

11. Zvolte nekolineární body P, Q, R .
Útvar **U** je dán takto:
U = $\{X \in E_2 : PX \cap \rightarrow RQ \neq \emptyset\} \cup \{X \in E_2 : RX \cap PQ \neq \emptyset\}$.

12. Sestrojte pravidelný šestiúhelník MNOPQR se středem S .
Útvar **U** je dán takto: **U =** $\Delta\, MNO \cup \{P, Q, R, S\}$.

13. Zvolte nekolineární body A,B,C. Útvar **U** je sjednocení trojúhelníka ABC a opačné poloroviny k polorovině ABC (**U** = $\Delta\, ABC \cup \leftarrow ABC$) .

Úlohy 14. a 15. řešte takto :

a) zakreslete útvary **U** , **V** ,
b) zjistěte, zda se útvary **U** , **V** překrývají ,
c) zapište hranici útvaru, který je sjednocením útvarů **U** , **V** .

14. Zvolte konvexní čtyřúhelník M, N, P, Q . Útvary **U**, **V** jsou dány takto:
U = $\{ X \in E_2 : QX \cap MN \neq \emptyset \}$, **V** = $\{ X \in E_2 : QX \cap NP \neq \emptyset \}$.

15. Zvolte nekolineární body M, N, P . Útvary **U** , **V** jsou dány takto:
Útvar **U** je množinový rozdíl konvexního úhlu MPN a trojúhelníka MPN .
Útvar **V** je polorovina $\rightarrow$ PNM .

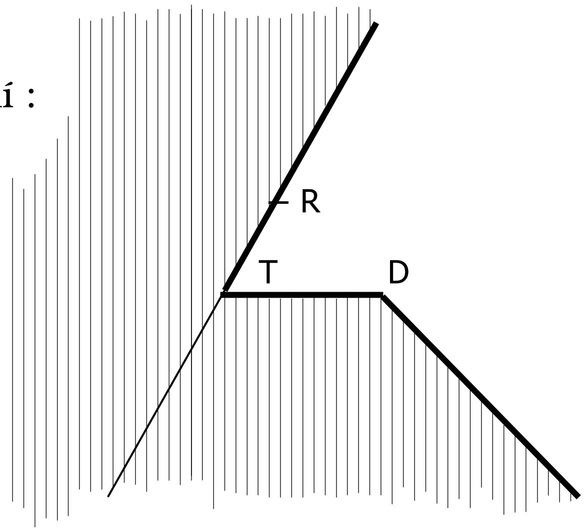
Řešení 1. úlohy

Zopakujme zadání úlohy:

1. Zvolte nekolineární body R, T, D.
Útvar **U** je dán takto: **U** = $\leftarrow$ RTD $\cup$ $\{ X \in E_2 : RX \cap TD \neq \emptyset \}$.
   a) zakreslete útvar **U**,
   b) zapište hranici útvaru **U** v prostoru E_2 a hranici v prostoru E_3 ,
   c) rozhodněte, zda útvar **U** je nebo není konvexní, omezený, uzavřený, otevřený, souvislý.

Výsledek řešení :

a)



b) Hranice útvaru **U** v prostoru E_2 je : $\rightarrow$TR $\cup$ TD $\cup$ $\leftarrow$DR .
Hranice útvaru **U** v prostoru E_3 je útvar **U** .

c) Útvar **U** **není** konvexní, protože existují aspoň dva body X, Y útvaru **U** takové, že úsečka XY $\not\subset$ **U**.
(Najděte aspoň jednu dvojici takových bodů. Samozřejmě takových dvojic existuje mnoho, ale postačí, když najdete alespoň jednu – viz definice konvexního útvaru a dodatek k této definici.
Pozor! existují sice dvojice bodů útvaru **U**, např. K, L takové, že KL $\subset$ **U** , ale to na věci nic nemění - vezměte v úvahu přesně definici konvexního útvaru, zejména berte v úvahu význam kvantifikátorů !!)

Útvar **U** **není** omezený, protože útvar **U** není podmnožinou žádného okolí libovolného bodu – je třeba opět vzít přesně v úvahu definici omezeného útvaru.

Útvar **U** **je** uzavřený, protože mu patří všechny jeho hraniční body (totéž jinak řečeno: protože hranice útvaru **U** není jeho podmnožinou) – opět postupujeme přesně podle příslušné definice.

Útvar **U** **není** otevřený, otevřenému útvaru totiž nepatří žádný jeho hraniční bod a to pro útvar **U** rozhodně neplatí.

Útvar **U** **je** souvislý, protože pro každé dva body X,Y útvaru **U** platí, že existuje jednoduchá křivka, která body X,Y spojuje a je podmnožinou útvaru **U**.

Výsledky řešení b), c) některých úloh 1.-15. :
Část a) uvedených úloh vypracujte samostatně. Výsledky řešení částí b), c), které jsou dále uvedeny, vám mohou sloužit i ke kontrole správnosti řešení částí a) , tj. ke kontrole správnosti zakreslení útvarů v úlohách 1.-15.

2. úloha: Hranice útvaru v prostoru E_2 je $\rightarrow LM \cup \rightarrow KM \cup \leftarrow KL \cup \leftarrow LK$
nebo jiný zápis téže hranice $(\leftrightarrow KL - KL) \cup \rightarrow KM \cup \rightarrow LM$.
Hranice útvaru v prostoru E_3 je útvar sám, útvar je sám sobě hranicí.
Daný útvar není konvexní, není omezený, je uzavřený, není otevřený, je souvislý .

4. úloha: Hranice útvaru v prostoru E_2 je $MN \cup MO \cup NO \cup \{ P, Q, R, S \}$.
Hranice útvaru v prostoru E_3 je útvar sám, tj. $\Delta\, MNO \cup \{P, Q, R, S\}$.
Daný útvar není konvexní, je omezený, není uzavřený, není otevřený, není souvislý .

MĚŘENÍ GEOMETRICKÝCH ÚTVARŮ

JORDANOVA MÍRA

Míra úseček

Přípravné úvahy:

Víte velmi dobře, že výsledkem při měření úsečky je zjištění určitého čísla, kterému pak obvykle říkáme délka úsečky.

Úsečky měříme vždy v určité míře, např. v centimetrech, metrech, kilometrech, ale také na palce, stopy, sáhy, míle a v nejrozmanitějších jiných jednotkách. (V jisté míře např.určíme, že délka dané úsečky je třeba 5 centimetrů, jiná úsečka v jiné míře má např.délku 3,7 metru apod.)

Z hlediska matematické teorie je vhodné si uvědomit : při měření úseček jde o to, že každé úsečce přiřazujeme v určité míře právě jedno číslo. Jedná se tedy o **zobrazení**.

Protože úsečkám přiřazujeme v tomto zobrazení čísla, jde o zobrazení množiny všech úseček na množinu jistých čísel. Stanovme, jaký druh čísel k tomu potřebujeme. Ze zkušenosti známe, že k tomu stačí čísla kladná nebo nula (nula je délkou tzv.nulové úsečky), záporná čísla nepotřebujeme. Nestačí však čísla celá (délka určité úsečky se např. může rovnat 5,3 metru apod.). O tom, že pro délky úseček nestačí ani čísla racionální, nás přesvědčí třeba tento jednoduchý příklad: narýsujte pravoúhlý trojúhelník, jehož jedna odvěsna má délku 2 (např.dva centimetry) a druhá odvěsna má délku 3 (např.tři centimetry), (*odvěsnami nazýváme ty strany pravoúhlého trojúhelníka, které svírají pravý úhel)*. Vypočítejte délku přepony (*tj.nejdelší strany*) tohoto pravoúhlého trojúhelníka. Výpočet provedeme podle Pythagorovy věty (poznali jste ji na 2.st.ZŠ):

$$c^2 = a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 , \quad \text{proto } c = \sqrt{13}$$

délka přepony našeho trojúhelníka se tedy rovná číslu iracionálnímu.

Z toho je zřejmé, že pro délky úseček potřebujeme nejen racionální, ale i iracionální čísla a tedy **reálná čísla** a podle toho, co jsme si již připomněli, samozřejmě reálná čísla, která nejsou záporná.

Shrňme a doplňme předcházející úvahy:

- Při měření úseček se jedná o **zobrazení množiny všech úseček na množinu všech nezáporných reálných čísel**.
- Čísla, která v tomto zobrazení přiřazujeme úsečkám, se obvykle nazývají **délky** těchto **úseček**.

Ze zkušenosti je zřejmé, že přiřazování délek úsečkám nesmí být chaotické, ale musí být vázáno určitými předpoklady. Jsou-li tyto předpoklady splněny, nazývá se toto zobrazení **míra úseček**. Zmíněné předpoklady uveďme v definici míry úseček:

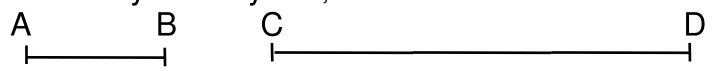
Definice míry úseček:

Zobrazení množiny všech úseček na množinu všech nezáporných reálných čísel se nazývá **míra úseček** a číslo, které je v tomto zobrazení přiřazeno dané úsečce se nazývá **délka úsečky** (délku úsečky AB zapisujeme $|AB|$), právě když

1. $(\exists AB)\ |AB| = 1$
   slovy : existuje úsečka, že její délka se rovná číslu 1
   nebo : existuje úsečka, která má délku 1
   nebo : zvolená úsečka má délku 1
2. $(\forall AB,CD)\ AB \cong CD \Rightarrow |AB| = |CD|$
   slovy : pro každé dvě úsečky platí:
   jestliže jsou shodné, pak jejich délky jsou si rovny
   nebo : délky shodných úseček jsou si rovny,
3. $(\forall AB,CD)\ |AB+CD| = |AB|+|CD|$
   slovy: pro každé dvě úsečky platí:
   délka jejich grafického součtu se rovná součtu jejich délek
   nebo: délka grafického součtu dvou úseček se rovná součtu jejich délek.

Úloha :

Jsou dány úsečky AB, CD:



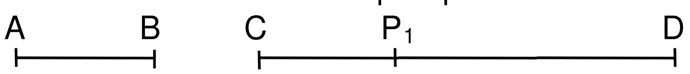
Určete délku úsečky CD, jestliže délka úsečky AB se rovná číslu 1.

Řešení:

V textu uvedené úlohy je dáno, že $|AB| = 1$ *(tj.,že délka úsečky* AB *se rovná číslu jedna)*.

Je tedy splněn 1. předpoklad definice míry úseček.

Přeneste úsečku AB na polopřímku $\rightarrow CD$:



Tímto přenesením je úsečka CP_1 . Jakou délku má úsečka CP_1 ?

Podle 2. předpokladu definice míry úseček platí, že $|CP_1|=1$, protože $CP_1 \cong AB$ a $|AB| = 1$.

Přeneste úsečku AB na polopřímku $\leftarrow P_1C$ (*tj. na opačnou polopřímku k polopřímce* $\rightarrow P_1C$):

Tímto přenesením je úsečka P_1P_2 . Jakou délku má úsečka P_1P_2 ?

Podle 2. předpokladu definice míry úseček platí, že $|P_1P_2|=1$, protože $P_1P_2 \cong AB$ a $|AB| = 1$.
Jakou délku má úsečka CP_2 ?
Platí, že $|CP_2| = 2$ a to podle 3. předpokladu definice míry úseček.
Úsečka CP_2 je totiž grafickým součtem úseček CP_1 a P_1P_2 (což stručně zapisujeme $CP_2 = CP_1 + P_1P_2$) a tedy podle 3. předpokladu délka grafického součtu $CP_1 + P_1P_2$ úseček CP_1, P_1P_2 se rovná součtu délek těchto úseček, tj.
$|CP_1 + P_1P_2| = |CP_1|+|P_1P_2|$ a protože $|CP_1|=1$ a $|P_1P_2|=1$, tak
$|CP_1 + P_1P_2| = 1+1 = 2$.

Obdobně pokračujte dále: přeneste úsečku AB na polopřímku $\leftarrow P_2C$
(tj.na opačnou polopřímku k polopřímce $\rightarrow P_2C$ *)*:

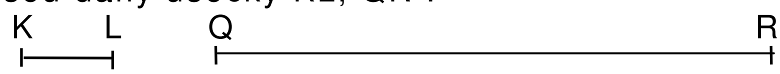
Tímto přenesením je úsečka P_2P_3 . *(V tomto daném případě náhodou splývá bod* P_3 *s bodem* D , *v jiném případě tomu tak nemusí být).*

Podobným způsobem jako v předcházejících krocích postupu ověříme, že $|P_2P_3|=1$, protože $P_2P_3 \cong AB$ a zjistíme, že nakonec platí:
$|CD| = |CP_2 + P_2P_3| = |CP_2| + |P_2P_3| = 2 + 1 = 3$.
Máme tedy ověřeno, že $|CD| = 3$ *(délka úsečky* CD *se rovná* třem*, čili úsečka* CD *má délku* tři *)* .

Řešte podobnou úlohu:

Úloha :

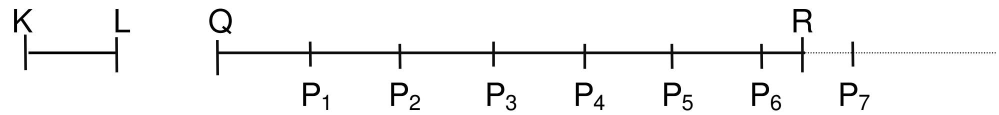
Jsou dány úsečky KL, QR :



Určete délku úsečky QR, jestliže délka úsečky KL se rovná číslu 1.

Řešení:

Použijte obdobného postupu jako při řešení předcházející úlohy.
Několikerým nanesením úsečky KL získáte tento výsledek:



V textu této úlohy je dáno, že $|KL|=1$. Tím je splněn 1. předpoklad z definice míry úseček.

Podle 2. předpokladu definice míry úseček platí :

$|QP_1|=1$, protože $QP_1 \cong KL$,
$|P_1P_2|=1$, protože $P_1P_2 \cong KL$,
$|P_2P_3|=1$, protože $P_2P_3 \cong KL$
atd. .... až
$|P_6P_7|=1$, protože $P_6P_7 \cong KL$.

Podle 3.předpokladu definice míry úseček platí, že

$|QP_2| = |QP_1| + |P_1P_2| = 1+1 = 2$, protože úsečka QP_2 je grafickým součtem úseček QP_1 a P_1P_2 a protože $|QP_1| = 1$ a $|P_1P_2| = 1$.
Podobně opět podle 3. předpokladu definice míry úseček platí, že
$|QP_3| = |QP_2| + |P_2P_3| = 2+1 = 3$,
$|QP_4| = |QP_3| + |P_3P_4| = 3+1 = 4$ atd. až podobně zjistíte, že
$|QP_6| = 6$ a $|QP_7| = 7$.

Protože bod R leží mezi body P_6 , P_7 , platí pro délku úsečky QR tyto nerovnosti:

$\boxed{|QP_6| \leq |QR| \leq |QP_7|}$ čili $\boxed{6 \leq |QR| \leq 7}$.

Tím se nám podařilo přibližně vyjádřit délku úsečky QR .

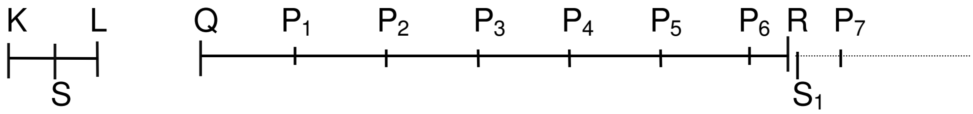
Didaktická poznámka :

Až potud lze uvedený postup v patřičné didaktické úpravě použít, chceme-li žáky 1.st.ZŠ vést při objevování principu měření úseček a nechceme-li se spokojit pouze s jejich „zaučením“, jak se měří úsečky pomocí měřítka.

Dokud žáci znají pouze přirozená čísla a neznají racionální čísla, rozhodnou o přibližném vyjádření délky úsečky v uvedeném případě úsečky QR podle toho, ke kterému z bodů P_6 , P_7 je bod R „blíže“: v našem případě je úsečka RP_6 menší než úsečka RP_7 , bod R je tedy „blíže“ k bodu P_6 . Proto žáci zapíší výsledek měření takto: $|QR| = 6$ (délka úsečky QR se přibližně rovná číslu 6).

Technická poznámka:
Zápis pomocí nerovností $6 \leq |QR| \leq 7$ lze nahradit rovnocenným zápisem
$$|QR| = 6{,}5 \pm 0{,}5 .$$

Vzniká otázka, jak určit délku dané úsečky s větší přesností.
K tomu účelu rozdělíme úsečku, jejíž délka se v dané míře rovná číslu 1 (tzv. jednotkovou úsečku) na určitý počet navzájem shodných dílů. Počet těchto dílů není rozhodující, pro pochopení principu např. postačí, rozdělíme-li naši jednotkovou úsečku na dva shodné díly:



Střed úsečky KL jsme označili S .

(*Další úvahy sledujte důsledně podle obrázku.*)

Délka úsečky KS se zřejmě rovná jedné polovině, tj. $|KS| = 0{,}5$.

Zdůvodnění:
Jestliže $|KS| = 0{,}5$, pak také $|SL| = 0{,}5$ a to podle 2. předpokladu definice míry úseček, neboť $KS \cong SL$ (bod S je středem úsečky KL).
Úsečka KL je grafickým součtem úseček KS a SL , tj.platí, že
KS = KS + SL a proto (podle 3. předpokladu definice míry úseček) platí, že $|KL| = |KS| + |SL| = 0{,}5 + 0{,}5 = 1$, což je v souhlase s tím, co je dáno, totiž že $|KL| = 1$. Tím jsme ověřili, že $|KS| = 0{,}5$.
Protože S_1 je střed úsečky P_6P_7 , platí, že $|P_6S_1| = 0{,}5$ a proto také platí, že $|QS_1| = 6{,}5$.

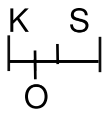
Důsledkem toho, že bod R leží mezi body P_6 a S_1 je, že

$|QP_6| \leq |QR| \leq |QS_1|$ čili $6 \leq |QR| \leq 6{,}5$

nebo též $|QR| = 6{,}25 \pm 0{,}25$.

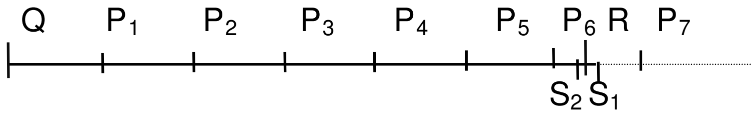
Proveďte srovnání s předcházejícím výsledkem. Shledáte, že tento nový výsledek je přesnější.

Pro dosažení ještě větší přesnosti rozdělte úsečku KS na dva shodné díly, střed úsečky KS označte např. O .



Je zřejmé, že $|KO| = 0{,}25$.

Rovněž „rozpůlíme“ úsečku P_6S_1 (ze dvou úseček P_6S_1 a S_1P_7 k tomu vybereme právě tu, v níž leží bod R). Střed úsečky P_6S_1 označte např. S_2 :



Platí: $|P_6S_2| = 0{,}25$, $|QS_2| = 6{,}25$ a tedy :

$|QS_2| \leq |QR| \leq |QS_1|$ čili $6{,}25 \leq |QR| \leq 6{,}5$

nebo též $|QR| = 6{,}375 \pm 0{,}125$.

Shrňme výsledky měření (zjišťování délky) dané úsečky QR :

$$6 \leq |QR| \leq 7$$
$$6 \leq |QR| \leq 6{,}5$$
$$6{,}25 \leq |QR| \leq 6{,}5$$

apod.

V tomto postupu určování stále přesnějšího vyjádření délky dané úsečky je možno pokračovat (*v teoretických úvahách neomezeně, při praktické činnosti je postup omezen rozlišovací schopností zjišťovatele s ohledem na přesnost rýsování*).

V různých případech úseček mohou nastat dvě možnosti:

1. po provedení některého kroku tohoto postupu krajní bod měřené úsečky (*v našem případě bod* R) splyne s některým z bodů S_1 , S_2 , S_3 atd. (*v našem případě se to zatím nestalo, bod* R *nesplynul ani s bodem* S_1 *ani s bodem* S_2) , tuto možnost lze stručně zapsat takto: $(\exists n \in N)\ Q = S_n$,
2. po provedení libovolného počtu kroků uvedeného postupu krajní bod měřené úsečky (*v našem případě bod* R) nesplyne s žádným z bodů S_1 , S_2 , S_3 atd., tuto možnost lze stručně zapsat takto: $(\forall n \in N)\ Q \neq S_n$.

Ve druhém případě (např. v našem případě z druhé úlohy) si povšimněte, že
- čísla v posloupnosti tzv. „dolních mezí“ se nezmenšují a
- čísla v posloupnosti tzv. „horních mezí“ se nezvětšují a

tedy se zřejmě „blíží“ ke stejnému reálnému číslu.

Odborně řečeno: **posloupnost dolních mezí a posloupnost horních mezí mají společnou limitu. A tato limita (tj. určité reálné číslo) je délka měřené úsečky.**

Můžeme vypočítat přesnost, s jakou se nám podařilo po jednotlivých krocích postupu vyjádřit délku měřené úsečky.
Učiňme tak podle zápisů z našeho příkladu postupného určování délky úsečky QR :

Zápis $6 \leq |QR| \leq 7$ nahradíme zápisem $|QR| = 6{,}5 \pm 0{,}5$.

V něm číslo 0,5 je tzv. absolutní nepřesnost. Významnější než absolutní nepřesnost je však **relativní nepřesnost**, to je poměr absolutní nepřesnosti ke střední aproximaci (v našem případě k číslu 6,5), tedy

- relativní nepřesnost **na počátku měření** se rovná podílu 0,5 : 6,5 , tj. přibližně 0,076923 ; vyjádřeno v procentech přibližně **7,6923 %** .
- Výpočet relativní nepřesnosti po **prvním** zpřesňujícím kroku:
  $6 \leq |QR| \leq 6{,}5$ $|QR| = 6{,}25 \pm 0{,}25$
  relativní nepřesnost je 0,25 : 6,25 , tedy 0,04 , tj. **4%** .
- Výpočet relativní nepřesnosti po **druhém** zpřesňujícím kroku:
  $6{,}25 \leq |QR| \leq 6{,}5$ $|QR| = 6{,}375 \pm 0{,}125$
  relativní nepřesnost je 0,125 : 6,375 , tedy přibližně 0,0196 , tj. **1,96 %** .

Z posloupnosti relativních nepřesnodtí 7,6923 ; 4 ; 1,96 ; … je evidentní, jak se po každém kroku snižuje relativní nepřesnost, tj., jak **se zvyšuje relativní přesnost při měření délky úsečky**.

ÚLOHY O MĚŘENÍ ÚSEČEK :

Při řešení 1. až 12. úlohy

a) zapište délku měřené úsečky užitím nerovností pomocí horních a dolních mezí
b) proveďte postupně alespoň dvě zpřesnění
c) vyjádřete v procentech příslušné relativní nepřesnosti

1. Narýsujte pravý úhel, jeho vrchol označte L . Zvolte na jednom rameni bod G, na druhém bod H .
   Zvolte bod C tak, aby G byl mezi body L, C a bod E tak, aby H byl mezi body L, E .
   Za předpokladu, že $|GH|=1$ určete $|EC|$.
   (Výsledek závisí na volbě bodů H, G, E a C .)
2. Pravoúhlý trojúhelník je dán tak, že délky jeho odvěsen jsou v poměru 2 : 3 .
   Nechť délka kratší odvěsny se rovná číslu 1 .
   Určete délku přepony tak, aby relativní nepřesnost byla menší než 5 % .
   Řešení :
   Označme: vrchol pravého úhlu C, kratší ze dvou odvěsen CA, přeponu CB .
   Nanášením jednotkové úsečky CA na $\rightarrow$AB zjistíme, že platí :
   $1 \leq |AB| \leq 2$ čili $|AB| = 1{,}5 \pm 0{,}5$, relativní nepřesnost …….33,3 %
   $1{,}5 \leq |AB| \leq 2$ čili $|AB| = 1{,}75 \pm 0{,}25$, relativní nepřesnost ……. 14,2 %
   $1{,}75 \leq |AB| \leq 2$ čili $|AB| = 1{,}875 \pm 0{,}125$, relativní nepřesnost … 6,7 %
   zatím je relativní nepřesnost přibližně rovna 6,7 %, tedy větší než 5 %, provedeme tedy ještě další zpřesnění:
   $1{,}75 \leq |AB| \leq 1{,}875$ čili $|AB| = 1{,}8125 \pm 0{,}0625$, relativní nepřesnost …3,45 %.

Výsledek :
s relativní nepřesností menší než 5% jsme změřili, že délka přepony je větší než 1,75 a menší než 1,875 stanovené jednotky.

3. Jsou dány body P=[0;2], Q=[2;3], L=[1;0], M=[6;2,5] .
   Určete délku úsečky LM, jestliže délka úsečky PQ se rovná číslu 1.
   Výsledek :
   $2 \leq |LM| \leq 3$; $2,5 \leq |LM| \leq 2,5$ tedy $|LM| = 2,5$
4. Jsou dány body A=[1;2], B=[3;3], C=[2;0], D=[7;3] .
   Určete |CD| , jestliže |AB| = 1 .
5. Jsou dány body A=[1;3], B=[3;4], C=[1;0], D=[6;3] .
   Určete |CD| , jestliže |AB| = 1 .
6. Zvolte body A, B, C tak, aby platilo, že AB ≅ BC a BC ≅ CA .
   Střed úsečky BC označte S .
   Sestrojte bod M tak, aby platilo, že M ∈ ← SA a SM = 4 AS .
   Narýsujte úsečku GL tak, aby byla shodná s úsečkou AM .
   Určete |GL|, jestliže |AB|=1
7. Jsou dány body K=[2;4], L=[4;5], R=[1;3], M=[6;1] .
   Určete délku úsečky RM, jestliže délka úsečky KL se rovná číslu 1 .
8. Jsou dány body R=[2;4], T=[4;3], C=[0;4], D=[4;0] .
   Určete délku úsečky RT, jestliže délka úsečky CD se rovná číslu 1 .
9. Jsou dány body G=[0;2], H=[2;4], K=[2;0], L=[7;5] .
   Určete délku úsečky KL, jestliže délka úsečky GH se rovná číslu 1 .
10. Jsou dány body A=[–2;0], B=[2;–4], F=[–1;7], J=[6;0] .
    Určete délku úsečky FJ, jestliže |AB| = 1.
11. Zvolte dva navzájem různé body M, P .
    a) Sestrojte úsečku KL tak, aby |KL| = 2,5 , když |MP| = 1
    b) Sestrojte úsečku RT tak, aby |RT| = 1,75 , když |MP| = 1
    c) Sestrojte úsečku UV tak, aby |UV| = 0,625 , když |MP| = 1
12. Zvolte dva navzájem různé body G, H .
    Sestrojte úsečku
    a) AB tak, aby |AB| = 1 , když |GH| = 2
    b) CD tak, aby |CD| = 1 , když |GH| = 1,5
    c) EF tak, aby |EF| = 1 , když |GH| = 0,75

Míra obrazců, obsah obrazce

Existují rovinné útvary, které nejsou měřitelné (např. polorovina, vnějšek kruhu atd., atd.).

Měřitelný útvar je útvar, který lze získat z konečného počtu tzv. základních měřitelných útvarů pomocí množinových operací.

Základní měřitelný útvar v rovině je rovinný útvar, který je a) omezený, b) jehož hranicí je jednoduchá uzavřená křivka, c) je spojitý .

Měřitelný útvar v rovině budeme nazývat **obrazec**.

Zobrazení množiny všech rovinných obrazců na množinu všech nezáporných reálných čísel se nazývá **míra obrazců** a číslo, které je v tomto zobrazení přiřazeno obrazci O, se nazývá **obsah obrazce O** [obsah obrazce O se zapisuje $\mathcal{S}(O)$], právě když platí, že

1. $(\exists O)\ \ \mathcal{S}(O) = 1$

   slovy: existuje obrazec, jehož obsahem je číslo jedna
   nebo: existuje obrazec, který má obsah 1
   nebo: zvolený obrazec (obvykle to bývá čtverec) má obsah 1

2. $(\forall O_1, O_2)\ \ O_1 \cong O_2 \ \Rightarrow\ \mathcal{S}(O_1) = \mathcal{S}(O_2)$

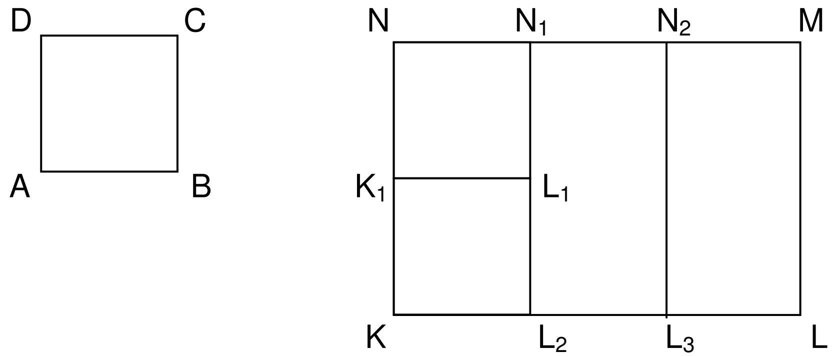
   slovy: jestliže dva obrazce jsou navzájem shodné, pak jejich obsahy jsou si rovny
   nebo: obsahy dvou shodných obrazců jsou si rovny

3. $(\forall O_1, O_2)\ \ O_1, O_2$ se nepřekrývají $\Rightarrow \mathcal{S}(O_1 \cup O_2) = \mathcal{S}(O_1) + \mathcal{S}(O_2)$

   slovy: jestliže se obrazce nepřekrývají, pak obsah jejich sjednocení se rovná součtu jejich obsahů
   nebo: obsah sjednocení nepřekrývajících se obrazců se rovná součtu jejich obsahů

ÚLOHA :

Je dán čtverec ABCD a obdélník KLMN (viz obrázek) :



Zdůvodněte podle teorie míry, že obsah obdélníka KLMN je roven číslu 6 , jestliže se obsah čtverce ABCD rovná číslu 1 (říkejme mu „jednotkový čtverec“) .

ŘEŠENÍ :

1. Je splněna podmínka č.1 z definice míry obrazců, totiž že existuje obrazec o obsahu 1 (je to čtverec ABCD).

   Snažme se obdélník KLMN „pokrýt“ čtverci shodnými se čtvercem ABCD (viz obrázek na další stránce) .

2. Čtverec $K_1L_1N_1N$ je shodný se čtvercem ABCD a tedy podle podmínky č.2 z definice míry obrazců má obsah rovný číslu 1 .
   Rovněž čtverec $KL_2L_1K_1$ má obsah 1 , protože je shodný se čtvercem ABCD.

3. Protože čtverce $K_1L_1N_1N$ a $KL_2L_1K_1$ se nepřekrývají a jejich sjednocením je obdélník KL_2N_1N , tak podle podmínky č.3 (opět z definice míry obrazců) je obsah obdélníka KL_2N_1N roven součtu obsahů obou čtverců (1+1) a tedy číslu 2 .

   Obdobně zdůvodníme, že každý z obdélníků $L_2L_3N_2N_1$, L_3LMN_2 má obsah 2 (každý z nich je totiž shodný s obdélníkem KL_2N_1N) a protože se nepřekrývají, je obsah jejich sjednocení, tedy obsah obdélníka KLMN roven součtu jejich obsahů (2+2+2, tj. 3·2) a to je číslo 6 .

Z uvedeného rozboru vyplývá, že když délkou strany jednotkového čtverce je číslo 1 , (jednotka délky), pak obsah obdélníka se rovná součinu délek dvou jeho sousedních stran.

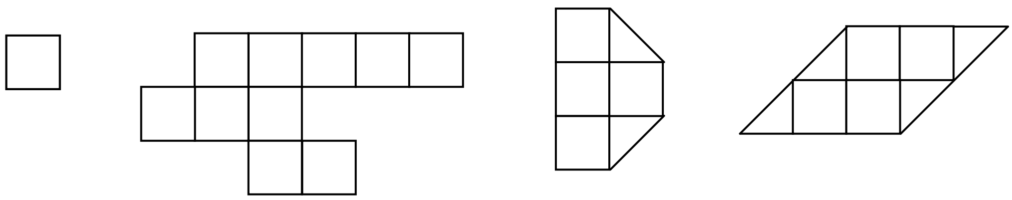
Didaktické poznámky:

Je zřejmé, že rozbor v té podobě, jak byl právě uveden, je určen pro vzdělání učitele, aby si promyslel a uvědomil teoretickou podstatu problému. Poznání podstaty má učiteli posloužit k tomu, aby propracoval k výuce o obsazích obrazců vhodný konkrétní postup a využil při výuce samostatnou a tvořivou práci žáků.

Je třeba, aby při zavádění obsahu obrazce již na prvním stupni základní školy byla ze zásady uplatněna právě uvedená **idea pokrývání měřeného obrazce jednotkovými čtverci.** Někteří didaktikové dokonce pro větší názornost doporučují, aby žáci měli k disposici sadu z papíru vystříhaných destiček – jednotkových čtverců (a to nejen např. cm^2) a snažili se jimi pokrýt měřený obrazec. Zásadní a pro další správné rozvíjení této látky významný je pro žáky poznatek, že počet jednotkových čtverců, které „pokrývají“ měřený obrazec, ale žádné dva se nepřekrývají navzájem, že tento počet je obsah obrazce.

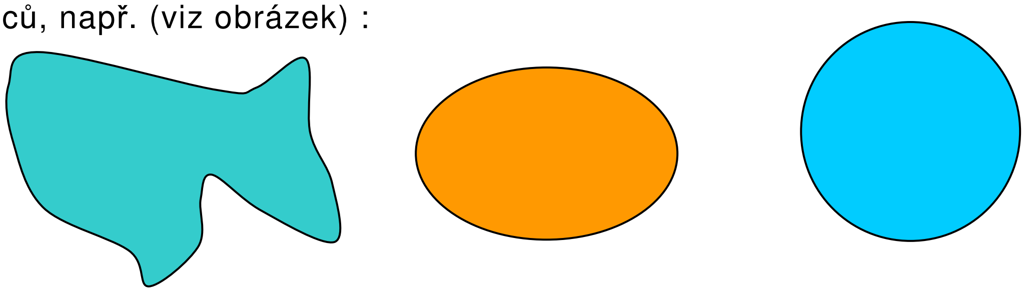
Rozhodně by se zavádění obsahu obdélníka nemělo omezovat jen na pouhé verbální, povrchní, hlouběji nepodložené oznámení, že „obsah obdélníka se vypočítá jako součin délek jeho sousedních stran, P = a·b “.

Užití metody pokrývání vytváří vhodné a správné představy žáků a spolehlivý základ pro rozšiřování učiva na zjišťování obsahů některých dalších obrazců, nejen obdélníků. Již na prvním stupni je pak možné, aby žáci zjišťovali sami a tvořivě obsahy nejrůznějších obrazců, které se skládají z jednotkových čtverců nebo jejich částí, např. :



Také odvozování vzorců na tomto základě pro obsahy trojúhelníků, lichoběžníků, kosodélníků i mnohoúhelníků je pak přirozené, lépe pochopitelné a také snadněji a trvaleji zapamatovatelné.

V naší teorii uveďme ještě, jak lze aplikovat uvedenou ideu „pokrývání měřeného obrazce jednotkovými čtverci“ při zjišťování obsahů jakýchkoli obrazců, např. (viz obrázek) :



Je vhodné použít čtvercovou síť, nejmenší čtverec v této síti se nazývá **základní čtverec sítě** .
Použijeme čtvercovou síť, v níž základním čtvercem je čtverec o obsahu 1 (jednotkový čtverec).

1. Vymezíme v této síti tzv. jádro obrazce:
   Jádro obrazce v dané čtvercové síti je sjednocení všech základních čtverců sítě, z nichž každý je podmnožinou obrazce.

Je zřejmé, že
a) obsah jádra lze přesně určit, rovná se počtu základních čtverců sítě, jejichž je sjednocením (z nichž se skládá)
b) obsah jádra daného obrazce není větší číslo než obsah měřeného obrazce (který chceme zjistit ale zatím ho neznáme)

2. Dále vymezíme tzv. obal obrazce:
   Obal obrazce v dané čtvercové síti je sjednocení všech základních čtverců sítě, z nichž každý obsahuje aspoň jeden vnitřní bod obrazce.

Platí, že
a) obsah obalu lze rovněž přesně určit
b) obsah obalu není určitě menší číslo než obsah měřeného obrazce

Výsledky obou zjištění zapíšeme pomocí nerovností:

$$\text{obsah jádra} \leq \text{obsah měřeného obrazce} \leq \text{obsah obalu}$$

Tím se nám podaří zjistit obsah daného obrazce **s určitou přesností** .

Přesnějších výsledků pak dosáhneme pomocí tzv. **zjemnění sítě** .

Vyhodnocení přesnosti zjištění provedeme obdobným způsobem jako u zjišťování délky úsečky.

ÚLOHY O MĚŘENÍ OBSAHŮ OBRAZCŮ :

1. Jsou dány body S=[2;1], B=[2;6]. Narýsujte kružnici se středem S a poloměrem SB.
   Určete obsah čtvrtiny kruhu o středu S a poloměru SB pomocí jader a obalů (proveďte aspoň jedno zpřesnění, oba výsledky zapište pomocí nerovností a v obou případech vypočítejte relativní nepřesnosti).

2. Jsou dány body A=[0;0], B=[5;0], C=[5;2], D=[3;5], E=[2;5], F=[0;3].
   a) Zakreslete šestiúhelník ABCDEF .
   b) Pomocí jader a obalů zpřesňujte zjišťování obsahu šestiúhelníka ABCDEF. Použijte jedno zjemnění sítě. Oba výsledky zapište pomocí nerovností a v obou případech vypočítejte relativní nepřesnosti.
   c) Vypočítejte přesně obsah šestiúhelníka ABCDEF.
3. Jsou dány body Q=[1;1], R=[6;1], S=[3;5], T=[1;5] .
   Zjistěte obsah pravoúhlého lichoběžníka QRST .
4. Jsou dány body A=[1;1], B=[5;1], C=[5;3], D=[1;3], S=[3;3] .
   Obrazec **O** je sjednocením obdélníka ABCD a kruhu se středem S a poloměrem SC .
   Zjistěte obsah obrazce **O** dvěma způsoby:
   - přesně

- zpřesňováním až k dosažení relativní nepřesnosti menší než 25 % .

5. Jsou dány body A=[1;1], B=[2;1], C=[2;2], D=[1;2] a dále body E=[3;1], F=[6;1], G=[6;2], H=[8;2], J=[8;3], K=[5;3], L=[5;5], M=[3;5] .
   a) Určete délku obvodu osmiúhelníka EFGHJKLM , jestliže |AB| = 1 .
   b) Určete obsah osmiúhelníka EFGHJKLM , jestliže obsah čtverce ABCD se rovná jedné.
6. Jsou dány body N=[0;1], O=[4;1], R=[6;4], T=[2;4] .
   Zjistěte obsah kosodélníka NORT .
7. Jsou dány body A=[0;0], B=[6;0], C=[5;5], D=[3;2], E=[1;4] .
   Zjistěte obsah pětiúhelníka ABCDE alespoň jedním ze dvou způsobů:
   - přesně
   - pomocí jader a obalů až k dosažení relativní nepřesnosti menší než 25 % .
8. Jsou dány body A=[0;2], B=[4;0], C=[5;3], D=[3;4] .
   Zjistěte obsah čtyřúhelníka ABCD alespoň jedním ze dvou způsobů:
   - přesně
   - pomocí jader a obalů pomocí jednoho zjemnění sítě .
9. Jsou dány body A=[5;0], B=[6;2], C=[3;6], D=[0;3], E=[0;2] .
   Pomocí jader a obalů zpřesňujte zjišťování obsahu pětiúhelníka ABCDE.
   (*Použijte jedno zjemnění sítě.*)
10. Jsou dány body A=[0;0], B=[5;0], C=[5;2], D=[3;5], E=[2;5], F=[0;3].
    Zjistěte přesně obsah šestiúhelníka ABCDEF .
11. Jsou dány body Q=[1;1], R=[6;1], S=[3;5], T=[1;5] .
    Zjistěte obsah pravoúhlého lichoběžníka QRST .
12. Jsou dány body A=[1;1], B=[5;1], C=[5;3], D=[1;3], S=[3;3] .
    Obrazec **O** je sjednocením obdélníka ABCD a kruhu se středem S a poloměrem SC .
    a) Zakreslete obrazec **O** .
    b) Pomocí jader a obalů zpřesňujte zjišťování obsahu obrazce **O** (*použijte jedno zjemnění sítě*).
13. Jsou dány body A=[1;1], B=[2;1], C=[2;2], D=[1;2] a dále body E=[3;1], F=[6;1], G=[6;2], H=[8;2], J=[8;3], K=[5;3], L=[5;5], M=[3;5] .
    a) Určete délku obvodu osmiúhelníka EFGHJKLM , jestliže |AB| = 1.
    b) Určete obsah osmiúhelníka EFGHJKLM , jestliže obsah čtverce ABCD se rovná jedné.
14. Jsou dány body A=[0;0], B=[6;0], C=[5;5], D=[3;2], E=[1;4] .
    Zjistěte obsah pětiúhelníka ABCDE alespoň jedním ze dvou způsobů:
    - přesně
    - pomocí jader a obalů až k dosažení relativní nepřesnosti menší než 25 %.
15. Jsou dány body A=[0;0], B=[6;0], C=[5;5], D=[3;2], E=[1;4] .
    Zjistěte obsah pětiúhelníka ABCDE alespoň jedním ze dvou způsobů:
    - přesně
    - pomocí jader a obalů až k dosažení relativní nepřesnosti menší než 25 % .
16. Jsou dány body A=[5;0], B=[6;2], C=[3;6], D=[0;3], E=[0;2] .
    Pomocí jader a obalů zpřesňujte zjišťování obsahu pětiúhelníka ABCDE.
    (*Použijte jedno zjemnění sítě.*)

17. Uveďte a zdůvodněte vzorce pro výpočet obsahu těchto rovinných obrazců : trojúhelník, pravoúhlý trojúhelník, rovnoramenný trojúhelník, rovnostranný trojúhelník, kosodélník, kosočtverec, deltoid.

Míra těles, objem tělesa

Obdobně jako v rovině existují i prostorové útvary, které nejsou měřitelné (např. poloprostor, vnějšek koule atd., atd.).

Prostorový útvar je měřitelný, právě když je omezený, jeho hranicí je topologický obraz kulové plochy a je spojitý.

Měřitelný útvar v prostoru budeme nazývat **těleso**.

Zobrazení množiny všech těles na množinu všech nezáporných reálných čísel se nazývá **míra těles** a číslo, které je v tomto zobrazení přiřazeno tělesu T, se nazývá **objem tělesa T** [objem tělesa T se zapisuje $V(T)$], právě když platí, že

1. $(\exists T)\ V(T) = 1$
   slovy: existuje těleso, jehož objem se rovná číslu jedna
   nebo: existuje těleso, které má objem 1
   nebo: zvolené těleso má objem 1 (obvykle to bývá krychle a to taková krychle, že její hrana má v délkové míře délku jedna)
2. $(\forall T_1, T_2)\ T_1 \cong T_2 \Rightarrow V(T_1) = V(T_2)$
   slovy: jestliže dvě tělesa jsou navzájem shodná, pak jejich objemy jsou si rovny
   nebo: objemy dvou shodných těles jsou si rovny
3. $(\forall T_1, T_2)$ jestliže T_1, T_2 se nepřekrývají $\Rightarrow V(T_1 \cup T_2) = V(T_1) + V(T_2)$
   slovy: jestliže se tělesa nepřekrývají, pak objem jejich sjednocení se rovná součtu jejich objemů
   nebo: objem sjednocení nepřekrývajících se těles se rovná součtu jejich objemů

Míra úhlů, velikost úhlu

Zobrazení množiny všech úhlů do množiny všech nezáporných reálných čísel se nazývá **míra úhlů** a číslo, které je v tomto zobrazení přiřazeno úhlu α, se nazývá **velikost úhlu α** [velikost úhlu α se zapisuje $v(\alpha)$] , právě když platí, že

1. $(\exists \alpha)\ v(\alpha) = 1$
   slovy: existuje úhel, jehož velikost se rovná číslu jedna
   nebo: existuje úhel, který má velikost 1
   nebo: zvolený úhel má velikost 1
2. $(\forall \alpha, \beta)\ \alpha \cong \beta \Rightarrow v(\alpha) = v(\beta)$
   slovy: jestliže dva úhly jsou navzájem shodné, pak jejich velikosti jsou si rovny
   nebo: velikosti dvou navzájem shodných úhlů jsou si rovny
3. $(\forall \alpha, \beta)\ v(\alpha+\beta) = v(\alpha) + v(\beta)$
   slovy: velikost grafického součtu dvou úhlů se rovná součtu velikostí těchto úhlů

Příloha. **Axiomy eukleidovské geometrie**
podle Hilbertova zpracování

Německý matematik David Hilbert vypracoval a v r.1899 vydal článek Grundlagen der Geometrie, v němž systematicky vybudoval teorii tzv. eukleidovské geometrie, tj. geometrie, jejíž základy vytvořil Eukleides ve 3. století před naším letopočtem.

Axiomy incidence se týkají
– vztahu mezi bodem a přímkou, který vyjadřujeme různými způsoby:
„bod leží na přímce“, „přímka prochází bodem“, „bod náleží přímce“, „přímka obsahuje bod“, „bod a přímka spolu incidují“,
– vztahu mezi bodem a rovinou, který obvykle vyjadřujeme takto:
„bod leží v rovině“, „rovina prochází bodem“, „bod náleží rovině“, „rovina obsahuje bod“, „bod a rovina spolu incidují“:

I 1	Každými dvěma různými body prochází právě jedna přímka.
I 2	Na každé přímce leží aspoň dva různé body.
I 3	Existují tři body, které neleží v přímce (říkáme, že tyto body nejsou kolineární).
I 4	Každými třemi body, které neleží v přímce, prochází právě jedna rovina.
I 5	Jestliže dva různé body přímky p leží v rovině σ, pak všechny body přímky p leží v rovině σ .
I 6	Jestliže dvě roviny obsahují společný bod, pak obsahují ještě aspoň jeden další bod.
I 7	Existují čtyři body, které neleží v rovině (říkáme, že tyto body nejsou komplanární).

Pomocí axiomů incidence jsou zavedeny tyto (tzv.axiomatické) pojmy:
bod, přímka, rovina, bod inciduje s přímkou, bod inciduje s rovinou.

Axiomy uspořádání se týkají vztahu „mezi“:
říkáme např., že „bod C leží mezi body A,B“, zápis: C μ A,B
(jedná se o ternární neboli trojčlennou relaci v množině všech bodů):

U 1	Pro každé tři body A,B,C platí: jestliže C μ A,B , pak body A,B,C jsou kolineární, každé dva z nich jsou navzájem různé a platí, že C μ B,A .
U 2	Ke každým dvěma navzájem různým bodům A,B existuje takový bod C , že B μ A,C .
U 3	Z každých tří navzájem různých bodů nejvýše jeden leží mezi ostatními dvěma.
U 4	*Paschův axiom*: Pro každé tři nekolineární body A,B,C a pro každou přímku p , která neprochází žádným z nich, platí: existuje-li bod D přímky p takový, že D μ A,B , pak existuje bod E přímky p , že E μ B,C nebo existuje bod F přímky p , že F μ A,C .

Poznámka k axiomu U 3 : platí, že z každých tří navzájem různých bodů právě jeden leží mezi ostatními dvěma.

Poznámka k axiomu U 4 : dá se dokázat, že existuje právě jeden z bodů E,F, uvedený v axiomu .

Axiomy shodnosti týkají se shodnosti úseček :

říkáme, že úsečka AB je shodná s úsečkou CD, zápis: $AB \cong CD$.
Před zavedením axiomů **S** je třeba definovat pojmy: úsečka, polopřímka.

S 1	Pro každé dva body platí, že $AB \cong BA$.
S 2	Pro každou úsečku AB a pro každou polopřímku $\rightarrow CD$ existuje právě jeden bod L polopřímky $\rightarrow CD$ takový, že $CL \cong AB$.
S 3	Pro každé tři úsečky AB, CD, EF platí: $AB \cong CD \wedge CD \cong EF \Rightarrow AB \cong EF$.
S 4	Pro každé dvě trojice bodů A,B,C a A',B',C' platí : $C \,\mu\, A,B \wedge C' \,\mu\, A',B' \wedge AC \cong A'C' \wedge BC \cong B'C' \Rightarrow AB \cong A'B'$.
S 5	Pro každé dvě trojice nekolineárních bodů A,B,C a A', B', O platí : jestliže $AB \cong A'B'$, pak existuje právě jeden bod C' takový, že $C' \in \rightarrow A'B'O \wedge BC \cong B'C' \wedge AC \cong A'C'$.
S 6	Pro každé dvě trojice nekolineárních bodů A,B,C a A',B',C' a pro každé dva body P, P' platí: $AB \cong A'B' \wedge BC \cong B'C' \wedge AC \cong A'C' \wedge \wedge P \,\mu\, A,B \wedge P' \,\mu\, A',B' \wedge AP \cong A'P' \Rightarrow CP \cong C'P'$ **.**

Pomocí axiomů shodnosti je zaveden axiomatický pojem: **shodnost úseček** .

Axiomy spojitosti

A . . . Archimedův axiom , **C** . . . Cantorův axiom
Pro zjednodušení formulace Archimedova axiomu je vhodné, aby byl dříve definován pojem „n-násobek úsečky“ a relace „ > “ v množině všech úseček.

A	Pro každé dvě úsečky AB, CD existuje takové přirozené číslo n , že platí: $n\,AB > CD$.

Před vyslovením Cantorova axiomu je vhodné zavést pojem „úsečky do sebe vnořené“.

C	Průnik všech úseček patřících množině úseček do sebe vnořených obsahuje alespoň jeden bod.

Axiom rovnoběžnosti

Před zavedením axiomu rovnoběžnosti je vhodné definovat pojem „rovnoběžnost přímek“.

R	Pro každý bod M a pro každou přímku p existuje nejvýše jedna přímka q, která prochází bodem M a je rovnoběžná s přímkou p . (Daným bodem prochází nejvýše jedna rovnoběžka s danou přímkou.)

Axiom rovnoběžnosti ani axiomy spojitosti nezavádějí žádný nový axiomatický pojem.

Axiom rovnoběžnosti má zvláštní význam:
- skupiny axiomů I,U,S,A,C,R (tj. včetně axiomu rovnoběžnosti) tvoří základ axiomatického systému **eukleidovské geometrie**,
- pokud axiom rovnoběžnosti není připojen k uvedeným skupinám axiomů I,U,S,A,C, je takovým axiomatickým systémem dána obecnější geometrie, než je geometrie eukleidovská, je to tzv. **absolutní geometrie** ,
- pokud je ke skupinám axiomů I,U,S,A,C připojena negace axiomu R , vzniká základ axiomatického systému tzv. **neeukleidovské geometrie**.