Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem
Pedagogická fakulta

Rozvoj matematického myšlení I

pro studium učitelství pro mateřské školy

Jan Melichar
Josef Svoboda

2003

O b s a h str.

Několik slov úvodem

Po úspěšné akreditaci bylo od školního roku 2002/2003 na Pedagogické fakultě Univerzity Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem otevřeno nové tříleté bakalářské studium oboru učitelství pro mateřské školy v kombinované formě studia. Do studijního programu byl zařazen předmět Rozvoj matematického myšlení a to do 3., 4. a 5. semestru.

Cílem pracovního semináře, kterému je věnováno ve 3. semestru 5 vyučovacích hodin je vysvětlit pojem matematické myšlení a ukázat rozvoj tohoto pojmu u dětí předškolního věku.Vysvětlit typy matematického myšlení, tj. logického myšlení založeného na pojmu výroku a funkčního myšlení založeného na pojmu proměnné. Studenti poznají induktivní myšlení a pojem intuice a seznámí se s intuitivním pojetím v matematice. Studenti se seznámí s teorií pojmotvorného procesu, poznají rozsah a obsah pojmu, pojmy rodové a druhové. Seznámí se s aritmetikou potřebnou pro názorné představy o vztazích, o přirozeném čísle a početních výkonech.

Vzhledem k malému počtu hodin, které jsou věnovány ve 3. semestru tomuto kurzu byl zpracován učební text, který si klade za cíl dát větší prostor aktivní činnosti studentů v pracovním semináři.

1. Myšlení

1.1. Pozorování a vnímání

Pozorování je metoda, při které vyčleňujeme, zachycujeme, utkvíme svými smysly a upevňujeme vlastnosti a vztahy jednotlivých objektů a vztahů okolního světa v našem vědomí.

Při pozorování studujeme objekty v jejich přirozených podmínkách a vlastnosti objektů v přirozených vztazích v jakých existují v daném objektu.Je třeba však odlišovat pozorování od prostého vnímání.

Vnímání nějakého objektu představuje proces bezprostředního odrazu tohoto objektu v našem vědomí prostřednictvím našich smyslů. Výsledkem je **vjem,** což je celistvý obraz předmětu. Vjem odráží vnější stránky předmětu.

1.2. Pojem

Pojem je jedna z forem vědeckého poznání odrážející v našem vědomí a později i v našem myšlení podstatné vlastnosti (znaky) zkoumaných objektů a vztahů.

V matematice se často pojem označuje nejen termínem (slovo nebo skupina slov) - názvem, ale i symbolem.

Pojmy slouží k tomu, abychom si navzájem rozuměli a o napsaném či vysloveném slovu měli v podstatných znacích stejný obraz. Když řekneme slovo „čtverec“, máme v našem vědomí obraz rovinného obrazce, který je ohraničen čtyřmi shodnými úsečkami s vnitřními úhly o velikosti 90 stupňů. Každý si však představujeme čtverec různé velikosti, možná, že i různé barvy. Podstatné vlastnosti (znaky) charakterizující čtverec jsou však stejné. Řeknu-li například „mladá dívka“, shodneme se na tom, že si představíme všichni určitě ženu, její věk, její vzhled má však každý ve své představě různý. Tento pojem je dosti vágní a svými vlastnosti není přesně identifikovatelný. V matematice udáváme takové vlastnosti (znaky), aby pojem byl identifikovatelný.
Každý pojem má určitý obsah a rozsah.

Obsah pojmu tvoří souhrn (množinu) všech vlastností (znaků), které jsou pro tento pojem charakteristické.

Příklad 1:

Obsahem pojmu „rovnoběžník“ je : a) rovnoběžník je rovinný obrazec, b) je ohraničen čtyřmi úsečkami, c) protilehlé strany jsou navzájem rovnoběžné, d) protilehlé strany jsou shodné, e) protilehlé úhly jsou shodné, e) úhlopříčky se vzájemně půlí, atd.

Uvedený příklad 1 ukazuje, že obsah pojmu je množina všech vlastností (znaků) pojmu, z nichž každý je nutný a všechny dohromady jsou postačující pro vymezení pojmu. Kdyby některá z vlastností uvedená v příkladu nebyla splněna, nebyl by útvar rovnoběžníkem.

V příkladu 1 šlo o objekt. Podívejme se na příklad vztahu.

Příklad 2:

Obsah pojmu „rovná se“ je: a)vztah dvou čísel, výrazů, úseček, atd,, který značí, že jisté množiny jsou ekvivalentní, b) vztah je reflexivní, c) vztah je symetrický, d) vztah je tranzitivní.

Poznámka: Teorie vztahů (relací) je součástí další části textu.

Rozsah pojmu tvoří množina všech objektů, které mají vlastnosti (znaky) stanovené jeho obsahem.

Příklad 3:

Rozsahem pojmu „rovnoběžník“ je kosoúhelník, obdélník, čtverec, kosočtverec, atd.

Rozšiřujeme-li obsah pojmu, zúží se jeho rozsah a obráceně.

Jestliže rozsah jednoho pojmu (P_1) je obsažen v rozsahu druhého pojmu (P_2) to znamená $r_{P1} \subset r_{P2}$, tak druhý pojem (P_2) je **rodem** (rodovým pojmem) vzhledem k pojmu (P_1) a první pojem (P_1) je **druhem** (druhovým pojmem) vzhledem k (P_2).

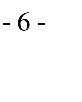
Příklad 4:

Pojem obdélník je druhovým pojmem pojmu rovnoběžník a rovnoběžník je rodový pojem pojmu obdélník.

S pojmy, samozřejmě i s matematickými se děti seznamují postupně a tyto pojmy se jim stávají jasnější, čím lépe poznávají jejich obsah a rozsah. Například dítěti ukazujeme různé obdélníky a říkáme jim toto je obdélník, toto je obdélník… Současně jim ukazujeme obrazce, které nejsou obdélníkem. Dítě si vytváří ve svém vědomí samo představu o obsahu pojmu obdélník. Při prvním vytváření pojmu zatím nepopisujeme základní vlastnosti (znaky) daného pojmu. Snažíme se, aby ve svém pozorování použilo co nejvíce smyslů. Dítě používá zrak, jde o tak zvanou vizualizaci. Pod pojem vizualizace zahrnujeme schopnost zrakového vnímání a pamatování si viděného i po delší době. Dítě používá sluch, kdy zrakový vjem je doprovázen slovním doprovodem. Je dobře když dítě používá i hmat. Obdélník může být vystřižen z tvrdého papíru nebo z umělé hmoty a dítě jej poznává se zavázanýma očima mezi jinými obrazci hmatem. Říká se, že poznané je to, co prošlo našimi smysly. Ve vyšším věku dítěte na však na vlastnosti (znaky) pojmu upozorňujeme. Poznání, kdy dítě samo si vytváří ve svém vědomí obsah a rozsah pojmu se nazývá **intuitivní.**

Žádáme na dítěti, aby nám načrtlo obdélník, aby nám ukázalo předměty kde se obdélník nachází, aby dovedlo v množství předložených modelů nalézt ten, který náleží do rozsahu pojmu obdélník. U geometrických pojmů je velkým problémem, že jde o pojmy abstraktní, které vlastně v realitě vůbec neexistují. Existují jenom jejich modely. Vždyť obdélník je součástí roviny a ta nemá žádnou „tloušťku“. Proto je vytváření pojmu v geometrii tak obtížné.

Též si musíme dát pozor na tak zvanou „falešnou představu“. Mnoho lidí i velmi vzdělaných Vám bude tvrdit, že tento obrazec



např. model dopravní značky hlavní silnice je kosočtverec, ale to není kosočtverec, je to čtverec, neboť má všechny vlastnosti (znaky) čtverce.

I při vytváření nematematických pojmů poznávací proces je intuitivní. Dítě jde s maminkou, po silnici cosi jede a maminka řekne: „To je auto!“ Pak zase něco jede a maminka řekne: „To je auto!“ Po určitém čase, když něco jede, dítě již samo řekne: „Mami, auto.“ Maminka však řekne: „To není auto, to je traktor.“ Dítě si ve svém vědomí upřesňuje obsah a rozsah pojmu. Brzy pozná nejen auto, ale i auta různých značek a typů. V dalším textu bude vysvětleno, co je to intuice.

Velkou chybou je, že se snažíme dětem pojem definovat, přesně jej popsat. V první fázi poznávacího procesu to není nutné. Uvedu příklad s pojmem rovnice. Místo, aby pani učitelka v 1. ročníku základní školy dětem uváděla různé zápisy a říkala jim: „To je rovnice“, „To není rovnice“ a ony samy mezi zápisy poznávaly rovnici, tak pani učitelka dětem definovala, že „Rovnice je zápis ve kterém je písmeno x“. Byl jsem přítomen uvedené hodině a tak jsem jedno dítě navedl, aby jako rovnici uvedlo zápis slova saxofon. Paní učitelka se svojí definicí nepochodila. Je vůbec těžké pojmy definovat. Zkuste například definovat obyčejný stůl.

Dítě, když si uvědomuje pojem stůl, tak si ve svém vědomí vydělí ze všech znaků, které mají stoly, jen ty podstatné a u všech stolů se vyskytující. Různé stoly mají různé vlastnosti (znaky) jako výšku, velikost, barvu, počet noh, materiál z kterého jsou vyrobeny. Podstatné a společné je, že stůl má desku a nohy (nebo nohu) na kterých stojí. Bez nich by to nebyl stůl. Zda je bílý nebo černý, čtvercový nebo kulatý, třínohý nebo čtyřnohý, zda má zásuvku to není podstatné. Při vyslovení slova „stůl“ všichni, kteří rozumíme česky víme o jaký objekt jde. Ve svém vědomí však při vyslovení slova „stůl“ máme určitě každý jinou představu.

Při vytváření pojmu je důležité přihlížet k tomu, aby v představách lidí bylo při uvedení pojmu, ať při vyslovení příslušného názvu či shlédnutí symbolu co nejvíce shodných znaků. V současné společnosti je to vidět na nejasnostech chápání pojmu demokracie, svoboda, privatizace, atp. Naší snahou je uvádět takové znaky a tolik znaků, aby pojem byl vymezen co nejpřesněji. Při pojmotvorném procesu je důležitá vlastní zkušenost. Například jinak si představuje pojem tužka ten, kdo je gramotný a jinak ten, kdo je negramotný. Ten kdo je gramotný v něm vidí nástroj na psaní, ten kdo je negramotný, nástroj, kterým je možno bodat. U dětí právě vytváření pojmů souvisí s vlastní zkušeností. Dětem ukazujeme určité objekty a současně vyslovujeme příslušné názvy, až dítě začne samo těchto názvů užívat, když se s danými objekty setká. Při vytváření pojmu může dojít i k omylu, např. podle určitých znaků zahrne dítě pod pojem automobil i třeba traktor. Může dojít i k falešným představám, například paní učitelka ukazovala obdélníky, které byly vždy modré. Pak ukázala červený obdélník a žák tvrdil, že to není obdélník, neboť není modrý. Považoval barvu za podstatný znak pojmu obdélník. Znaky pojmu je třeba upřesňovat a dětskou zkušenost vhodně usměrnit.

Jestliže rozsah pojmu je tvořen pouze jedním objektem, tak příslušný pojem se nazývá **individuální**.

Příklad 5:

Individuální pojmy: Střed Země, prázdná množina, Ludolfovo číslo π, atp.
Jestliže do rozsahu pojmu patří více než jeden objekt, říkáme, že příslušný pojem je **obecný**.

Příklad 6:

Obecnými pojmy jsou: obdélník, čtverec, trojúhelník, kružnice, bod, rovnice, rovnost, úloha, příklad, atp.

Individuální pojmy nesmíme zaměňovat s **konkrétními**, tj. takovými, které odrážejí konkrétní objekty a obecné pojmy s **abstraktními pojmy** tj. pojmy vzniklými jako objekt myšlení.

Příklad 7:
Model krychle (názorná pomůcka) – to je pojem obecný a konkrétní a krychle to je pojem obecný a abstraktní.

Pro matematiku jsou charakteristické právě abstraktní pojmy.

1. 3. Matematické myšlení

Informační systém umožňuje člověku získávat poznatky celkem jednoduchým způsobem, tj. přímým působením podnětu, kdy skutečnost sama prostřednictvím smyslových orgánů vstupuje jako obraz do vědomí. Vzniká-li však poznatek nepřímo prostřednictvím symbolu skutečna, který přímý podnět pouze nahrazuje, pak se jedná o složitější způsob poznání nazývaný myšlení. To, že pro myšlení může být spouštěcím signálem pouze vjem, představa či fantazie, není však podstatné. Důležitější je právě průběh směřující k získání poznatku. Jakmile tento proces už není pouhým příjmem informací, ale pozůstává v sestavě a kombinaci znaků, symbolů, jimiž mohou být např. slova, různé symboly (matematické, chemické, hudební), modely a další, za účelem dospět k závěru - úsudku, potom se jedná o myšlení.

Myšlení je tedy vyšší forma poznání, jeho základem je manipulace se symboly a nastupuje vždy ve vědomí člověka v případech, kdy nemůže řešit problémy a hledat odpověď na otázku přímou manipulací s podněty nebo kde by tento postup byl příliš zdlouhavý.

Běžné přemýšlení se děje hlavně pomocí slov. Nenese-li slovo bližší označení (jako např. náš stůl), nýbrž nahrazuje-li skutečnost v různých podobách (jakýkoliv stůl), pak musíme slovu přiznat obecný charakter - stává se pojmem. Pojmy potřebujeme také k tomu, abychom vlastním myšlením dospěli k soudu, jímž rozumíme uvedení dvou pojmů do vzájemného vztahu. Pokud ze soudu nebo několika soudů můžeme získat nový poznatek, pak jsme myšlením dospěli k úsudku.

Běžná myšlenková činnost nastává tehdy, když před člověkem vyvstane určitá otázka, úkol. Je-li úkol správně formulován, je člověk schopen nalézt odpověď, i když nebude přemýšlet s pomocí slov, ale třeba i s pomocí symbolů. Např. přemýšlením, matematickou symbolikou dovedeme určit, čemu se rovná 4+2.

Je přirozené, že myšlení je třeba se učit. Dokud nemá dítě rozvinutý informační a paměťový systém, nemůže získávat nové poznatky myšlením a musí se spokojit hlavně poznáváním přímým. Ani dospělý člověk není vždy schopen dokonale přemýšlet. Nemá-li jasné pojmy a dopouští-li se omylů při sestavování soudů do logického a platného vztahu, nemůže vymyslet platné a správné úsudky.

Myšlení vzniká a realizuje se v procesu kladení a řešení praktických i teoretických problémů. Myšlení se opírá o smyslovou zkušenost, avšak na rozdíl od smyslového odrazu jeho výsledky přepracovává, poskytuje možnost získávat poznatky o takových vlastnostech a vztazích předmětů, jež jsou bezprostřednímu smyslovému poznání nedostupné.

Úroveň myšlení zaručují **vlastnosti myšlení**: a) **kritičnost** myšlení – znamená pečlivě zvážit obsah pojmů, se kterými budeme operovat, kriticky posoudit, zda zvolený způsob řešení je nejvhodnější a umožní objektivní úsudek, b) **pružnost** myšlení- se projevuje snahou opustit při řešení úlohy neúčinnou realizaci a hledat nový způsob, zvláště při změně podmínek a nové situace, c) **šíře** myšlení – předpokládá na základě dostatečných informací vidět četnější možnosti řešení a případně i důsledky, které z nich vyplývají, d) **rychlost** myšlení – závisí na schopnosti vybrat pohotově ze zásoby paměťového systému údaje zajišťující správné a logické myšlení.

Proces myšlení se opírá o určité myšlenkové operace.

Matematické schopnosti lze chápat jako specifickou složku obecné inteligence. Tvoří je několik základních dílčích kompetencí: schopnost chápat čísla, paměť pro čísla, matematické dovednosti a matematické uvažování. Rozvoj matematických schopností závisí na vzájemné součinnosti mnoha dílčích funkcí. Pokud by některá z těchto složek byla narušena, může dojít ke vzniku specifické poruchy učení, dyskalkulii.

Pro porozumění počtu je nezbytné pochopení určitých základních pojmů, jako je hodně a málo, resp. méně a více. Předškolní dítě chápe, že pokud něco přidáme, tak se celkový počet zvyšuje, a pokud něco ubereme, tak klesá. Děti tohoto věku posuzují množství především vizuálně, tzv. percepčním odhadem. Rozvoj matematických schopností a dovedností zásadně ovlivní teprve škola.

Matematické schopnosti nejsou v lidském mozku jednoznačně lokalizovány. Uplatní se zde obě hemisféry, levá i pravá. Pro úspěšnost v matematice má určitý význam zrání kůry čelního mozkového laloku, na němž závisí schopnost zpracovávat informace a koordinovat jednotlivé dílčí kroky při řešení složitějšího příkladu (např. při rozkladu sčítání dvouciferných čísel).

Zopakujeme si i co je matematika. Známá definice uvádí, že matematika je věda o kvantitativních stavech a vztazích a o prostorových formách objektivního světa. *Slovník spisovné češtiny pro školu a veřejnost* (ACADEMIA 1978) říká, že matematika je věda, která tvoří pojmy abstrahované z obecných vztahů hmotného světa (čísla, útvary) a stanoví jejich obecné zákonitosti**.**

1. 4. Myšlení a jazyk

Myšlení a jazyk jsou vzájemně spjaté jevy, kdy myšlení jako nejvyšší forma odrazu skutečnosti se vyjadřuje a realizuje pomocí jazyka. Myšlení je spojeno s jazykem, fyziologicky je myšlení i jazyk podmíněno druhou signální soustavou a slouží poznávání světa a komunikaci mezi lidmi. Jazyk je způsobem existence myšlení, jeho fyzickým nositelem.

Nejstarší známá definice věty ještě z antiky je *„Oratio est ordinatio dictionum sententiam perfectam demonstrans“*, což značí, že „**Věta** je souvislé seřazení slov vyjadřujících hotovou myšlenku“. Většina publikací českého jazyka uvádí, že „**Věta** je slovní vyjádření myšlenky“.

Podle akademické *České mluvnice* (Havránek, Jedlička) dělíme druhy vět podle postoje mluvčího na věty oznamovací, tázací, žádací a zvolací. **Věta oznamovací** něco tvrdí, oznamuje, **věta tázací** vyjadřuje otázku, **věta žádací** vyjadřuje rozkaz, zákaz, vybídnutí, žádost nebo přání, aby se něco uskutečnilo. **Věta zvolací** vyjadřuje citový poměr k tomu, co se jí říká, například radost nad něčím, zármutek z něčeho, podiv, opovržení, hrůzu, ošklivost a j.

1. 5. Třídění (klasifikace) matematických pojmů

Obsah pojmu určujeme pomocí definic, rozsah pomocí třídění (klasifikace).

Prvky mající tytéž charakteristické základní vlastnosti (znaky) a náležejí do rozsahu daného pojmu tvoří množinu, jejíž prvky se mohou lišit vedlejšími (podružnými) znaky nebo jinou kvalitou či kvantitou charakteristické vlastnosti (znaku). Pří třídění (klasifikaci) provádíme rozklad dané množiny (rozsahu pojmu) na třídy (podmnožiny) podle vedlejších vlastností (znaků).

Třídění musí splňovat následující podmínky:

1) Třídění musí být **úplné** (vyčerpávající)-musí zahrnovat všechny prvky příslušné množiny (rozsahu pojmu).
2) Třídění musí být **disjunktní**, což znamená, že každý prvek tříděné množiny je zařazen právě do jedné třídy, to znamená, žádný prvek nemůže být současně prvkem dvou tříd.
3) Třídění je nutno provádět vždy podle **téhož znaku** (vlastnosti).

V třídění se často chybuje. Například na otázku, jaké druhy trojúhelníků znáte, často slyšíme odpověď: trojúhelníky dělíme na ostroúhlé, pravoúhlé, rovnoramenné a rovnostranné. Třetí podmínka třídění podle téhož znaku je zde porušena.

Úplné roztřídění prvků, které náleží rozsahu daného pojmu se nazývá **klasifikace** daného pojmu.

Nejznámější způsob třídění je **třídění dichotomické.** Zde jde třídění na prvky, které uvedenou vlastnost mají a na prvky, které tuto vlastnost nemají. *(Dichotomický znamená dvojčlenný).*

Mějme množinu $\mathbf{A}$ a vlastnost $\mathbf{V_1}$, přičemž existují prvky množiny $\mathbf{A}$, které vlastnost $\mathbf{V_1}$ mají i prvky, které ji nemají. Potom

$$\mathbf{A_1} = \{x:\ x \in \mathbf{A}\ \wedge \mathbf{V_1}(x)\} \quad \text{a} \quad \mathbf{A'_1} = \{x:\ x \in \mathbf{A}\ \wedge \mathbf{V'_1}(x)\}.$$

Provedli jsme rozklad množiny $\mathbf{A}$ na dvě třídy $\mathbf{A_1}$ a $\mathbf{A'_1}$. Platí podmínky třídění:

1) $\mathbf{A_1} \cup \mathbf{A'_1} = \mathbf{A}$, 2) $\mathbf{A_1} \cap \mathbf{A'_1} = \phi$, 3) Třídili jsme dle znaku $\mathbf{V_1}$.

Pomocí jiné vlastnosti $\mathbf{V_2}$ rozložíme množinu $\mathbf{A_1}$ na dvě třídy

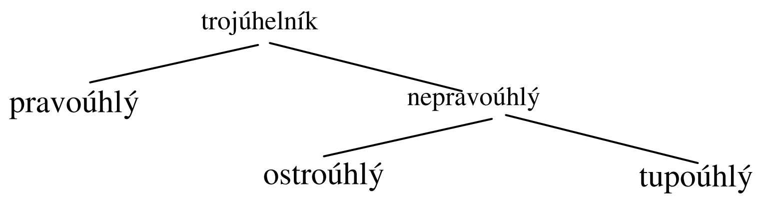
$$\mathbf{A_2} = \{x:\ x \in \mathbf{A}\ \wedge \mathbf{V_1}(x)\} \quad \text{a} \quad \mathbf{A'_2} = \{x:\ x \in \mathbf{A}\ \wedge \mathbf{V'_1}(x)\}.$$

Analogicky bychom mohli rozkládat množinu $\mathbf{A_2}$ pomocí některé vlastnosti $\mathbf{V_3}$ na dvě třídy $\mathbf{A_3}$ a $\mathbf{A'_3}$, atd., až dospějeme k nějaké množině $\mathbf{A_n}$, kterou již dále nelze rozložit – provedli jsme **klasifikaci**.

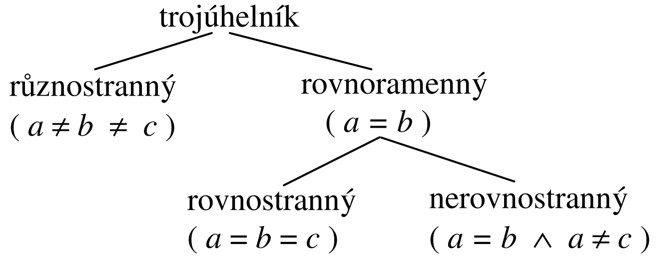
Příklad 8 :

Příklad dvou různých klasifikací téhož pojmu „trojúhelník“ podle velikosti úhlu a podle velikosti stran:

a) podle velikosti úhlu



b) podle velikosti stran



Poznámka : Symbol $\wedge$ čteme „a současně“.

Příklad 9 :
Klasifikace čísel

- komplexní čísla
  - reálná
    - racionální
      - celá
        - celá nezáporná
          - celá kladná (přirozená)
          - nula
        - celá záporná
      - necelá racionální
    - iracionální
  - imaginární

1. 6. Definice

Podíváme se na způsoby definování pojmů.

1. 6. 1. Definice pomocí specializace jiného pojmu, t. zv. aristotelovská, případně analytická definice, někdy též nazývaná formálně-logická.

Jestliže v množině **A** jsou prvky, které mají jistou vlastnost **V** a zároveň prvky, které ji nemají, tak vlastnost **V** definuje rozklad množiny **A** na dvě třídy

$$\mathbf{B} = \{x:\ x \in \mathbf{A}\ \wedge \mathbf{V}(x)\ \} \quad \text{a} \quad \mathbf{B}' = \{x:\ x \in \mathbf{A}\ \wedge \mathbf{V}'(x)\ \}$$

$\mathbf{V}(x)$ značí „x má vlastnost **V**“ , $\mathbf{V}'(x)$ značí „x nemá vlastnost **V**“.
Tento rozklad splňuje všechny podmínky třídění: Je úplný, disjunktní a podle téhož znaku.

Pomocí vlastnosti **V** jsme definovali množinu **B** jako podmnožinu **A**. Definice **B** je pomocí rodu (rodového pojmu) **A** a druhového znaku **V**.

Příklad 10:

Nechť např. **A** je množina rovnoběžníků, **V** – vlastnost „mít pravý úhel“ . Pak **B** je množina pravoúhelníků a definice pravoúhelníků je následující:

Pravoúhelník je rovnoběžník s pravým úhlem.

Jestliže vlastnost **V** nemá ani jeden prvek množiny **A** , tak definice množiny **B** nic nedefinuje. **B** je prázdná množina. Takovou definici nazýváme **protiřečením**.

Příklad 11:

Dvoupravoúhlý trojúhelník je trojúhelník s dvěma pravými úhly.

1.6.2. Definice syntetická

Syntetická definice zavádí pro jistá spojení známých pojmů nové jméno (označení).

Příklad 12:

Přímka mající s kružnicí jediný společný bod se nazývá **tečna kružnice.** Spojením dvou známých pojmů přímka a kružnice vzniká pojem nový.

Mezi syntetické definice patří i tak zvaná definice konstruktivní, ve které popisujeme tvorbu pojmu.

Příklad 13:

Budíž dána rovina ς (*ró*) a v ní kružnice *k* a budíž dána přímka *p*, která není s rovinou ς rovnoběžná. Množina všech přímek rovnoběžných s přímkou *p* a protínající kružnici *k* je **kruhová válcová plocha.**

1.6.3. Definice abstrakcí

V určité dané množině platí relace (vztah), který je symetrický, reflexivní a tranzitivní. (*Teorie relaci bude probrána později).* Všechny prvky této množiny mají určitou vlastnost, která je touto relací vymezena a danou množinu určuje.

Příklad 14:

Je dána množina všech přímek **P.** V této množině zavedeme relaci rovnoběžnost přímek, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní a ta nám způsobí rozklad této množiny na množiny sobě navzájem rovnoběžných přímek. Množina navzájem sobě rovnoběžných přímek se nazývá **směr**.

1.6.4. Definice kontextuální

Mnohé matematické definice neuvádějí definovaný pojem izolovaně, ale uvádějí jej v určité souvislosti s jinými pojmy (v kontextu). Tyto definice se nazývají **kontextuální**.

Příklad 15:

n- tá odmocnina z nezáporného čísla *a* je takové nezáporné číslo *x*, pro které platí

$$x^n = a.$$

1.6.5. Induktivní definice

Mezi nejznámější induktivní definice patří definice posloupností. Principem této definice je, že se určí výchozí prvek definované množiny, která bude pojmenována a formulují se pravidla tvoření nových prvků z prvků již daných. Ukazuje se, že výchozí prvky a vytvořené prvky vyčerpávají všechny prvky definované množiny.

Příklad 16:

Vztahy $a_1 = a$ a $a_{n+1} = a \cdot q$, kde $|\, q\,| \neq 1$ a $q \neq 0$ definují **geometrickou posloupnost** .

1.7. Základy logiky

K tomu, abychom mohli pochopit další základní matematické pojmy, je třeba si zopakovat základy logiky. Základy logiky jsou i nutnou znalostí k tomu abychom si uvědomili co je to logické myšlení. Pro logické myšlení jsou nutné znalosti základů logiky.

1.7.1. Logika a mateřský jazyk

Logické myšlení úzce souvisí s pojmem výroku a rozhodováním o jeho pravdivosti, či nepravdivosti. Věta je jazykové vyjádření myšlenky. Tedy logické myšlení úzce souvisí s mateřským jazykem, vyjadřováním se ve větách a určováním jejich pravdivosti, anebo nepravdivosti.

1.7. 1. 1. Výrok

Základním pojmem logiky je pojem **výroku**.

Výrokem nazveme každou oznamovací větu, která srozumitelně oznamuje něco, co může být jen pravdivé, anebo nepravdivé.
Zde vidíme, proč jsme popsali druhy vět a k čemu je nám oznamovací věta k užitku.
Slovo „výrok“ se běžné chápe jako pamětihodná věta nějaké osobnosti, anebo jako usnesení soudu, anebo jako sdělení komise znalců, a podobně. To vzbuzuje dojem, že jde o pravdivé, nevyvratitelné tvrzení. I *Slovník spisovné češtiny* pro školu a veřejnost (Akademia Praha 1978, 501-21-857) uvádí na str.649 **výrok 1.** *vyjádření myšlenky slovy:* ve svých výrocích je unáhlený; slavný výrok řeckého filozofa; okřídlený výrok, *sentence* **2.** *rozhodnutí, rozsudek:* soudní výrok, výrok komise.

Většina lidí je v domnění, že výrok je vždy pravdivý. Výrokem je však i oznamovací věta nepravdivá. Oznamovací věta „Jedna a jedna rovná se pěti“ je výrokem. Jde o oznamovací větu, která srozumitelně oznamuje něco co je nepravdivé. Tuto oznamovací větu lze zapsat místo slov číselnými symboly „$1 + 1 = 5$“. Zápis je různý, ale slovní vyjádření je stejné.

Věty „Přeskoč!“, „Kolik je hodin?“ nejsou výrokem, neboť nejde o oznamovací věty. Na druhé straně oznamovací věta “Kočka je násobkem psího ocasu“ není výrokem neboť srozumitelně nic neoznamuje.

Jak zjišťujeme pravdivost, anebo nepravdivost výroků? Je zřejmé, že na základě svých životních zkušeností, z odborné literatury, dnes i z Internetu a na základě informace od věrohodných osob. I zde však vidíme, že by mohlo dojít k omylu. Jeden ze známých příkladů jsou dějiny, kdy například vynález knihtisku je v různé literatuře uváděn různým datem. Říká se, že kriteriem pravdy je praxe. Jak však zde například rozhodnout o pravdivosti data vynálezu knihtisku praxí.

1.7. 1. 2. Negace výroku

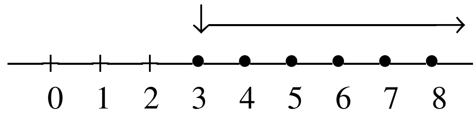
Podívejme se na negaci výroku.
Jestliže označíme určitý výrok písmenem *q*, pak výrok „Není pravda, že *q*“ nazýváme **negací výroku *q*.**

Slovo negace je odvozeno z latinského slovesa *negare* což znamená popřít. Výrok „Praha je hlavním městem České republiky“ popřeme neboli negujeme „Není pravda, že Praha je hlavním městem České republiky. V matematických symbolech „ Není pravda, že $1 + 1 = 5$“. Vidíme, že z pravdivého výroku se negací stal výrok nepravdivý a z nepravdivého pravdivý. Negaci výroku vyjadřujeme tak zvaným zkráceným způsobem. „Mám bílý svetr“. „Není pravda, že mám bílý svetr“. Zkrácený způsob „Nemám bílý svetr“. Zde se můžeme dopustit chyby. Mohli bychom výrok „Mám bílý svetr“ negovat „Mám modrý svetr“, ale to není negace výroku „Mám bílý svetr“. Uvedu-li výrok „$6 > 2$“, pak negace je „Není pravda, že $6 > 2$“ a zkrácený způsob je „ $6 \leq 2$“ . Tedy nikoliv „ $6 < 2$ “.

Shrneme-li vše do závěru pak: **„Jestliže se uvádí ve výroku jedna z několika možností, musí jeho negace zahrnovat všechny ostatní možnosti.“.**

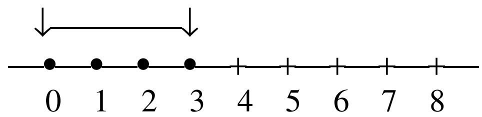
V některých výrocích se udává **počet nebo odhad počtu osob, věcí, matematických objektů** a podobně, které mají jistou vlastnost. Jde o údaje vyjádřené slovy: aspoň jeden, aspoň dva, aspoň tři, atd., právě jeden, právě dva, právě tři, atd., nejvýše jeden, nejvýše dva, nejvýše tři, atd., každý, všichni, žádný. Vysvětlíme si stručně význam těchto slov aspoň, právě, nejvýše, každý, všichni, žádný. Využijeme znalostí o nule a přirozených číslech a jejich znázornění na číselné ose.

Aspoň tři (znamená 3 a více)



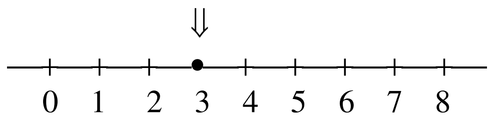
Obr. 1

Nejvýše tři (znamená 0, 1, 2, 3
a ne více)



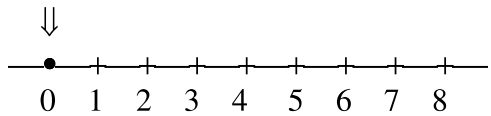
Obr. 2

Právě tři (znamená 3 a ne více
a ne méně)



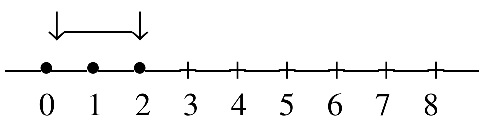
Obr. 3

Žádný (znamená 0 a ne více)



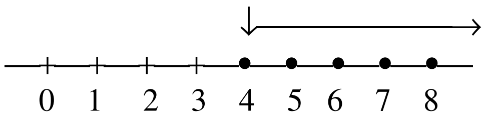
Obr. 4

Výše uvedené výroky můžeme negovat pomocí slov „Není pravda, že......“ nebo můžeme použít výše uvedené věty : **„**Jestliže se uvádí ve výroku jedna z několika možností, musí jeho negace zahrnovat všechny ostatní možnosti.“ a pak negace výroků znázorněných na obrázcích 1 až 4 udávají počty osob nebo věcí, které nejsou znázorněny černou tečkou. Tyto případy znázorňují obrázky 5 až 8 a vpravo jsou vyjádřeny slovy.



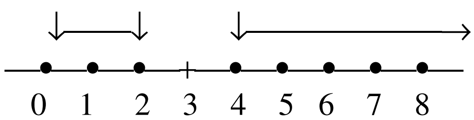
Obr. 5

0, 1, 2 a ne více (nejvýše dva)



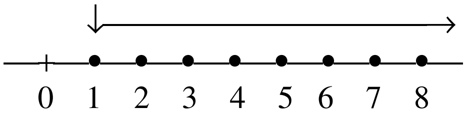
Obr. 6

4 a více (aspoň čtyři)



Obr. 7

0, 1, 2 nebo 4 a více (nejvýše dva nebo aspoň čtyři)



1 a více (aspoň jeden)

Obr. 8

Uveďme si několik příkladů na negace výroků.

Příklad 17:

1)

Aspoň čtyři žáci měli vyznamenání. Negace je „Není pravda, že aspoň čtyři žáci měli vyznamenání." nebo „ Nejvýše tři žáci měli vyznamenání."

2)

Nejvýše pět dní byla teplota pod bodem mrazu. Negace je „ Není pravda, že nejvýše pět dní byla teplota pod bodem mrazu." nebo „Aspoň šest dní byla teplota pod bodem mrazu."

3)

Právě čtyři dni pršelo. Negace je „Není pravda, že právě čtyři dni pršelo." nebo „ Nejvýše tři dni nebo aspoň pět dní pršelo.".

Pozor! Problémy jsou s negacemi výroku se slovy žádný nebo všichni.

4)

Jestliže mám výrok „Žádné dítě nemá kašel.", znamená to vlastně, že „Žádné dítě má kašel.". Počet dětí, které mají kašel je tedy nula a negace je „Není pravda, že žádné dítě má kašel." nebo dle obr. 8 „Aspoň jedno dítě má kašel.".

5)

Negací výroku „Každé okno je zavřené." není výrok „Každé okno není zavřené." tedy „Všechna okna jsou otevřená", ale „Aspoň jedno okno je otevřené".

Další problémy jsou se slovy někdo, kdosi, nejméně, bezmála, a podobně. Tato slovy musíme nejdříve „přeložit" do matematického jazyka, do matematické frazeologie. Například:

6)

Někdo, kdosi „přeložíme" jako „aspoň jeden". Tedy výrok „Kdosi zatleskal." přeložíme jako „Aspoň jeden zatleskal." a negace je podle obr. 1 „Žádný zatleskal.", tedy v běžné řeči „Žádný nezatleskal".

7)

Nejméně „přeložíme" jako „aspoň". Tedy výrok „Nejméně dva dny bude nemocný." přeložíme „Aspoň dva dny bude nemocný.". Negace tohoto výroku je tedy „Nejvýše jeden den bude nemocný."

8)

Bezmála dle *Slovníku spisovné češtiny* znamená skoro, málem, téměř. Všechna tato slova „přeložíme" jako nejvýše. Výrok „Bezmála dvacet let zde stojí tato budova."přeložíme „Nejvýše dvacet let zde stojí tato budova." a to negujeme a dostaneme výrok „Aspoň dvacet jedna let zde stojí tato budova.".

1.7.1.3. Složený výrok

Negaci daného výroku považujeme za složený výrok, který je utvořen z daného výroku tak, že je nepravdivý, když je daný výrok pravdivý a je pravdivý, když je daný výrok nepravdivý.

Dále můžeme skládat výroky tak, že z oznamovacích vět budeme tvořit souvětí. Nejdříve budeme skládat dvě oznamovací věty.

Složený výrok, který je ze dvou daných výroků utvořen tak, že je pravdivý právě tehdy, když oba výroky jsou pravdivé, se nazývá **konjunkce** daných výroků.

Příklad 18:

Souvětí *Praha je hlavní město České republiky a Bratislava je hlavní město Slovenské republiky* je složeno ze dvou oznamovacích vět spojených spojkou *a*. Z hlediska české mluvnice jde o souvětí souřadné, věty jsou spojeny souřadicí spojkou *a* . Složený výrok je pravdivý právě tehdy, když oba výroky jsou pravdivé.
Souvětí *Praha je hlavní město České republiky a Bratislava je hlavní město Polské republiky* je nepravdivé.
Obdobně můžeme použít k psaní vět i matematickou symboliku. I zde jde o souvětí, zapsané poněkud netradičně. $1 + 1 = 2$ *a* $3 < 7$ je souvětí souřadné a jako složený výrok dvou oznamovacích vět je pravdivé.
Řekneme-li o určitém trojúhelníku, že *Trojúhelník ABC je pravoúhlý a rovnoramenný* , považujeme tento výrok za pravdivý pouze v tom případě, že má trojúhelník obě uvedené vlastnosti, tzn., že oba výchozí výroky *Trojúhelník ABC je pravoúhlý, Trojúhelník ABC je rovnoramenný* jsou pravdivé. V každém jiném případě je tento složený výrok nepravdivý.
Složený výrok, který je ze dvou daných výroků utvořen tak, že je pravdivý právě tehdy, když je pravdivý aspoň jeden z daných výroků, se nazývá **disjunkce.**

Příklad 19:

Souvětí *Alena plave v bazénu nebo Alena se opaluje* je složeno ze dvou oznamovacích vět, souvětí lze upravit *Alena plave v bazénu nebo se opaluje*. Jde o souvětí souřadné, věty jsou spojeny souřadicí spojkou *nebo.* Tento složený výrok je pravdivý, právě tehdy, když je pravdivý aspoň jeden z daných výroků. Netradiční matematický zápis souřadného souvětí dvou oznamovacích vět $3 - 1 = 3$ *nebo* $6 > 3$ je složený výrok a je pravdivý, neboť aspoň jeden z daných výroků je pravdivý.
Řekneme-li o určitém trojúhelníku, že *Trojúhelník ABC je pravoúhlý nebo rovnoramenný*, považujeme tento výrok za pravdivý pouze v tom případě, že má trojúhelník aspoň jednu uvedenou vlastnost, tzn. , že aspoň jeden z výchozích výroků *Trojúhelník ABC je pravoúhlý, Trojúhelník ABC je rovnoramenný* je pravdivý. V každém jiném případě je tento složený výrok nepravdivý. Trojúhelník může být jenom pravoúhlý, jenom rovnoramenný, může mít vlastnosti obě.

V českém jazyku lze použít i spojky, které jsou v každé větě. Jsou to spojky dvojité. Jde například o spojovací výraz *buď-nebo.*
Složený výrok, který je ze dvou daných výroku utvořen tak, že je pravdivý právě tehdy, když je pravdivý právě jeden z daných výroků se nazývá **ostrá disjunkce** někdy **též vylučovací disjunkce.**

Příklad 20:

Budu-li například oznamovat v dopise sdělení *Ve škole se učíme psát dopisy na počítači nebo na psacím stroji*, tak přesněji bych měl napsat, že *Ve škole se učíme psát dopisy buď na počítači nebo na psacím stroji*, neboť určitě nepíšeme dopis současně na počítači a na psacím stroji.

Obdobně jde o oznamovací věty *Jan spí nebo se učí*, *Karel se koupe nebo bruslí.* Určitě mají znít *Jan buď spí nebo se učí*, *Karel se buď koupe nebo bruslí.*
Řekneme-li o určitém trojúhelníku, že *Trojúhelník ABC je buď pravoúhlý nebo rovnoramenný*, považujeme tento výrok za pravdivý pouze v tom případě, že má trojúhelník právě jednu uvedenou vlastnost, tzn. , že právě jeden z výchozích výroků

Trojúhelník ABC je pravoúhlý, Trojúhelník ABC je rovnoramenný je pravdivý. V každém jiném případě je tento složený výrok nepravdivý. Trojúhelník může být jenom pravoúhlý, jenom rovnoramenný, nemůže mít vlastnosti obě.

Místo spojek *buď-nebo*, používáme někdy spojek *buď-anebo*.

Složený výrok, který je utvořen ze dvou výroků, které jsou dány v určitém pořadí tak, že je nepravdivý právě tehdy, když první z nich je pravdivý a druhý nepravdivý, se nazývá **implikace** daných výroků v daném pořadí. V ostatních případech je výrok pravdivý.

Příklad 21:

V našem případě nás budou zajímat dvě oznamovací věty, které jsou v souvětí podřadném. Věty jsou na sobě závislé jak obsahově, tak mluvnicky. Jde o souvětí podřadné s vedlejší větou příslovečnou podmínkovou. Věta hlavní začíná spojkou jestliže, věta vedlejší spojkou pak. V matematice se používají spojky *jestliže-pak*. V matematice lze použít i spojku *když* a spojka *pak* se vynechá.
Implikací jsou například věty: *Jestliže je trojúhelník rovnostranný, pak obsahuje vnitřní úhel o velikosti 60 stupňů. Jestliže prší, pak je mokro.* V tomto případě je složený výrok pravdivý.
Jestliže změním pořadí vět: *Jestliže trojúhelník má vnitřní úhel o velikosti 60 stupňů, pak je rovnostranný, Jestliže je mokro, pak prší* pak vidím, že jde o jinou situaci, neboť trojúhelník může mít vnitřní úhel 60 stupňů a nemusí být rovnostranný a může být mokro a nemusí pršet, třeba mohu zalévat.

Uvedu složený výrok *Jestliže bude venku ve stínu 30 stupňů Celsia, pak já půjdu na koupaliště.* Je venku 30 stupňů Celsia tepla ve stínu, jsem na koupališti, tak mluvím pravdu. Je venku 30 stupňů Celsia tepla ve stínu, nejsem na koupališti, tak mluvím nepravdu. Není venku 30 stupňů Celsia ve stínu ve stínu, nejsem na koupališti, tak mluvím pravdu. Není venku 30 stupňů Celsia tepla ve stínu, jsem na koupališti, tak mluvím také pravdu. Moje činnost je podmíněna podmínkou 30 stupňů Celsia tepla ve stínu.

Složený výrok, který je utvořen ze dvou výroků tak, že je pravdivý právě tehdy, když jsou buď oba výroky pravdivé nebo oba nepravdivé, se nazývá **ekvivalence** daných výroků.

Příklad 22:

U souvětí podřadném s vedlejší větou příslovečnou podmínkovou, kde lze zaměnit větu hlavní s větou vedlejší a pravdivost složeného výroku zůstane zachována jde o případ ekvivalence.
V souvětí *Jestliže* $6 > 3$, *pak* $-6 < -3$ zaměníme větu hlavní za větu vedlejší a dostaneme *Jestliže* $-6 < -3$, *pak* $6 > 3$. Vidíme, že oba složené výroky jsou pravdivé. Mohu tedy říci matematickou frazeologií $6 > 3$ *právě , když* $-6 < -3$. Místo spojky *právě, když* matematika používá i spojek *právě tehdy, když,* někdy *tehdy a jen tehdy.*

1.7.1.4. Výrokový počet

Výroky můžeme skládat nejen dva, ale i výroků více. Dostáváme složité složené výroky. Zavedeme si matematický „aparát“, který nám usnadní zjišťování pravdivosti resp. nepravdivosti těchto výroků.

Zavedeme si výrokovou proměnnou za kterou budeme dosazovat libovolný výrok. Výrokovou proměnnou budeme zapisovat písmeny malé abecedy. Pro spojování dvou výroků slova nahradíme znaky, dostaneme **logické spojky** a jejich symboly.

typ složeného výroku	slovní vyjádření spojky	zápis symbolu spojky
negace	není pravda, že	$\neg$
konjunkce	a	$\wedge$
disjunkce	nebo	$\vee$
implikace	jestliže, pak	$\Rightarrow$
ekvivalence	právě když	$\Leftrightarrow$

Poznámka: Pro jednoduchost jsme vynechali ostrou disjunkci

Zavedeme si **abecedu výrokového počtu**.

Abeceda výrokového počtu obsahuje tyto znaky:
a) písmena malé abecedy jako znaky pro výrokové proměnné,
b) znaky pro logické spojky $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$,
c) závorky jako pomocné znaky.

Zavedeme pojem **výroková formule**:
1) Každá výroková proměnná je výroková formule,
2) jestliže α, β jsou výrokové formule, pak $\neg\alpha$, $\neg\beta$, $\alpha\wedge\beta$, $\alpha\vee\beta$, $\alpha\Rightarrow\beta$, $\alpha\Leftrightarrow\beta$ jsou výrokové formule,
3) jiný zápis není výrokovou formulí.

Příklad 23:
Výrokové formule: $\neg(a\wedge b)$, $(\neg a \wedge b) \vee (a\Rightarrow b)$, atp.

1.7.1.5. Pravdivostní hodnota výroku

Ke každému výroku přiřaďme právě jedno z čísel 0,1, tak **zvanou pravdivostní hodnotu výroku** takto: pravdivý výrok má pravdivostní hodnotu 1, nepravdivý výrok má pravdivostní hodnotu 0.

Pod jednotlivé znaky výroků a znaků pro logické spojky budeme zapisovat pravdivostní hodnotu výroku a dostaneme **tabulku pravdivostních hodnot** pro výrokovou formuli:

Příklad 24:

$\neg$	(a	$\wedge$	b)
0	1	1	1
1	1	0	0
1	0	0	1
1	0	0	0

U některých výrokových formulí se ve výsledném sloupci (v příkladu 24 vyznačen tučně) tabulky pravdivostního ohodnocení vyskytují pouze jedničky. Znamená to, že taková výroková formule se stává pravdivým výrokem, dosazujeme-li za všechny její výrokové proměnné jakékoliv výroky bez ohledu to, zda jsou pravdivé nebo ne. Těmto formulím říkáme **tautologie.**

Příklad 25:

(a	⇒	b)	⇔	(¬	a)	∨	b
1	1	1	**1**	0	1	1	1
1	0	0	**1**	0	1	0	0
0	1	1	**1**	1	0	1	1
0	1	0	**1**	1	0	1	0

Jedná se o tautologii. Podíváme-li se na příklad z běžného života, můžeme výrok $a \Rightarrow b$ nahradit jiným výrokem $(\neg a) \vee b$. Výrok *Jestliže vyběhneš dříve, pak budeš vyloučen* můžeme nahradit výrokem *Nevybíhej dříve nebo budeš vyloučen*.

Říkáme, že výrokové formule α, β jsou navzájem **logicky ekvivalentní** právě když výroková formule $\alpha \Leftrightarrow \beta$ je tautologií.

1.7.1. 6. Pravidla správných úvah

Budeme říkat, že úvaha je **správná** právě v tom případě, když z pravdivých předpokladů vyplývá na základě tabulek pravdivostních hodnot vždy pouze jen pravdivý závěr.

Příklad 26:

Vyslovme úvahu:

Jestliže je číslo sudé, pak je dělitelné dvěma } předpoklady
Číslo je sudé

Je dělitelné dvěma — závěr

Určíme-li logickou stavbu výroku vyskytující se v této úvaze dostaneme schéma:

$$\begin{array}{ll} a \Rightarrow b & \\ a & \text{předpoklady} \\ \hline b & \text{závěr} \end{array}$$

Tabulka pravdivostních hodnot:

[(a	⇒	b)	∧	a]	⇒	b
1	1	1	1	1	**1**	1
1	0	0	0	1	**1**	0
0	1	1	1	1	**1**	1
0	0	0	0	0	**1**	0

Oba výroky tvořící předpoklady úlohy (tj. $a \Rightarrow b$ i a jsou pravdivé. V obou těchto případech je závěr b pravdivý.(Řádek první a třetí.) Jde o tak zvané **odvozovací pravidlo**. Toto odvozovací pravidlo se nazývá **pravidlo odloučení** (modus ponens).

Vyslovme úvahu: Jestliže budu mít čas, pak půjdu na tenis
Neměl jsem čas
Nešel jsem na tenis

Schéma odpovídající úvaze je následující:

$$\begin{array}{l} a \Rightarrow b \\ \underline{\neg a} \\ \neg b \end{array}$$

Tabulka pravdivostních hodnot :

[(a	⇒	b)	∧	¬	a]	⇒	¬	b
1	1	1	0	0	1	**1**	0	1
1	0	0	0	0	1	**1**	1	0
0	1	1	1	1	0	**0**	0	1

0 1 0 1 1 0 **1** 1 0

V tabulce vidíme, že oba předpoklady ($a \Rightarrow b,\ \neg a$) jsou současně pravdivé, ale závěr ($\neg\, b$) může být jak pravdivý, tak nepravdivý. Tato úvaha není pravidlem správných úvah.

Podíváme se ještě na další odvozovací pravidla:

Pravidlo negace (modus tollens)

$$\begin{array}{c} a \Rightarrow b \\ \underline{\neg b} \\ \neg a \end{array}$$

Pravidlo kontrapozice

$$\begin{array}{c} \underline{a \Rightarrow b} \\ \neg b \Rightarrow \neg a \end{array}$$

Pravidlo sylogismu

$$\begin{array}{c} a \Rightarrow b \\ \underline{b \Rightarrow c} \\ a \Rightarrow c \end{array}$$

Pravidlo disjunkce předpokladů

$$\begin{array}{c} a \Rightarrow c \\ \underline{b \Rightarrow c} \\ a \vee b \Rightarrow c \end{array}$$

Jsou ještě další pravidla, které není nutné uvádět.

1.7.1. 7. Výroková forma

Nyní se budeme zabývat sděleními, které na první pohled vypadají jako výroky, která však za výroky považovat nemůžeme . Například $x > 7$, $y + 5 = 10$, číslo x je liché, pan x je obyvatelem Litoměřic, atp. Podívejme se na sdělení $x > 7$. Nemá smysl se ptát zde je pravdivé, či nepravdivé. Důvod je ve výskytu **proměnné *x***. Pokud za proměnnou x dosadíme číslo 9, obdržíme pravdivý výrok $9 > 7$. U každé proměnné je třeba znát množinu **M** z které za proměnnou dosazujeme. Představujme si, že proměnná vždy za sebou táhne vozíček s prvky množiny **M,** které se za proměnnou **dosazují.** Této množině říkáme **obor proměnné**.

Sdělení mohou mít i více proměnných například $x < y$, $a + b + c = 11$, Pan x je obyvatelem města y, atp.

Všechna tato sdělení nazýváme **výrokové formy**. Charakteristické pro ně je, že obsahují aspoň jednu proměnnou a že po vhodném dosazení za všechny proměnné vznikne výrok.

Podíváme se na slovo vhodné dosazení. Asi těžko oborem proměnné ve výrokové formě $x < 10$ bude množina obyvatel České republiky, ale určitě půjde o čísla.

Příklad 27 :

V učebnici pro 1. ročník základní škola je tato úloha:

$$< 5 \quad |\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

Podtrhněte čísla, která dají pravdivý zápis.

Jde o výrokovou formou s oborem proměnných přirozených čísel **M** = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }.

Obor proměnných se nám rozdělí na **obor pravdivosti**, to jsou čísla 1, 2, 3, 4 a obor **nepravdivosti**, to jsou čísla 5, 6, 7, 8.

Z výrokových forem se skládají složené výrokové formy pomocí logických spojek $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ a závorek.

Příklad 28:

Jestliže $x < y$ a $y < z$, pak je $x < z$, oborem každé z proměnných je množina reálných čísel ($x, y, z \in \mathbf{R}$), lze zapsat

$$x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z, \text{ pro } x, y, z \in \mathbf{R}$$

1. 8. Matematická věta

Matematická věta (poučka) značí nějaký matematický poznatek vyjádřený slovy nebo symbolickým zápisem , jehož pravdivost je zaručena.

Z hlediska logiky je matematická věta vždy pravdivý výrok. Budeme však hovořit i o větách, které jsou nepravdivé. Takové věty i když se jejich obsah týká matematické látky pochopitelně nebudou matematickými větami (poučkami). Z kontextu (ze souvislostí) je vždy jasné, kdy se pojem „věta“ užívá ve smyslu věta a kdy ve smyslu gramatickém.

Matematické věty mají zpravidla tvar logické implikace nebo se dají na tento tvar převést: $p \Rightarrow t$ (jestliže platí p, pak platí t).

Výrok p nazýváme **předpokladem** (podmínkou) a výrok t **tvrzením** (závěrem) věty. O matematických větách, které mají strukturu implikace, t. zn. $p \Rightarrow t$, říkáme, že jsou v podmínkovém tvaru.

Každá matematická věta má mít jasně vyslovený předpoklad, aby nenastaly nejasnosti. Velmi často se však z jazykových důvodů stává, že tento předpoklad není vysloven v podmínkovém tvaru věty.

Příklad 29:

Součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180 stupňů. Je třeba větu upravit do podmínkového tvaru: *Jestliže je obrazec trojúhelník, pak součet velikostí jeho vnitřních úhlů je 180 stupňů* a pak je jasně vidět, co je předpoklad a co je tvrzení.

Nechť matematická věta má tvar $p \Rightarrow t$. Jestliže označíme negace výroků p, t jako $\neg p$, $\neg t$, pak výrok $\neg t \Rightarrow \neg p$ nazýváme **obměněnou větou** případně **negativním vyslovením věty** $p \Rightarrow t$. Platí, že jestliže je $p \Rightarrow t$ je matematická věta, pak i $\neg t \Rightarrow \neg p$ je též matematická věta. Pomocí tabulky pravdivostních hodnot se lze přesvědčit, že vždy platí

$$(p \Rightarrow t) \Leftrightarrow (\neg t \Rightarrow \neg p) \text{, tedy tato ekvivalence je tautologií.}$$

Věty $(p \Rightarrow t)$ a $(\neg t \Rightarrow \neg p)$ říkají totéž.

Výrok $t \Rightarrow p$, který vznikne z věty $p \Rightarrow t$ záměnou předpokladu za tvrzení nazýváme **obrácením věty** $t \Rightarrow p$ k větě $p \Rightarrow t$. Požíváme termín obrácení věty, nikoliv obrácená věta, neboť obrácením věty nemusíme dostat pravdivý výrok a tudíž nejde o matematickou větu. O pravdivosti věty $t \Rightarrow p$ se musíme vždy přesvědčit.

Příklad 30:

Jestliže jsou obrazce shodné, pak mají týž obsah ($p \Rightarrow t$). *Jestliže nemají obrazce týž obsah, pak nejsou shodné* ($\neg t \Rightarrow \neg p$) . Výrok je pravdivý, jde o matematickou větu. *Jestliže mají obrazce týž obsah, pak jsou shodné* ($t \Rightarrow p$) . Výrok je nepravdivý, nejedná se o matematickou větu.

Příklad 31:

Jestliže je ciferný součet přirozeného čísla dělitelný 3, pak je toto přirozené číslo dělitelné 3 ($p \Rightarrow t$). *Jestliže není přirozené číslo dělitelné 3, pak ciferný součet tohoto přirozeného čísla není dělitelný 3* ($\neg t \Rightarrow \neg p$) . Výrok je pravdivý, jde o matematickou větu.

Jestliže je přirozené číslo dělitelné 3, pak ciferný součet tohoto přirozeného čísla je dělitelný 3 ($t \Rightarrow p$). Výrok je pravdivý, jde o matematickou větu. Příklad ukazuje, že existují matematické věty, jejichž obrácení je rovněž matematická věta, to znamená, že platí ($p \Rightarrow t$) $\wedge$($t \Rightarrow p$).

Tabulkou pravdivostních hodnot se lze přesvědčit, že složený výrok ($p \Rightarrow t$) $\wedge$($t \Rightarrow p$) je ekvivalencí a lze tedy napsat p $\Leftrightarrow$ t. Třetí větu lze tedy vyslovit : *Přirozené číslo je dělitelné 3, právě když jeho ciferný součet je dělitelný 3.*

Matematické věty dokazujeme. Jsou však matematické věty, které nedokazujeme, jejichž pravdivost je ověřená naší zkušeností a praxí, jejich použití dosud nevedlo k rozporu. Tyto matematické věty se nazývají **axiomy**.

1. 9. Kvantifikátory

Již jsme se setkali s udáváním počtu osob nebo věcí, matematických objektů. Velmi důležitá jsou v matematice rčení „Pro každé x platí..............“ a „Existuje aspoň jedno x pro které platí................“. Sdělení „Pro každé x z množiny **M**“ a „Existuje aspoň jedno x z množiny **M**“ nazýváme po řadě **obecným a existenčním kvantifikátorem** vázajícím proměnnou x z množiny **M**.

Pro **obecný kvantifikátor** se používá tento symbolický zápis: $\forall\, x \in \mathbf{M}$ (čteme: pro každé x z množiny **M**).

Pro **existenční kvantifikátor** se používá tento symbolický zápis: $\exists\, x \in \mathbf{M}$ (čteme: existuje aspoň jedno x z množiny **M**).

Máme-li výrokovou formu proměnné x V(x) a umístíme-li před tuto výrokovou formu V(x) kvantifikátor, tak dostaneme z výrokové formy výrok **obecný**, v případě použití obecného kvantifikátoru

$$\forall\, x \in \mathbf{M} : \mathrm{V}(x)$$

(čteme: pro každé x z množiny **M** platí V(x))

případně výrok **existenční**, v případě použití existenčního kvantifikátoru

$$\exists\, x \in \mathbf{M} : \mathrm{V(x)}$$

(čteme: existuje aspoň jedno x z množiny **M** pro které platí V(x)).

Většina matematických vět má právě strukturu obecného, případně existenčního výroku. Jde o věty tvaru : $\forall\, x \in \mathbf{M} : \mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{T}(x)$, případně $\exists\, x \in \mathbf{M} : \mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{T}(x)$, kde P($x$) je předpoklad a T($x$) tvrzení věty.

Máme-li matematickou větu tvaru $\forall\, x \in \mathbf{M} : \mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{T}(x)$, potom

$\forall\, x \in \mathbf{M} : \neg\mathrm{T}(x) \Rightarrow \neg\, \mathrm{P}(x)$ je obměněná věta k dané větě a výrok

$\forall\, x \in \mathbf{M} : \mathrm{T}(x) \Rightarrow \mathrm{P}(x)$ je obrácení dané věty, musíme však dokázat, zda obrácení je, či není matematickou větou.

Dohodneme se, že budeme označovat množinu všech přirozených čísel **N,** množinu všech celých čísel **C,** množinu všech racionálních čísel **Q** a množinu všech reálných čísel **R**.

Příklad 32:

$\forall\, x \in \mathbf{R} : x^2 \geq 0$, čteme: pro každé reálné číslo x platí, že x^2 je větší nebo rovno nule. Jde o obecný výrok, který je pravdivý.

$\exists\, x \in \mathbf{R} : x^2 = 4$, čteme: existuje aspoň jedno reálné číslo x pro které platí, že x^2 je rovno čtyřem. Jde o existenční výrok, který je pravdivý.

$\exists\, x \in \mathbf{C} : \neg\, x > 0$, čteme: existuje aspoň jedno celé číslo x pro které neplatí, že x je větší než nula. Jde o existenční výrok, který je pravdivý.
$\forall\, x \in \mathbf{C} : x \leq 0$, čteme: pro každé celé číslo x platí, že x je menší nebo rovné nule. Jde o obecný výrok, který je nepravdivý.

Negaci obecného či existenčního výroku lze vyjádřit tak, že

1) změníme kvantifikace původního výroku, tj. zaměníme obecný kvantifikátor za existenční a naopak; obor proměnné se nemění,
2) zapíšeme negaci původní výrokové formy.

Příklad 33:

Negace obecného výroku $\forall\, x \in \mathbf{R} : x^2 \geq 0$ je $\exists\, x \in \mathbf{R} : x^2 < 0$. Opravdu původní obecný výrok je pravdivý a existenční výrok je nepravdivý.
Negace existenčního výroku $\exists\, x \in \mathbf{R} : x^2 = 4$ je $\forall\, x \in \mathbf{R} : x^2 \neq 4$.
Jsou-li všechna okna zavřená a chceme-li tuto skutečnost negovat opravdu řekneme existuje aspoň jedno okno, které je otevřené. Nemusíme otvírat všechna okna.

1. 10. Axiomatická definice

K této definici dojdeme tak, že budeme popisovat vztahy postřehnuté ve skutečné situaci. Víme, že tyto konkrétní vztahy postřehnuté ve skutečné situaci a ověřené našimi zkušenostmi, jejich použití dosud nevedlo k rozporu jsou matematickými větami, které nedokazujeme a nazývají se **axiomy**. Příslušné axiomy postřehnuté ve skutečné situaci nám udávají **axiomatickou definici matematické struktury**.
Matematická struktura je souhrn objektů charakterizovaných jen přesně formulovanými vztahy mezi nimi, ale jinak zcela libovolných. Každou jejich konkretizaci nazýváme **modelem struktury.**

Příklad 34:

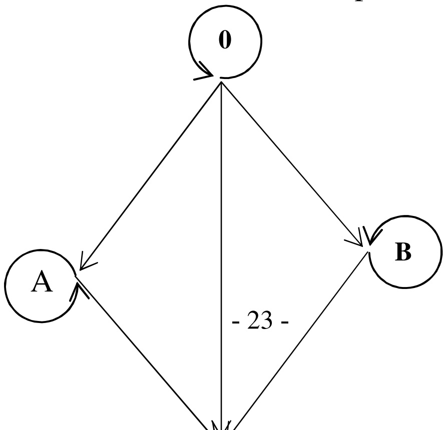
Od roku 1919 se rozlišují v lékařství čtyři hlavní krevní skupiny: A, B, AB, 0, k jejichž objevení přispěl podstatnou měrou český lékař MUDr. Jan Janský (1873 – 1921). Krevní transfuze lze provádět právě jen v těchto případech:

1) Dárce i příjemce mají stejnou krevní skupinu.
2) Má-li dárce krevní skupinu 0, může mít příjemce libovolnou krevní skupinu (univerzální dárce).
3) Má-li příjemce krevní skupinu AB, může mít dárce libovolnou krevní skupinu (univerzální příjemce).

Označíme-li $\mathbf{M} = \{$ A, B, AB, 0 $\}$ množinu krevních skupin a vztah $x\,\mathbf{R}\,y$ „osoba krevní skupiny x může dát krev osobě krevní skupiny y“ a $x, y \in \mathbf{M}$, lze zákony krevní transfuze zapsat takto:

1) $\forall\; x \in \mathbf{M} : x\;\mathbf{R}\;x$.
2) $\forall\; x \in \mathbf{M} : 0\;\mathbf{R}\;x$.
3) $\forall\; x \in \mathbf{M} : x\;\mathbf{R}\;\mathrm{AB}$.
4) Platí právě jen vztahy 1) až 3).

Informace 1) až 4) lze v množině **M** krevních skupin znázornit graficky uzlovým grafem:



Na základě informací 1) až 4) se dá například teoreticky ověřit, aniž bychom trápili pacienty, zda platí tranzitivnost dárcovství krve:

$$\forall\ x, y, z \in \mathbf{M} : [(x\ \mathbf{R}\ y) \wedge (y\ \mathbf{R}\ z)] \Rightarrow x\ \mathrm{R}\ z\ .$$

Máme-li informace 1) až 4) můžeme dát symbolům jiný význam a dostáváme **model matematické struktury.**

a) **M** je množina čísel 1, 2, 3, 6 **M** = { 1, 2, 3, 6 }

x R y označíme vztah „ x je dělitelem y“ a $x, y \in$ **M**

b) **M** je systém množin {a, b}, { a, b, c}, { a, b, d }, { a, b, c, d}

M = {{a, b}, { a, b, c}, { a, b, d }, { a, b, c, d} **}**

x **R** y označíme vztah $x \subset y$ (čteme : x je podmnožina y)

Lehce se přesvědčíme, že informace 1) až 4) jsou pravdivé.

1. 11. Indukce, dedukce a intuice

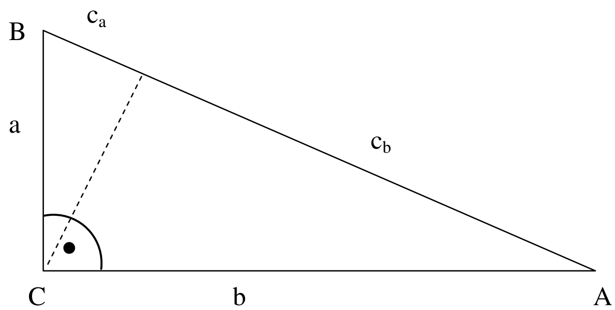
„Poznat vědu znamená poznat její metodu“. Chceme-li poznat matematiku, musíme znát metody, jimiž matematika pracuje, zejména jak získává své poznatky „vědy“.
Ve všech vědách a v lidském poznání vůbec, tedy i v matematice, jsou dvě základní metody poznání. První z nich se opírá o **přímé pozorování** a to mnoha případů, z nichž se vyvozuje obecný závěr. Této metodě se říká **induktivní myšlení.**

Příklad 35:

Například pozorujeme v matematice, že 4 + 7 = 7 + 4, že 9 + 1 = 1 + 9, atd. Pozorujeme mnoho případů a dojdeme k obecnému závěru, že platí obecně, že pro každé přirozené číslo platí, že $a + b = b + a$. Tuto vlastnost nazýváme vlastnost záměny sčítanců nebo t.zv. komutativnost sčítání (od latinského slova comutare, což značí měním). Obdobně pozorujeme vlastnost záměny činitelů. Též v geometrii pozorujeme, že dvěma body prochází právě jediná přímka. Též například pozorujeme lidi se zdravým počtem zubů a k dojdeme k závěru, že zdravý dospělý člověk má 32 zubů, že se železo teplem roztahuje, atp.

U druhé metody pokládáme určitý poznatek za pravdivý a můžeme z něj odvodit nový poznatek deduktivně usuzováním, logickým myšlením **bez přímého pozorování** daného jevu.

Příklad 36:



Budeme považovat Eukleidovu větu o odvěsně v pravoúhlém trojúhelníku za pravdivou
$a^2 = c \, . \, c_a$ a $b^2 = c \, . \, c_b$. Z Eukleidovy větě o odvěsně odvodíme větu novou.
Sečteme $a^2 + b^2$ a dostaneme po dosazení $a^2 + b^2 = c \, . \, c_a + c \, . \, c_b$, můžeme upravit
a dostaneme $a^2 + b^2 = c \, . \, (c_a + c_b)$,
víme, že $c_a + c_b = c$, pak tedy $a^2 + b^2 = c \, . \, c$, dostáváme
$a^2 + b^2 = c^2$, což je známá Pythagorova věta.

Z pravdivého poznatku jsme získali matematickými úpravami poznatek nový.

Matematická indukce má nevýhodu, že nemůže ověřit všechny případy, indukce nemůže být úplná. Dedukce platí obecně jsou-li předpoklady pravdivé.

Je třeba se ještě zmínit o **intuici**. **Intuice** je vyšší stupeň **indukce.** Schopnost intuice je jednak vrozená, jednak se posiluje zkušeností s prací v daném oboru. Slovo intuice můžeme překládat jako „vnuknutí“. Intuice úzce souvisí s heuristickou strategií, o které se zmiňujeme později.

Příklad 37:

Budeme se zabývat tak zvanými **reverzními čísly .** Při využití indukce a intuice matematika „není divácká disciplína“. Žáci musí více produkovat než reprodukovat.

Definice : Nechť přirozené číslo a má rozvinutý zápis v oboru přirozených čísel a nuly v desítkové číselné soustavě
$a_n \, . 10^n + a_{n-1} \, . 10^{n-1} + a_{n-2} \, . 10^{n-2} + a_{n-3} \, . 10^{n-3} + \ldots\ldots\ldots + a_1 \, . 10^1 + a_0 \, . 10^0$, kde $0 \leq a_i < 10$ ($i = 0$ *až* n), pak přirozené číslo $å$ s rozvinutým zápisem
$a_0 \, . 10^n + a_1 \, . 10^{n-1} + a_2 \, . 10^{n-2} + a_3 \, . 10^{n-3} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1} \, . 10^1 + a_n \, . 10^0$ se nazývá číslo reverzní (obrácené) k číslu a.

Například: Je dáno přirozené číslo 23067, číslo 76032 je reverzním (obráceným) číslem k číslu 23067 a samozřejmě i obráceně. Pozor na terminologii. Něco jiného je číslo opačné než číslo obrácené.

V úvodu se budeme zabývat reverzními čísly dvoucifernými. Vysvětlíme si pojem reverzní číslo. K číslu 28 je reverzní číslo 82. Domluvíme se, že jednociferná čísla budeme zapisovat s nulou na místě desítek. Například reverzním číslem k číslu 08 bude číslo 80 a obráceně reverzním číslem k číslu 80 bude 08.

Napíšeme libovolné dvouciferné číslo. K tomuto číslu napíšeme číslo reverzní. Od většího dvouciferného čísla z těchto dvou odečteme jeho číslo reverzní. Pokračujeme v psaní libovolných dvouciferných čísel a stále odečítáme jejich menší reverzní čísla a hlavně pozorujeme zda nedojde k nějakému zajímavému výsledku. Neznáme k jakému obecnému závěru, k jakému cíli máme dojít. Prof. Jan Kopka z ústecké univerzity tento typ úloh nazývá zkoumáním. Najednou si všimneme, že všechny výsledky jsou násobky devíti. Můžeme zakřičet řecky „Heureka!“ – česky „Našel jsem!“. Pracujeme tedy tak zvanou heuristickou metodou. Současně využíváme intuici. Na základě svých zkušeností, neboť známe násobilku devíti, jsme přišli na to, že jde o násobky devíti. **Intuicí**, vlastně vyšším stupněm indukce jsme dospěli k určitému závěru. Položme si další úkol. Sledujme dvouciferná čísla, která odčítáme a násobky devíti, ke kterým jsme došli. Dojdeme k závěru, že jde o násobky devíti rozdílu čísel, která jsou zapsaná příslušnými číslicemi daného čísla.

Například : K číslu 82 je reverzním číslem 28. 82 – 28 = 54. Opravdu 8-2 = 6 a 6 . 9 = 54.
Provedeme si důkaz proč tomu tak je: $a > å$, $a = 10.x + y$, $å = 10 \, . \, y + x$, pak
$a - å = 10 \, . \, x + y - (10 \, . \, y + x) = 10 \, . \, x + y - 10 \, . \, y - x = 9 \, . \, x - 9 \, . \, y = 9 \, (x - y)$.

Nyní se budeme zaobírat čísly trojciferným. Vytváříme dle Prof. Jana Kopky tak zvané **hrozny problémů**. Opět se dohodneme, že k jednocifernému číslu např. 3 je reverzním trojciferným číslem číslo 300 a k číslu 300 je reverzním trojciferným číslem číslo 003. K číslu například 27 je reverzním trojciferným číslem číslo 720 a k číslu 720 je reverzním trojciferným číslem číslo 027. Opět budeme chtít odčítat od sebe navzájem trojciferná reverzní čísla, která k sobě patří a to vždy od většího menší. Budeme zase chtít najít co je zajímavé. Dojdeme k závěru, že výsledkem je vždy násobek čísla 99 a při dalším zkoumání zjistíme, že jde o násobek rozdílu čísel zapsaných první a poslední cifrou většího k sobě patřících reverzních čísel. Opět provedeme matematický důkaz proč tomu tak je: $a > å$, $a = 100 . x + 10 . y + z$, $å = 100 . z + 10 . y + x$, pak

$a – å = 100 . x + 10 . y + z – (100 . z + 10 . y + x) = 100 . x + 10 . y + z - 100. z - 10 . y – x$
$= 99 . x – 99 . z = 99 (x – z)$.

Můžeme pokračovat obecně i rozdílem čtyřciferných reverzních čísel, ale zde již uvidí, že písemné odečtení je rychlejší než obecně odvozený předpis.

$a > å$, $a = 1000 . x + 100 . y + 10 u + z$, $å = 1000 . z + 100 . u + 10 . y + x$, pak

$a – å = 1000 . x + 100 . y + 10 . u + z – (1000 . z + 100 . u + 10 . y + x) =$
$1000 . x + 100 . y + 10 . u + z – 1000 . z - 100 . u - 10 . y - x =$
$999 . x + 90 . y - 90 . u - 999 . z = 999 . (x – z) + 90 . (y – u)$.

Například: 4853 – 3584 = 999 . 1 + 90 . 3 = 999 + 270 = 1269

Dále přistoupíme k reverzním číslům, která jsou navzájem stejná. Nazýváme je palindromy, neboť se čtou stejně odpředu i odzadu. Nejznámějším palindromem v českém jazyce je věta: „Kobyla má malý bok“. Nerespektujeme zde délku souhlásek. V matematice jsou zajímavé čtyřciferné palindromy. Vypíšeme podle velikosti určitý počet, záleží na nás jak velký počet, čtyřciferných palindromů. Opět si položíme otázku, zda na těchto palindromech není něco zajímavého. Nejmenším čtyřciferným palindromem je číslo 1001. Další čtyřciferné palindromy jsou podle velikosti čísla 1111, 1221, 1331, 1441, 1551, atd. Číslo 1001 je dělitelné číslem 11. Každé následující číslo je o 110 větší. Vzdálenost čísel je 110. Číslo 1001 je násobkem čísla 11, rozdíly (vzdálenosti) jsou také násobkem čísla 11, musí být tedy každý následující palindrom také násobkem čísla 11, respektive je dělitelný 11. Došli jsme k závěru, že vzdálenost čtyřciferných palindromů je 110, ono tomu však vždy tak není. Pokud se při přechodu od jednoho palindromu k dalšímu změní číslice na místě tisíců, pak je diference jiná. Přijdeme na to, že vzdálenost těchto palindromů je 11. Číslo 11 je také násobkem čísla 11 (je dělitelné 11). Je tedy vše v pořádku a ukázali jsme si, že čtyřciferné palindromy jsou násobkem čísla 11. Další dotaz může být: „Kolik je všech čtyřciferných palindromů?“. Správná odpověď je 90. Určitě přijdeme na systém jak počet čtyřciferných palindromů určit.

Dělitelnost čtyřciferných palindromů snadno dokážeme velmi jednoduchým důkazem. Zapíšeme libovolný čtyřciferný palindrom ve tvaru *abba* , kde *a, b* jsou číslice v desítkové soustavě. Provedeme rozvoj čísla tohoto čísla v desítkové soustavě

$abba = 1\,000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 11 (91a + 10b)$. Závěr ukazuje, že palindrom *abba* je dělitelný 11 (resp. je násobkem čísla 11).

Ukázali jsem si hrozny problémů a jak se držet hesla, že máme více produkovat než reprodukovat.
A nyní se podíváme teoreticky na problémové vyučování.

1. 12. Problémové vyučování ve školské matematice

Problémovým vyučováním se rozumí postupné řešení, pro výukové cíle vytvořených, problémových situací.

Co je to **problémová situace**?
Problémová situace představuje více či méně jasně poznanou obtíž, provázenou nesouladem mezi dosavadními znalostmi a tím, co je pro řešení vzniklé nebo zadané úlohy třeba.
Úloha vytvářející problémovou situaci se nazývá **problémovou úlohou** nebo krátce **problémem.**

„Myšlení začíná s problémovou situací“.
Ne každá problémová situace vyvolává myšlení. Myšlení nevzniká zejména tehdy, když hledání cest k vyřešení problémové situace je pro žáky, v dané etapě vyučování nepřiměřené.

Entropie – míra neurčitosti nám udává náročnost řešení problémové úlohy.

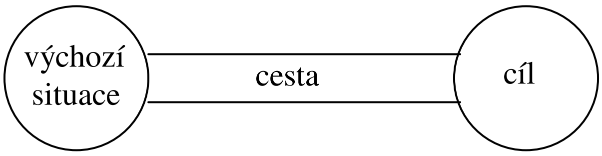
Problém je taková situace v níž máme dosáhnout nějaký cíl, ale přímá cesta k němu je zablokována.

Prof. Jan Kopka (UJEP) uvádí ve své publikaci *Hrozny problémů ve školské matematice*:

Problém má tři složky:

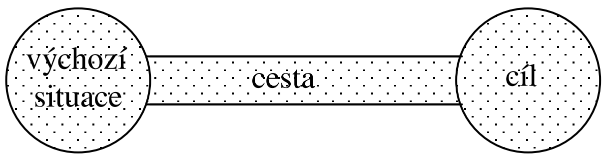
1. **Výchozí situace**, v níž popisujeme souvislosti a poskytujeme informace nebo údaje.
2. **Cíl,** který chce řešitel dosáhnout.
3. **Cesta** od výchozí situace k cíli, která pro řešitele může, ale také nemusí být zřejmá či dosažitelná.

Grafické znázornění:



1. **Cvičení (rutinní problémy)**
   - Výchozí situace je přesně popsána (situace je uzavřená),
   - cíl je přesně zadán (cíl je uzavřen),
   - cesta je známa.

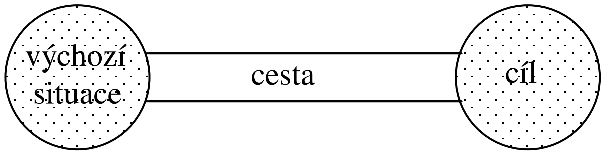
Grafické znázornění:



Příklad rutinního problému:
Příklad, žák umí vyřešit rovnici $x + 7 = 10$ a my mu zadáme rovnici $x + 6 = 9$, aby ji vyřešil, zadali jsme mu rutinní problém. Žák umí vypočítat písemně součet dvou dvouciferných čísel bez přechodu přes 10, zadali jsme mu jiný obdobný příklad bez přechodu přes 10.

2. **Úlohy (nerutinní problémy)**
   - Výchozí situace je přesně popsána (je uzavřená),
   - cíl je přesně zadán (je uzavřen),
   - cesta není známa.

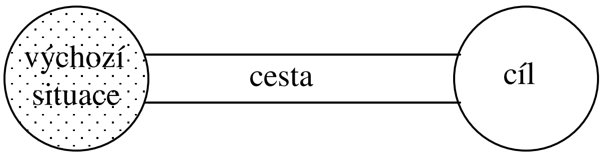
Grafické znázornění:



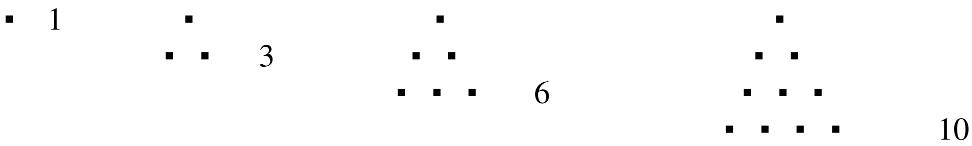
Příklad nerutinního problému:
Žák umí písemný součet dvou dvouciferných čísel, např. včetně přechodů přes 10. Zadáme mu písemný součet dvou tříciferných čísel, který nikdy neprováděl.

3 . **Zkoumání**
Stále více se v didaktice matematiky více a více objevuje tento pojem.

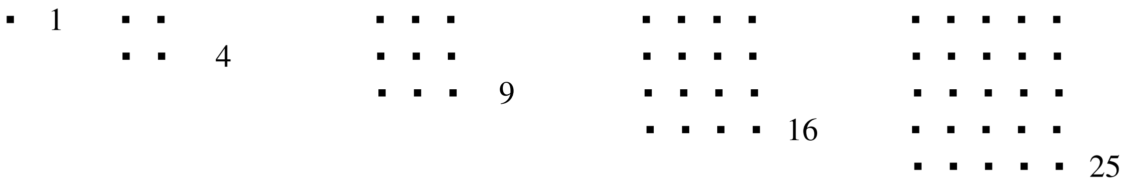
- Výchozí situace je přesně popsána,
- cíl není přesně zadán nebo není zadán vůbec,
- cesta k cíli samozřejmě nemůže být známa.
- Grafické znázornění:



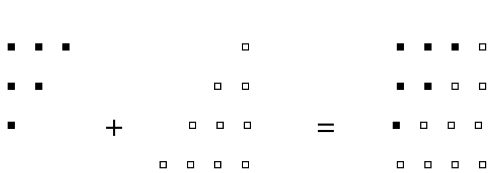
Příklady matematického zkoumání:
1. Žák má dosadit za proměnnou □ znaménka operací +, - a zkoumat výsledky, které dostane: 8 □ 4 □ 2 □ 1 = .
2. Trojúhelníková čísla jsou 1, 3, 6, 10, 15,.............

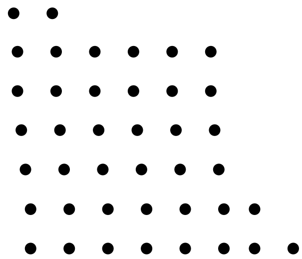


Čtvercová čísla jsou 4, 9, 16, 25,..............



Zkoumejte součty dvou sousedních trojúhelníkových čísel
Zkoumejte zda existují čísla, která jsou současně trojúhelníková a čtvercová.
Graficky: 6 + 10





Heuristické strategie

Matematické zkušenosti žáka nejsou úplné, pokud nikdy neměl možnost řešit problém, který si sám vymyslel.
Je těžké mít dobrý nápad, když z dané oblasti známe málo a je nemožné ho mít, pokud neznáme nic. Dobré nápady jsou založeny na minulých zkušenostech a dříve získaných znalostech.

G. Polya

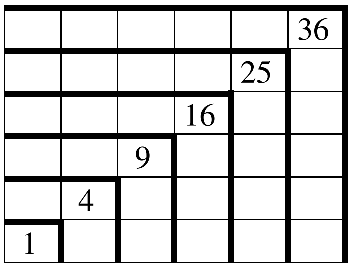
Ukažme si konkrétní příklad. Použitý problém je zajímavý i sám o sobě a řešili jej již matematikové v antickém Řecku. Vlastnost lichých čísel, o níž se v problému hovoří, je vedla k tomu, že lichá čísla začali nadřazovat nad čísla sudá.

Problém: Zkoumejme součty prvních několika za sebou jdoucích lichých přirozených čísel: 1,3,5,7,9,11,13,15,17,..........

1+3=4 , 1+3+5=9, 1+3+5+7=16, 1+3+5+7+9=25,.........atd.

Podívejme se na vizualizaci této skutečnosti

2^2 3^2 4^2

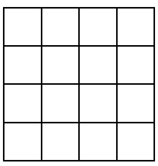


V určitém okamžiku přijdeme na to, že se jedná o druhé mocniny počtu sčítaných čísel a radostně zakřičíme „Našel jsem!“ , řecky „Heuréka!“ a proto se tento způsob hledání nazývá **heuristická strategie.**

Systematické experimentování

Problém: Zjistěte, kolik čtverců je ve čtvercové síti $n \, . \, n$?

Konkrétní příklad : 4 . 4



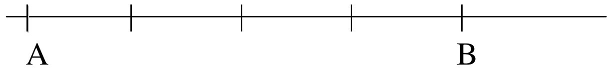
Počet čtverců velikosti 1 . 1 .... 4^2 (4 čtverce vedle sebe a 4 nad sebou)
Počet čtverců velikosti 2 . 2 .... 3^2 (3 vedle sebe a 3 nad sebou)
Počet čtverců velikosti 3 . 3 .... 2^2 (2 vedle sebe a 2 nad sebou)
Počet čtverců velikosti 4 . 4 .... 1^2
Celkový počet čtverců......................... $4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 30$

Obdobně 3 . 3, 5 . 5, atp.

Analogie:

Předchozí problém přeneseme do jednorozměrného prostoru:
Určete celkový počet úseček na úsečce délky n, která je $(n - 1)$ body rozdělena na jednotkové úsečky.
Konkrétní příklad:

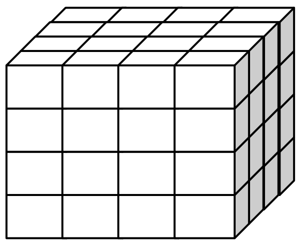
Určete celkový počet úseček na úsečce délky 4, která je třemi body rozdělena na jednotkové úsečky.



Počet úseček délky 1...............................4
Počet úseček délky 2...............................3
Počet úseček délky 3...............................2
Počet úseček délky 4...............................1
Celkový počet úseček ....4 + 3 + 2 + 1

Obdobně úsečka délky 3, respektive 5, atp.

Problém přeneseme do trojrozměrného prostoru:
Problém: Zjistěte, kolik krychlí je v krychli o rozměru $n \,.\, n \,.\, n$?
Konkrétní příklad
Zjistěte, kolik krychlí je v krychli o rozměru 4 . 4 . 4 ?



Počet krychlí velikosti 1 . 1 . 1 ....4^3 (4 krychle vedle sebe, 4 za sebou, 4 nad sebou)
Počet krychlí velikosti 2 . 2 . 2..........3^3
Počet krychlí velikosti 3 . 3 . 3..........2^3
Počet čtverců velikosti 4 . 4 . 4.........1^3
Celkový počet čtverců......................... $4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3 = 90$

Dostali jsme tak zvaný **hrozen problémů.**
V matematice se dá dokázat, že počet úseček je dán vzorcem

$$n^1 + (n-1)^1 + \ldots + 1^1,$$

že počet čtverců je dán vzorcem

$$n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 1^2,$$

že počet krychlí je dán vzorcem

$$n^3 + (n-1)^3 + \ldots + 1^3.$$

Příklad 38:
a) Pokud budeme postupně zvětšovat délku úsečky, tak její délka bude přímo úměrná tomuto zvětšování a počet „vrcholů“ těchto úseček bude 2, lze napsat 2^1 (jednorozměrný prostor).
b) Budeme postupně zvětšovat velikost stran čtverce. Čtverec o velikosti strany 1 má $2^2 = 4$ vrcholy, obsah jeho plochy je 1, obvod jeho stran je 4, čtverec o velikosti strany 2 má $2^2 = 4$ vrcholy, obsah jeho plochy je 4, obvod jeho stran je 8, čtverec o velikosti strany 3 má $2^2 = 4$ vrcholy, obsah jeho plochy je 9, obvod jeho stran je 12, čtverec o velikosti strany 4 má $2^2 = 4$ vrcholy, obsah jeho plochy je 16, obvod jeho stran je 16, atd. (Jde o dvojrozměrný prostor).
Délku strany čtverce označíme x

Pokud postupně zvětšujeme velikost čtverce, tak dojdeme k závěru, že pro počet vrcholů y platí: $y = 0 . x + 2^2$,
pro jeho obvod y platí : $y = 4 . x$,
pro jeho obsah y platí : $y = x^2$.
c) Budeme postupně zvětšovat velikost stran krychle. Krychle o velikosti strany 1 má $2^3 = 8$ vrcholů, její objem je 1, délka hran je 12, obsah jejího pláště 6, krychle o velikosti strany 2 má $2^3 = 8$ vrcholů, její objem je 8, délka hran je 24, obsah jejího pláště 24, krychle o velikosti strany 3 má $2^3 = 8$ vrcholů, její objem je 27, délka hran je 18, obsah jejího pláště 54, atd. (Jde o trojrozměrný prostor).
Délku strany čtverce označíme x
Pokud postupně zvětšujeme velikost krychle, tak dojdeme k závěru, že pro počet vrcholů y platí: $y = 0 . x + 2^3$,
pro délku hran y platí: $y = 12 . x$,
pro obsah pláště y platí: $y = 6 . x^2$,
pro její objem: $y = x^3$.
Jde opět o hrozny problémů.

Motivace:
Při motivování se snažíme získat zájem žáků nebo jinak řečeno zaměřit jejich pozornost určitým směrem

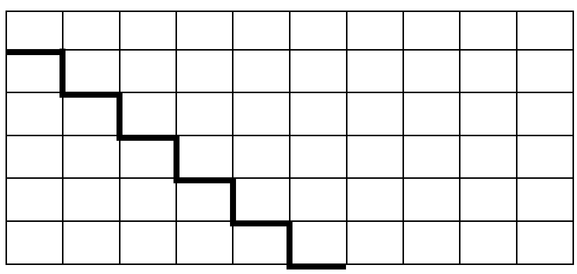
Budeme motivovat žáky úlohou pro pozdější příklady na součet členů aritmetické posloupnosti. Tady vidíte, že i látku střední školy můžeme jako problém použít již na 1. stupni ZŠ.

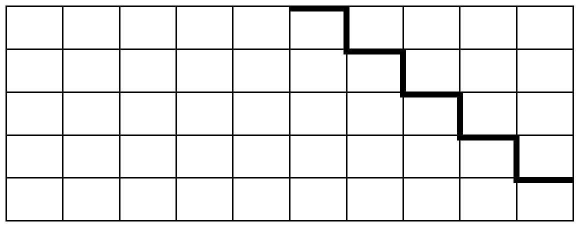
Problém: První den ti dám 1 korunu, druhý den 2 koruny, třetí den 3 koruny a tak dále. Kolik korun ode mne dostaneš za rok (365 dní). Co je lepší dostávat peníze v průběhu jednoho roku nebo dostat na ruku ihned 50 000 korun ?
Dostal jsem od žáka krásnou odpověď: *„Já bych si vzal 50 000 korun, protože je mám hned a na ruku.“*
Měl jsem se ptát „Co je víc? a ne „Co je lepší?
Řešení : $s_{365} = (1 + 365). 365/2 = 66796$
Více peněz obdržíme, budeme-li je pobírat postupně.

Ukážeme si příklad třeba 10 dní :

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10
10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 je to 2 krát
----
11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 = 10 . (1 + 10)

$s_{10} = 10 . (1 + 10) : 2 = 55$





Vykládá se, nevíme jak je příběh pravdivý, že německý matematik Karl Fridrich Gauss (1777-1875) když chodil do venkovské školy, dostali žáci za úkol spočítat součet čísel od 1 do 100, neboť pan učitel si potřeboval jít na venkovské škole podojit kozu. Pan učitel zadal úkol a mladý Gauss se hned hlásil a řekl součet je 5 050. Pan učitel byl překvapen a ptal se jak na součet přišel a Gauss řekl: „Součet prvního a posledního čísla je 101, součet druhého a předposledního čísla je také 101 a takových součtů je 50, tedy 50 . 101 je 5 050.“ A tím vzniklo rčení, když se něco nestačí udělat „Koza zůstala nepodojená!“
Problém : Naučíme žáky písemně sčítat dvojciferná čísla, nejdříve bez přechodu přes deset a pak s přechodem přes 10 jim zadáme jako problém .
Sečti písemně 34 + 52 a 26 + 37 .

Motivujeme přes peníze.
34 + 52 oooo oo
26 + 37 oooooo ooooooo Směníme: oooooooooo =
ooo

34	26
<u>52</u>	<u>37</u>
86	63

2. Binární relace

Při práci s dítětem v mateřské škole se zaměřujeme na to, aby dítě pochopilo vztahy. Vysvětlíme si z hlediska matematiky jak matematika vztahy mezi prvky množin zavádí. Z hlediska matematiky vztahy mezi dvěma prvky jsou **binární relace**.

2.1. Uspořádaná dvojice

Jak z matematiky, tak z oblasti mimomatematické máme mnoho zkušeností s tzv. uspořádanými dvojicemi.

Příklad 39:

Posíláme-li doporučený dopis, tak je přesně určeno kam máme napsat odesílatele a kam příjemce, obdobně je to na podacím lístku. První je zapsán odesílatel, druhý příjemce. Budeme-li zapisovat uspořádané dvojice je na prvním místě zapsán odesílatel, na druhém příjemce.
[Tomčal, Šípek].....odesílatelem je pan Tomčal, příjemcem pan Šípek
Jedou-li dva lidé na dvojmístném motocyklu, bude nás zajímat nejen kdo na tomto motocyklu jede, ale i kdo řídí a kdo se veze, tedy v jakém pořadí na motocyklu sedí. Zvlášť důležité je pro policii při porušení dopravních předpisů, kdo řídil.

[Tůma, Novotný] .... na motocyklu řídí Tůma a veze se Novotný

Máme-li například v dané souřadnicové soustavě zakreslit bod A o souřadnicích [3 ; 4] je zřejmé, že když zaměníme pořadí složek ve dvojici, dostaneme bod jiný. Chceme-li zakreslit daný bod, nestačí znát dvojici čísel, ale musíme vědět i které je první.

Uspořádané dvojice zapisujeme do hranatých závorek.

Obdobně při zápisu čísel je důležité, které číslice je první a která druhá. Číslo 57 je jiné než číslo 75. (Zde však k zápisu hranaté závorky nepoužíváme).

V hotelu jsou čísla pokojů volena tak, že první číslice udává poschodí a další dvě číslice číslo pokoje v poschodí. Snadno určíte, kde naleznete pokoj 209.

Dvojice u které rozhoduje pořadí prvků, se nazývá **uspořádaná dvojice.**

Zapisujeme [a, b] . a....nazýváme první složkou dvojice, b .... nazýváme druhou složkou dvojice

2.2. Kartézský součin

Vyjděme z příkladu :

Příklad 40:

Ivan, Jan, Andrea a Zdeňka byli na výletě, každý napsal pohlednici své učitelce paní Novákové. Kolik pohledů dostala paní učitelka Nováková? Paní učitelka dostala tyto pohledy, které zapíšeme jako odesílatel a příjemce: [Ivan, Nováková] , [Jan, Nováková] , [Andrea, Nováková] a [Zdeňka, Nováková]. Celkem obdržela 4 pohledy.

Děti se dohodly, že ještě pošlou pohledy paní učitelce Markvartové. Ještě tedy poslaly pohledy [Ivan, Markvartová] , [Jan, Markvartová] , [Andrea, Markvartová] a [Zdeňka, Markvartová]. Celkem tedy poslaly 8 pohledů.

Vytvořili jsme všechny dvojice, kde na prvním místě byli odesílatelé a na druhém místě příjemci. Označíme množinu odesílatelů **O** ={ I, J, A, Z} a množinu příjemců **P** ={N, M}, dostali jsme uspořádané dvojice [I, N], [J, N], [A, N], [Z, N], [I, M], [J, M], [A, M], [Z, M].

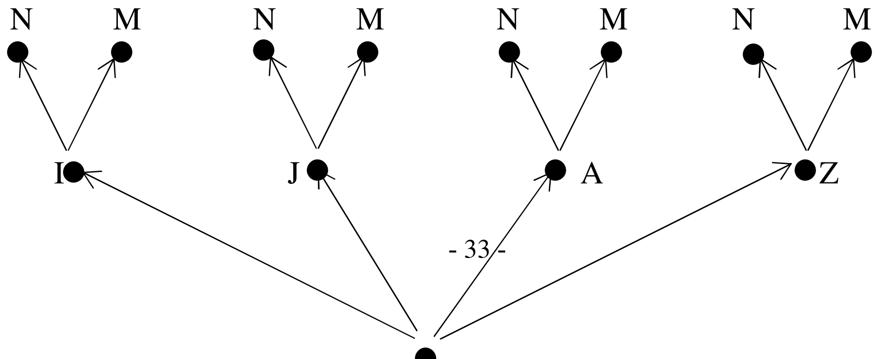
Množinu všech uspořádaných dvojic označíme

C = { [I, N], [J, N], [A, N], [Z, N], [I, M], [J, M], [A, M], [Z, M] }.

Množinu **C** najdeme pomocí diagramu:

	N	M
I	[I, N]	[I, M]
J	[J, N]	[J, M]
A	[A, N]	[A, M]
Z	[Z N]	[Z, M]

Též můžeme hledat pomocí **stromu**:



Kartézský součin množin A a **B** je množina všech uspořádaných dvojic, kde první složkou dvojice je prvek množiny **A** a druhou složkou prvek množiny **B**. Zapisujeme **A** x **B** = **C**.

Pomocí proměnné můžeme zapsat **C** = { [a, b] : a $\in$ **A** $\wedge$ b $\in$ **B**}.

Příklad 41:

Házíme-li jednou kostkou ze hry „Člověče nezlob se", dostáváme množinu všech možných výsledků **A** = {1, 2, 3, 4, 5, 6 }. Které všechny výsledky dostaneme házením dvěma kostkami?
Vytvořme si kartézský součin **A** x **A** = { [a, b] : a $\in$ **A** $\wedge$ b $\in$ **A**}.
A x **A** = { [1,1], [1,2], [1,3], [1,4], [1,5], [1,6], [2,1], [2,2], [2,3], [2,4], [2,5], [2,6], [3,1], [3,2], [3,3], [3,4], [3,5], [3,6], [4,1], [4,2], [4,3], [4,4], [4,5], [4,6], [5,1], [5,2], [5,3], [5,4], [5,5], [5,6], [6,1], [6,2], [6,3], [6,4], [6,5], [6,6] } Součty bez problémů spočítáme.

2.3. Binární relace v množině

Vyjdeme opět z příkladu

Příklad 42:

Ve třídě jsme měřili žáky a naměřili jsme tyto jejich výšky: Adam-147 cm, Bedřich – 142 cm, David -142 cm, Emil – 143 cm, František – 151 cm, Ivan – 140 cm. Žáky chceme porovnávat podle jejich výšky. Teoreticky můžeme porovnávat i sami sebe. Vytvoříme všechny možné uspořádané dvojice těchto chlapců. Množinu chlapců A, B, D, E, F, I označíme – **H**.
H = { A, B, D , E, F, I } . Vytvoříme kartézský součin **H** x **H.** Z 36 uspořádaných dvojic vybereme pouze ty, kde první chlapec je menší než druhý, kde bude platit *x* je menší než *y*.
Zapíšeme **R** = { [*x*, *y*]$\in$ **H** x **H** : $x < y$ }, **R** = { [I, A], [I, B], [I, D], [I, E], [I, F], [B, A], [B, E], [B, F], [D, A], [D, E], [D, F], [A, F] }
Snadno se přesvědčíme, že **R** $\subset$ **H** x **H**.
Uveďme si ještě příklad rodiny s těmito členy: otec, matka, syn Jan, syn Karel, dcera Alena. Označíme si malými písmeny: otec-o, matka-m, syn Jan-j, syn – Karel-k, dcera Alena-a.
Rodinu označíme jako množinu **M** = {o, m, j, k, a}. Uvedeme si všechny uspořádané dvojice [*x*, *y*] kartézského součinu **M** x **M** pro které platí, že „ *x* je synem *y*". Jde o tyto uspořádané dvojice [j, o], [j, m], [k, o], [k, m]. Vztah „být synem" je reprezentován těmito čtyřmi uspořádanými dvojicemi.
Množina uspořádaných dvojic **S** = { [j, o], [j, m], [k, o], [k, m] } nám charakterizuje vztah neboli relaci „být synem" v množině **M**, tuto množinu **S**, která je podmnožinou kartézského součinu **M** x **M** budeme nazývat **binární relace v množině M**.

Binární relace v množině M je množina, která je podmnožinou kartézského součinu **M** x **M** .

Budeme zapisovat x **R** y respektive $[x, y] \in$ **R** a čteme „x je v relaci s y“ , respektive uspořádaná dvojice $[x, y]$ je prvkem relace **R**.

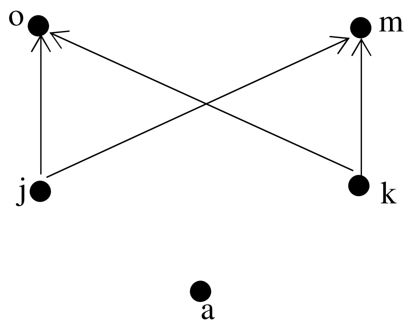
2. 4. Grafické znázornění binární relace v množině.

Binární relaci v množině **M** můžeme znázornit:
a) uzlovým grafem,
b) kartézským grafem,
c) šachovnicovým grafem.

a) **Uzlový graf:**

Příklad 43:

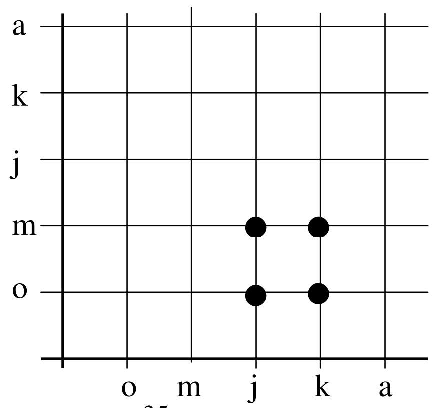
Znázorníme relaci **S** = { [j, o], [j, m], [k, o], [k, m] } v množině **M** = {o, m, j, k, a} uzlovým grafem.



Prvky množiny **M** jsme znázornili body, nazýváme je **uzly**. Uspořádané dvojice množiny **S** , znázorníme šipkami (která vychází např. z uzlu j a přichází k uzlu m) a **nazýváme je orientované hrany**. Pokud se šipka vrací do téhož bodu nazýváme ji **smyčka**.

b) **Kartézský graf**:

Příklad 44:
Kartézský graf je nazván po francouzském matematikovi René Descartesovi (1596-1650), který zavedl metodu pravoúhlých souřadnic (latinsky byl nazýván Kartézius).
Zvolíme pravoúhlé souřadnice. První složku uspořádané dvojice znázorníme na vodorovné ose, druhou na svislé ose. Průsečík přímek nám určuje uspořádanou dvojici.
Znázorníme relaci **S** = { [j, o], [j, m], [k, o], [k, m] } v množině **M** = {o, m, j, k, a} kartézským grafem.



c) **Šachovnicový graf**:
Šachovnicový graf určuje pole stejným způsobem jako se určují pole na šachovnici.
Znázorníme relaci **S** = { [j, o], [j, m], [k, o], [k, m] } v množině **M** = {o, m, j, k, a} šachovnicovým grafem:

a					
k					
j					
m			[j,m]	[k,m]	
o			[j,o]	[k,o]	
	o	m	j	k	a

2. 5. Typy binárních relací.

Kartézský součin **M** x **M** je jako každá množina podmnožinou sama sebe a tedy je podle definice binární relací v množině **M**, říkáme ji **úplná relace**.
Prázdná množina je podmnožinou každé množiny a tedy je i podmnožinou kartézského součinu **M** x **M,** tedy je to relace v množině **M**, říkáme ji **prázdná relace**.
Nechť **R** je relace v množině **M .** Znakem **R´** označíme **doplňkovou relaci** k relaci **R** v množině **M**, pro kterou platí, že $\mathbf{R}' = \{ [x, y] \in \mathbf{M} \times \mathbf{M} : \neg\, [x, y] \in \mathbf{R} \}$. Obsahuje všechny uspořádané dvojice z **M** x **M** a nepatří do **R**.
Nechť **R** je relace v množině **M .** Znakem $\mathbf{R}^{-1}$ označíme **inverzní relaci** k relaci **R** v množině **M**, pro kterou platí, že $\mathbf{R}' = \{ [x, y] \in \mathbf{M} \times \mathbf{M} : y \ \mathbf{R}\ x\}$. **Inverzní relaci** k relaci **R** dostaneme tak, že zaměníme pořadí složek ve všech uspořádaných dvojicích tvořících relaci **R**.

2.6. Vlastnosti binárních relací.
Binární relace v množině **M** mají tyto vlastnosti:
a) Binární relace v množině **M** je **reflexivní**, právě když $\forall x \in \mathbf{M} : x \ \mathbf{R}\ x$.
b) Binární relace v množině **M** je **antireflexivní**, právě když $\forall x \in \mathbf{M} : \neg\,(x \ \mathbf{R}\ x)$.
c) Binární relace v množině **M** je **symetrická**, právě když $\forall x, y \in \mathbf{M} : x \ \mathbf{R}\ y \Rightarrow y \ \mathbf{R}\ x$.
d) Binární relace v množině **M** je **antisymetrická**, právě když
$\forall x, y \in \mathbf{M} : (x \neq y \wedge x \ \mathbf{R}\ y) \Rightarrow \neg\,(y \ \mathbf{R}\ x)$.
e) Binární relace v množině **M** je **tranzitivní**, právě když
$\forall x, y, z \in \mathbf{M} : (x \ \mathbf{R}\ y \wedge y \ \mathbf{R}\ z) \Rightarrow x \ \mathbf{R}\ z$.
f) Binární relace v množině **M** je **konektivní**, právě když
$\forall x, y \in \mathbf{M} : (x \neq y \Rightarrow (x \ \mathbf{R}\ y \vee y \ \mathbf{R}\ x)$.

Příklad 45:
a) Aby byla relace v množině **M** = { a, b, c, d } reflexivní musí podle definice reflexivnosti relace obsahovat aspoň všechny uspořádané dvojice [a, a], [b, b], [c, c], [d,d] . Kromě nich však může obsahovat další uspořádané dvojice z kartézského součinu **M** x **M**.
Reflexivní relací $\mathbf{R}_1$ je například relace v množině **M** mající tyto prvky
$\mathbf{R}_1$ = {[a, a], [b, b], [c, c], [d,d], [a, c], [d, a]}.
b) Aby byla relace v množině **M** = { a, b, c, d } antireflexivní nesmí podle definice antireflexivnosti relace obsahovat žádnou uspořádanou dvojici stejných prvků. Uspořádané dvojice, jejichž složky se sobě nerovnají obsahovat může.

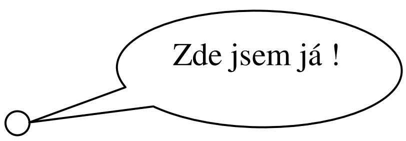
Antireflexivní relací $\mathbf{R}_2$ je například relace v množině **M** mající tyto prvky
$\mathbf{R}_2$ = { [a, c], [d, b]}.
c) Aby byla relace v množině **M** = { a, b, c, d } symetrická musí podle definice symetričnosti relace platit: pokud je prvkem relace určitá uspořádaná dvojice, musí této relaci patřit i uspořádaná dvojice k ni „obrácená“ (reverzní) .
Symetrickou relací $\mathbf{R}_3$ je například relace v množině **M** mající tyto prvky
$\mathbf{R}_3$ = {[a, a], [a, b], [b, a], [d,d], [a, c], [c, a]}.
d) Aby byla relace v množině **M** = { a, b, c, d } antisymetrická podle definice antisymetričnosti relace pak nesmí k žádné uspořádané dvojici různých prvků, kterou obsahuje, obsahovat uspořádanou dvojici obrácenou (reverzní), nesmí obsahovat i uspořádanou dvojici prvků stejných, neboť obsahuje tím i uspořádanou dvojici obrácenou.
Antisymetrickou relací $\mathbf{R}_4$ je například relace v množině **M** mající tyto prvky
$\mathbf{R}_4$ = {[a, d], [d, c], [b, a]}.
e) Aby byla relace v množině **M** = { a, b, c, d } tranzitivní musí podle definice tranzitivnosti relace platit: pokud obsahuje takové uspořádané dvojice, že druhá složka jedné z nich je první složkou druhé, pak musí též obsahovat takovou uspořádanou dvojici, že její první složkou je první složka první uspořádané dvojice a druhou složkou druhá složka druhé uspořádané dvojice.
Tranzitivní relací $\mathbf{R}_5$ je například relace v množině **M** mající tyto prvky
$\mathbf{R}_5$ = {[a, a], [a, b], [b, c], [a, c], [c, c], [c, a]}.
f) Aby byla relace v množině **M** = { a, b, c, d } konektivní musí podle definice konektivnosti relace platit: pokud si vybereme kterékoliv dva různé prvky množiny **M,** musí relace obsahovat aspoň jednu z uspořádaných dvojic, které z těchto dvou prvků lze utvořit.
Konektivní relací $\mathbf{R}_6$ je například relace v množině **M** mající tyto prvky
$\mathbf{R}_6$ = {[a, b], [b, a], [a, c], [d, a], [b, c], [d, b], [c, d] }.

Příklad 46:

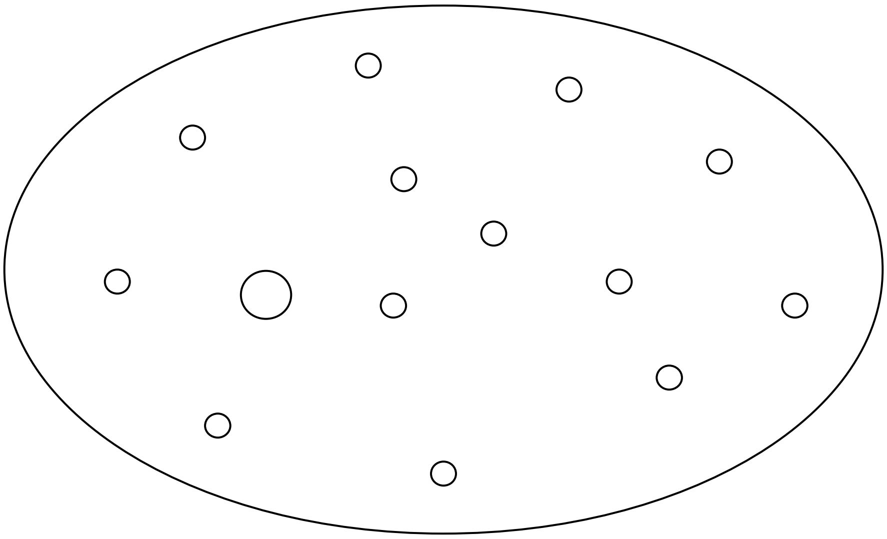
Můžeme určit vlastnosti některých relací:
a) „Větší než“ v množině přirozených čísel, tj. relace $\mathbf{R}_1 = \{ [x, y] \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : x > y \}$.
Tato relace je antisymetrická, antireflexivní, tranzitivní a konektivní.
b) „Rovnoběžnost všech přímek“ v množině všech přímek **T** v prostoru, tj. relace
$\mathbf{R}_2 = \{ [x, y] \in \mathbf{T} \times \mathbf{T} : x \parallel y \}$.
Tato relace je reflexivní, symetrická a tranzitivní.
c) „Kolmost všech přímek“ v množině všech přímek **T** v prostoru, tj. relace
$\mathbf{R}_3 = \{ [x, y] \in \mathbf{T} \times \mathbf{T} : x \perp y \}$.
Tato relace je antireflexivní a. symetrická
d) „Je dělitelem “ v množině přirozených čísel, tj. relace $\mathbf{R}_1 = \{ [x, y] \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : x \mid y \}$.
Tato relace je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Příklad 47:

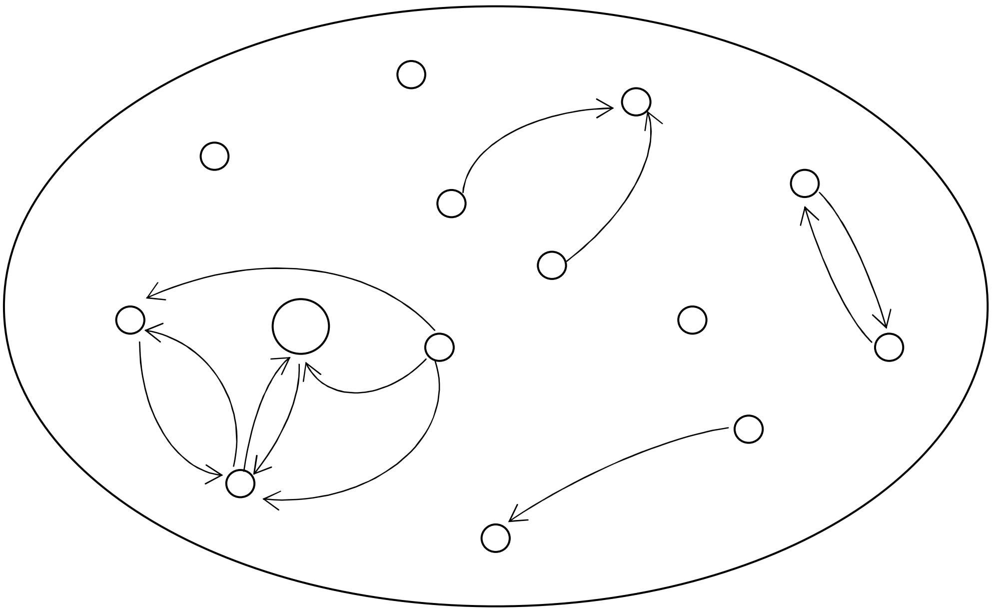
Podívejme se na zajímavou úlohu na hru dětí.



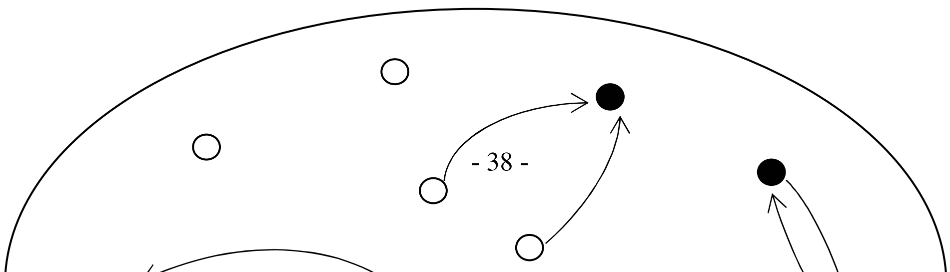
Zde jsem já se svými přáteli, hrajeme si na dvoře našeho domu. Ty jsi uhádl, že já jsem ten velký kroužek.



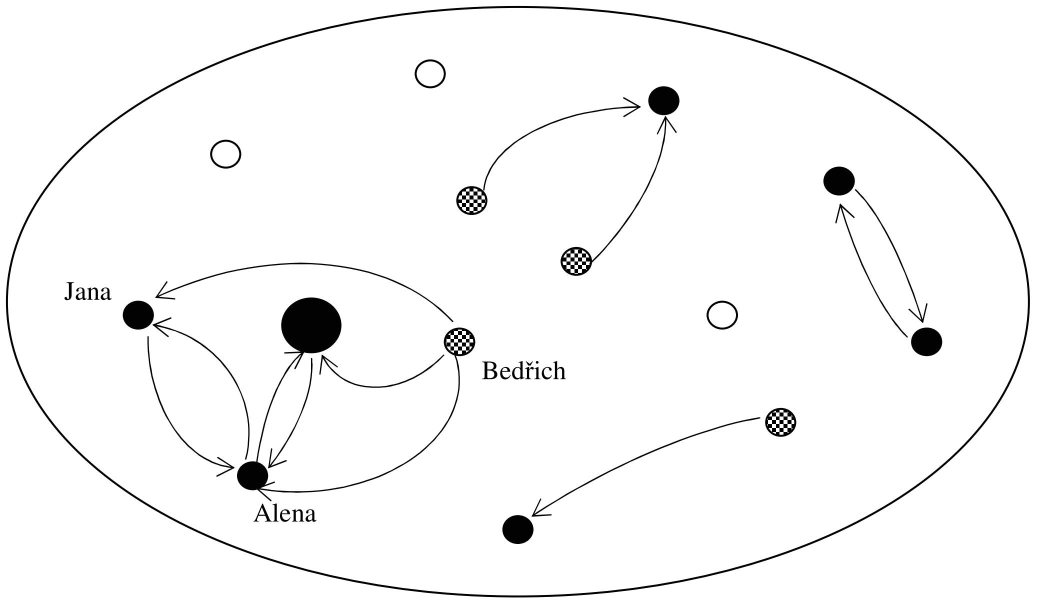
Dal jsem okolo nás provaz, abych ukázal, že tvoříme množinu.
Chtěl bys určitě vědět, kdo je chlapec a kdo je děvče. To je pro tebe zlé, všichni jsou kulatí. Nevíš zda jsem chlapec nebo děvče.
Hrála se hra „ukázat svoji sestru“. Zde je to, co vzniklo:



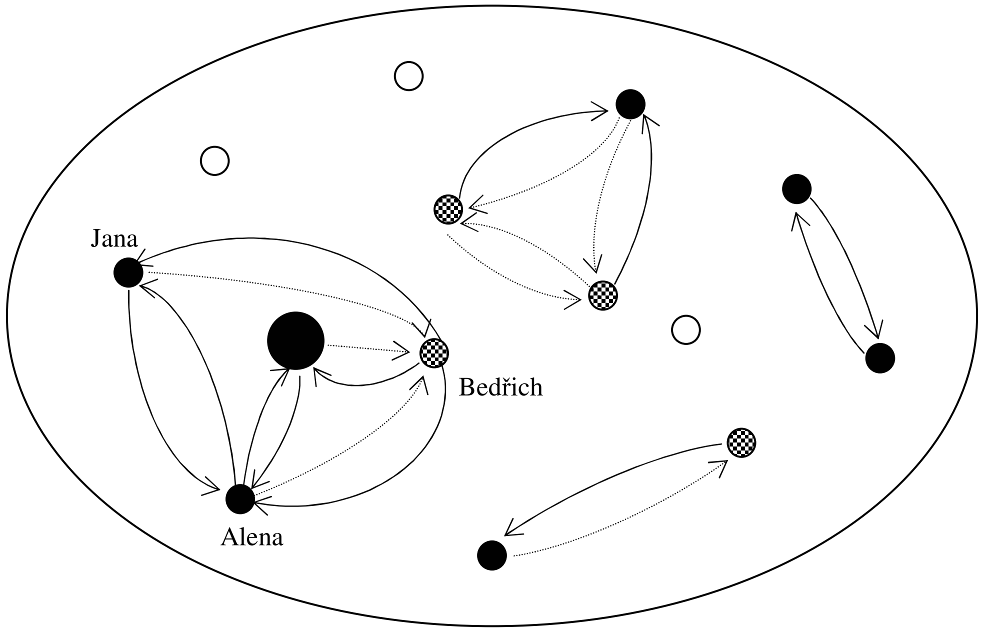
A nyní, můžeš objevit děvčata ? Označ je na tomto obrázku červeně. Všechny děti označené červeným bodem jsou děvčata.



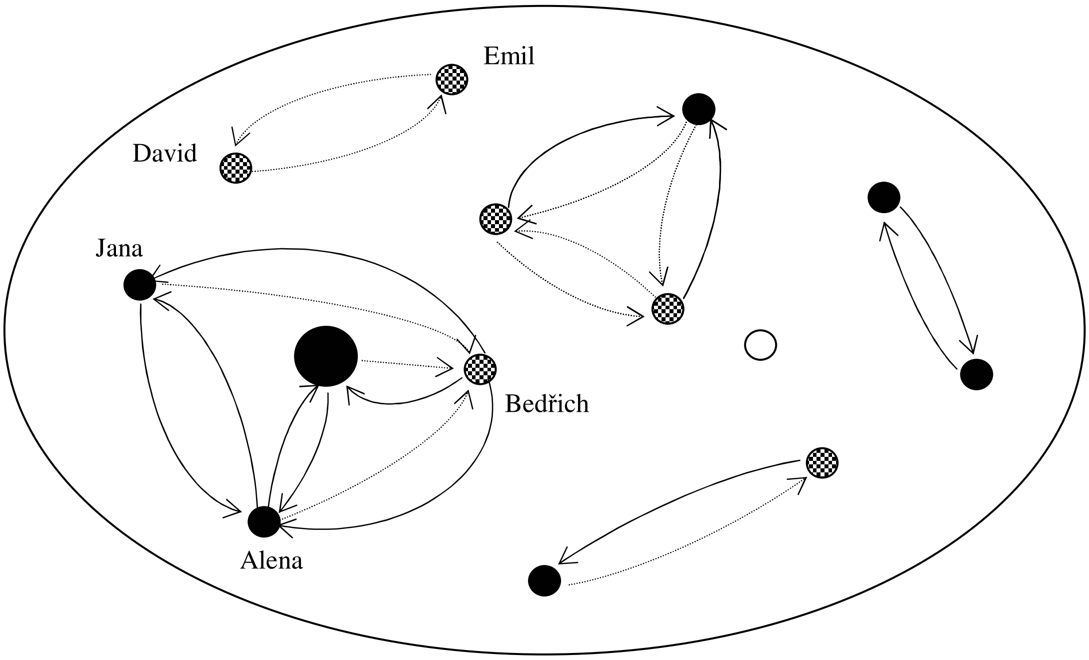
Neboť každá sestra je děvče a ty vidíš, že já jsem děvče. Vidíš i kde jsou moje setry Jana a Alena, které si hrají s námi. Nevidíš, ale moji setru Karolínu, která je na návštěvě u babičky. A také vidíš mého bratra Bedřicha, který na nás ukazuje na všechny tři. My na něj neukazujeme, protože on není naše sestra! Protože se hrála hra „ukázat svoji setru“ byla nalezena děvčata a také můj bratr Bedřich, kterého mám ráda. Protože se hrála hra „ukázat svoji sestru“, mohli být nalezeni i někteří chlapci. Označ modře všechny chlapce, které můžeš najít!



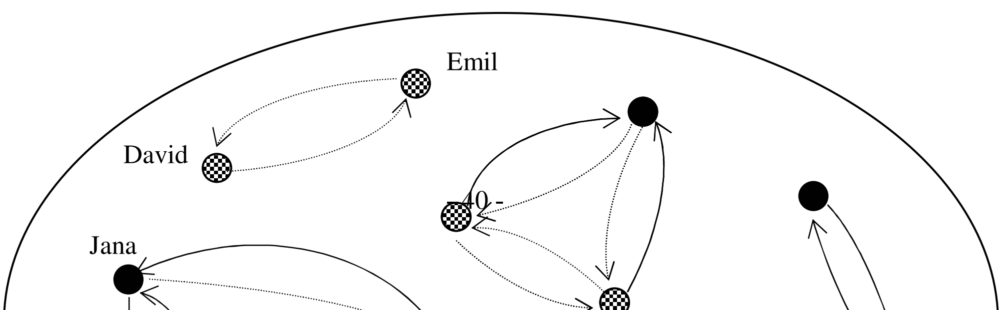
Mohla by se hrát modrá hra „ukázat svého bratra“. Které modré šipky by bylo třeba určitě zakreslit? Nakresli tyto modré šipky.



Děti na dvoře našeho domu hrály hru „ukázat svého bratra“ a nakreslily všechny modré šipky.

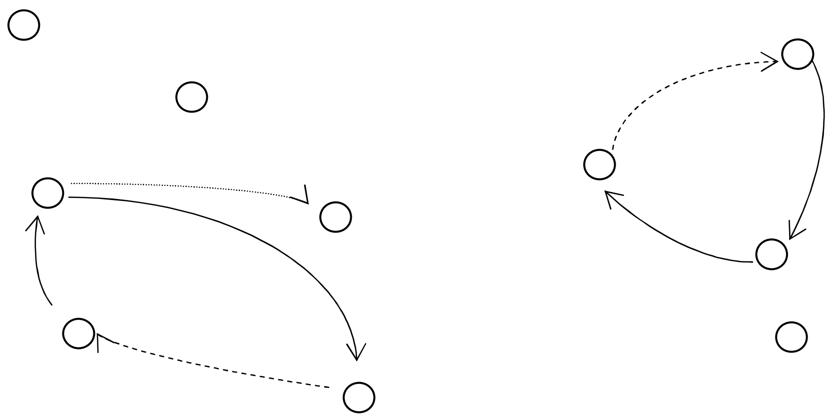


Nakreslil jsi dobře všechny šipky, které jsi měl najít a nakreslit? Děti dokreslily některé šipky, které jsi nemohl objevit. David a Emil jsou bratři, což na grafu hry „ukázat svoji sestru“ nebylo možné objevit. Oni nemají sestru.



Je to velmi dobré pro dva chlapce mít tutéž sestru. Pomocí hry „ukázat svoji sestru“ se pozná, že jsou bratři.

Zadáme si úlohu: Toto jsou děti, které si hrály na našem dvoře hru „ukázat svoji sestru“ a „ukázat svého bratra“. Děti svůj obrázek nedokončily, Dokonči obrázek za ně a označ zároveň červeně děvčata a modře chlapce!



2.7. Speciální typy binárních relací

2.7. 1 . Ekvivalence v množině

Ekvivalence v množině M je relace, která je v množině **M** reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Rozklad neprázdné množiny **M** nazveme každý systém **S** jejich podmnožin, který splňuje tyto podmínky:
1) každý jeho prvek neprázdná množina,
2) každé dva jeho různé prvky jsou disjunktní množiny,
3) sjednocení všech jeho prvků je rovno množině **M**.
Prvky systému **S** budeme nazývat třídy rozkladu množiny **M.**

Příklad 48:

Množina všech přímek prostoru je relací „být rovnoběžný“ rozložena na nekonečně mnoho tříd, z nichž každá obsahuje právě všechny navzájem rovnoběžné přímky. Těmto třídám se říká **směry**. Relace „být rovnoběžný“ je relací ekvivalence.

2.7. 2. Uspořádání v množině

Uspořádání v množině M je relace, která je v množině **M** antisymetrická a tranzitivní.

Příklad 49:

Vezměme množinu {a, b, c, d }a definujme v ní relaci, která je antireflexivní, antisymetrická a tranzitivní,
například **R** = { [a, b], [b, c], [a, c], [c, d], [a, d] ,[b, d]. Můžeme určit jak jdou prvky za sebou, jak jsou uspořádány. Prvek a předchází před všemi (je první v tomto pořadí), prvek b předchází před prvky c, d a konečně prvek c předchází před d (d je poslední v tomto uspořádání). Můžeme se přesvědčit uzlovým grafem.
Obdobně relace $x < y$ v množině všech přirozených čísel **N** je antisymetrická, antireflexivní a tranzitivní, můžeme tedy přirozená čísla pomocí této relace uspořádat vzestupně podle velikosti.

2.7. 3. Zobrazení

Zřejmě máme všichni určitou představu, když říkáme „něco je zobrazeno někam“. Chceme-li tuto představu matematicky popsat využijeme pojem binární relace. Zobrazení zavedeme jako zvláštní druh binárních relací.

Nechť **Z** je binární relace v množině **M**. Relace **Z** se nazývá zobrazení, právě když se mezi uspořádanými dvojicemi, z nichž se relace **Z** skládá, nevyskytují žádné dvě, které mají stejné první složky a různé druhé složky.

Symbolicky můžeme zapsat, že relace **Z** je zobrazení, právě když
$\forall\ (x, y, z) \in \mathbf{Z} : (x\, \mathbf{Z}\, y \ \wedge\ y\ \mathbf{Z}\, z) \Rightarrow (y = z)$, říkáme, že *y* je obraz prvku *x* v zobrazení **Z** nebo zobrazení **Z** přiřazuje prvku *x* prvek *y*, což můžeme značit $y = \mathbf{Z}(x)$. Množinu všech *x* označíme **€Z** , nazýváme ji **definiční obor zobrazení Z**, množinu všech *y* označíme **Z€** a nazýváme ji **obor hodnot zobrazení Z**.

Zavedeme ještě další pojmy. Nechť jsou dány dvě libovolné neprázdné množiny **A**, **B.**
a) Jestliže platí: **€Z** ⊂ **A** a **Z€** ⊂ **B**, pak říkáme, že **Z** je zobrazení „z množiny **A** do množiny **B“.**
b) Jestliže platí: **€Z** ⊂ **A** a **Z€** = **B**, pak říkáme, že **Z** je zobrazení „z množiny **A** na množinu **B“.**
c) Jestliže platí: **€Z** = **A** a **Z€** ⊂ **B**, pak říkáme, že **Z** je zobrazení „ množiny **A** do množiny **B“.**
d) Jestliže platí: **€Z** = **A** a **Z€** = **B**, pak říkáme, že **Z** je zobrazení „ množiny **A** na množinu **B“.**

2.1.7. 4. Prosté zobrazení

Zobrazení **Z** z množiny **A** do množiny **B** se nazývá **prosté zobrazení** z **A** do **B** , právě když každým dvěma různým prvkům z množiny **A** přiřazujeme dva různé prvky z množiny **B.**

Příklad 50:

Podíváme se na zobrazení $\mathbf{Z} = \{[x, y]\ \ \mathbf{C} \text{ x } \mathbf{N} :\ x + 5 = y\ \}$, kde **C** je množina celých čísel, N množina přirozených čísel. Jde o prosté zobrazení z **C** na **N.**

2.7. 5. Ekvivalence množin

Zápis **A** ~ **B** budeme číst: množina **A** je ekvivalentní s množinou **B**.

Množina A je ekvivalentní s množinou B (**A** ~ **B**), právě když existuje prosté zobrazení množiny **A** na množinu **B**.

Pozor! Musíme rozlišovat ekvivalenci množin, relaci, která je typem ekvivalence a logický pojem ekvivalence.

Ekvivalence množin je relací typu ekvivalence, neboť je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Tyto vlastnosti si můžeme ověřit.

2.7.6. Nekonečná a konečná množina.

Můžeme si najít případ, kdy množina je ekvivalentní se svou vlastní podmnožinou (tj. se svou podmnožinou, která ji není rovna). Například množina všech sudých přirozených čísel je podmnožinou všech přirozených čísel.

Množina **A** se nazývá **nekonečná**, právě když existuje množina $\mathbf{A}^*$ taková, že

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{A}^* \ \wedge\ \mathbf{A}^* \subset \mathrm{A} \ \wedge\ \mathbf{A}^* \neq \mathrm{A}.$$

Množina se nazývá **konečná,** právě když není nekonečná.

Příklad 50:

Množina $\mathbf{N}^*$ všech sudých přirozených čísel je vlastní podmnožinou množiny všech přirozených čísel **N** a opravdu platí $\mathbf{N}^* \sim \mathbf{N} \ \wedge\ \mathbf{N}^* \neq \mathbf{N}$.

3. Přirozená čísla

Základním pojmem v aritmetickém učivu 1. stupně základní školy je pojem přirozeného čísla a nuly, která se někdy mezi přirozená čísla zařazuje. Nauka, jejímž cílem je osvojení pojmu přirozené číslo a pojmu nula u žáků 1. stupně základní školy, se nazývá numerace. U dětí cílem učiva o budování přirozeného čísla je seznámení žáka s názvem přirozeného čísla, jeho kvantitativním významem, uspořádáním čísel podle velikosti a psaním čísel v desítkové soustavě. V numeraci je třeba sledovat tyto dílčí úkoly:

a) naučit žáky chápat čísla jako pojmy, které vyjadřují společnou vlastnost třídy ekvivalentních konečných množin, stanovit počet prvků dané množiny předmětů a vytvořit množinu o daném počtu prvků,

b) chápat čísla jako členy přirozené posloupnosti čísel, ve které každé následující číslo je o jednu jednotku větší než číslo předcházející, tedy naučit žáky uspořádat čísla v přirozeném uspořádání a používat toto uspořádání při porovnávání čísel,

c) naučit poznat a umět správně vyslovovat názvy čísel,

d) umět číst a psát čísla ,

e) naučit žáky pochopit desítkovou soustavu, ve které deset jednotek libovolného řádu se rovná jedné jednotce vyššího řádu,

f) naučit žáky čísla zaokrouhlovat.

Než se budeme zaobírat metodickými postupy vytváření pojmu přirozeného čísla zopakujeme si matematický pohled na výstavbu tohoto pojmu. Prvním úhlem pohledu je názor, že přirozená čísla chápeme jako kardinální čísla neprázdných konečných množin.

Podívejme se do matematické teorie. Zvolíme si určitý systém množin (množina jejíž prvky jsou opět množiny) a na tomto systému definujeme binární relaci „množina **X** má stejně prvků jako množina **Y**". Tato relace je ekvivalence a rozkládá náš systém množin na třídy. Do každé třídy rozkladu pak patří všechny množiny, které mají stejný počet prvků. Též říkáme, že množiny jsou ekvivalentní, neboť existuje prosté zobrazení množiny na množinu. (Například vznikne třída všech pětiprvkových množin našeho systému). Kardinální číslo množiny **A** z tohoto systému (píšeme card **A** nebo $|\mathbf{A}|$) je název třídy rozkladu tohoto systému, která obsahuje množinu **A**.

Druhým úhlem pohledu je názor, že přirozená čísla chápeme jako ordinální čísla konečných neprázdných množin. Zvolíme si opět určitý systém, nyní však dobře uspořádaných množin a definujeme na něm binární relaci „množina **X** je podobná množině **Y**". Tato relace je opět ekvivalence a rozkládá náš systém množin na třídy sobě podobných množin.Ordinální číslo množiny **A** tohoto systému (píšeme ord **A**) je název třídy rozkladu tohoto systému, která obsahuje množinu **A**. Podobnost množin chápeme jako existenci vzájemně jednoznačného zobrazení mezi dobře uspořádanými množinami, ve kterém pořadí vzorů určuje také pořadí obrazů.

Třetím úhlem pohledu je, že přirozená čísla chápeme jako prvky Peanovy množiny. Vlastnosti Peanovy množiny jsou :

1) Ke každému prvku a této množiny existuje právě jeden prvek této množiny, který se nazývá následovník.

2) V množině existuje prvek, který není následovníkem žádného prvku této množiny.

3) Každé dva různé prvky této množiny mají dva různé následovníky.

4) Nechť množina **M** má tyto vlastnosti:

a) obsahuje první prvek množiny **P**,

b) s každým prvkem množiny **P** obsahuje i jeho následovníka.

Pak množina **M** obsahuje všechny prvky množiny **P**.

Přirozená čísla lze chápat jako kardinální čísla neprázdných konečných množin, jako ordinální čísla neprázdných konečných množin a jako prvky Peanovy množiny. Je třeba si uvědomit, že ve vyučování matematice na 1. stupni základní školy se všechny tyto tři přístupy prolínají a velmi úzce spolu souvisí.

Numerace na 1.stupni základní školy se realizuje v tzv. číselných oborech, v rámci kterých se uplatňují metodické postupy a přístupy. V 1.ročníku doporučujeme se nejdříve seznámit s čísly 1 až 6, pak číslem 0, potom čísla 7 až 10 a nakonec čísla 11 až 20. Důvodem proč čísla 1 až 6, je hrací kostka a dětem známé symboly z hrací kostky pro čísla 1 až 6. Jde o tak zvané číselné obrazce. Ve 2. ročníku se děti seznámí s čísly 21 až 100 a samozřejmě zopakují řadu čísel 1 až 20. Ve 3. ročníku se numerace rozšíří do tisíce, ve 4. ročníku do milionu a v 5. nad milión. Rozsah numerace je velmi důležitý, neboť ovlivňuje obsah dalšího matematického učiva. Pracuje-li žák například v číselném oboru do 100 nemůže se učit sčítání dvou dvojciferných čísel, neboť by z daného oboru vybočil. Nemůže např. probírat kilometr, který má 1 000 metrů, atp.

Pro úspěšné osvojení numerace na 1. stupni základní školy je třeba u dětí v přípravě na školu připravit dovednost :

1) Vytváření skupin předmětů (množin), vztahů mezi nimi, operací s nimi, to znamená naučit děti jednoznačně o kterémkoli předmětů rozhodnout zda patří nebo nepatří do skupiny, přivádět děti k tomu, aby si všímaly, že některé z daných prvků mají kromě uvedené charakterizující vlastnosti ještě další vlastnost a tvoří podskupinu, uměly

operovat se skupinami na základě přirozených situací a sjednocovat skupiny předmětů důsledným vymezením vlastností.
2) Tvorby vztahů mezi prvky skupin předmětů jako je třídění, uspořádání a přiřazování. Při třídění naučit děti třídění celku na části, chápat vztahy uvnitř vytvořených celků, označit znak (vlastnost) třídění, vybírat prvky, které mají požadované vlastnosti. V rámci uspořádání uspořádat prvky na základě předem zvoleného pravidla, kritéria, upřesňovat termíny, které při uspořádání vyskytují (první prvek, poslední prvek, hned za, za, hned před, před, následuje, předchází, atp.). Při přiřazování vycházet z nejjednoduššího to jest párování, vytváření dvojic. Ke každému prvku z jedné skupiny přiřadit prvek z druhé skupiny. Přiřazovat předměty, které spolu souvisejí, později přiřazovat prvky, které nemusí mít souvislost a přiřazovat na základě pořadí.
3) Seznamovat děti s propedeutikou přirozeného čísla. Je třeba naučit děti vyhledávat skupiny předmětů se stejným počtem prvků na základě přiřazování, rozhodovat ve které skupině je prvků více, ve které méně. Naučit děti uspořádanou řadu slov: jedna, dva, tři, čtyři, pět, šest, sedm, osm, devět, deset. Tak zvanou „říkačku“. Využít didaktických říkadel a rozpočítávadel. Např.: Jedna, dva, tři, my jsme bratři, atp. Dovést děti k tomu, aby za slovem viděly skupinu předmětů. Příklady úloh pro vytváření matematických představ:

Úloha č. 1.:

Děti mají k dispozici pracovní list. Na tomto pracovním listě vytvářejí skupiny předmětů podle daných vlastností, o kterémkoli předmětu rozhodují zda patří či nepatří do skupiny. Dále vytvářejí dvojice, ke každému prvku z jedné skupiny přiřazují právě jeden prvek z druhé skupiny. Dětem je čten text: Zatímco myší maminka vaří k obědu sladkou kašičku, malé myšky si spolu hezky hrají. Spočítej kolik má myš mláďat. Vyznač skupinu všech myších dětiček. Nyní vytvoř skupinu všech myších děvčátek a jinou barvu použij pro skupinu myších chlapečků. Dobře se na tyto dvě skupiny podívej a pověz, zda je více myších děvčátek nebo myších chlapečků. Protože myš už je s obědem hotová, svolává myší děti ke stolu. Každé myšce přiděl jednu misku ležící na stole (vezmi pastelku a čarou vždy spoj jednu myšku s jednou miskou). Dostalo se kašičky na všechny myšky nebo je to jako v dětské říkance. Učitelka učí děti říkanku Vařila myšička kašičku.

Tato činnost je vhodná pro rozvoj českého jazyka.

Úloha č. 2:

Děti mají k dispozici barevné korále a jehlu se nití. Na nit navlékají korále podle diktátu paní učitelky. První korálek, který navlékneš má modrou barvu, druhý je žlutý, další je červený, atd. Jakou barvu má čtvrtý korálek ? Řekni barvy korálku, které jsou před červeným? Urči barvu korálku, který je hned za žlutým, atp.

Úloha č. 3:

Děti mají k dispozici obrázky mráčků z kterých kape déšť, dále mají kartičky s deštníky na kterých jsou puntíky. Paní učitelka zadá úlohu :

„Z mráčků, které máš před sebou na obrázku se rozpršelo. Abychom příliš nezmokli, zakryjeme je deštníky. Jedním deštníkem přikryješ vždy jeden mrak. Počet padajících kapek z mráčku musí být stejný s počtem puntíků na deštníků, který použiješ na zakrytí. Vyber deštník s jedním puntíkem a polož jej na stůl. Najdi deštník na kterém je o jeden puntík více, méně, stejně, atp.“

4. Početní operace

4.1. Pojem binární operace v množině

Nejdříve si zavedeme obecně pojem binární operace v množině.

Nechť **M** je libovolná neprázdná množina. **Binární operací** v množině **M** rozumíme zobrazení z množiny kartézského součinu **M** x **M** do množiny **M**.

Jestliže v binární operaci o vzoru $[x, y] \in$ **M** x **M** je přiřazen obraz $z \in$ **M**, píšeme $x \circ y = z$.

4.2. Základní vlastnosti binárních operací.

a) Binární operace o v množině **M**, která má vlastnost, že je definovaná pro každou uspořádanou dvojici $[x, y] \in$ **M** x **M**, se nazývá **operace neomezeně definovaná v M.**

Symbolicky zapsáno platí $(\forall\, x, y \in \mathbf{M})\ (\exists\ z \in \mathbf{M}) : x \circ y = z$.

b) Binární operace o definovaná na množině **M** se nazývá **asociativní** právě tehdy, když platí

$$(\forall\, a, b, c \in \mathbf{M}) : [(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)]$$

c) Binární operace o definovaná na množině **M** se nazývá **komutativní** právě tehdy, když platí

$$(\forall\, a, b, c \in \mathbf{M}) : [(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)]$$

d) Nechť v množině **M** je definovaná binární operace o. Existuje-li prvek $e \in$ **M**, pro který platí

$(\forall\, x \in \mathbf{M}) : (a \circ e = e \circ a = \mathrm{a})$**,** pak prvek e se nazývá **neutrálním prvkem** množiny **M** vzhledem k operaci o.

e) Nechť v množině **M** je definovaná binární operace o a nechť e je neutrálním prvek množiny **M** k operaci o. Prvek $\bar{a} \in$ **M** nazýváme **inverzním prvkem** k prvku $a \in$ **M** v operaci o v **M**.

Příklad 51:

Operace **sčítání** v množině přirozených čísel a nuly $\mathbf{N}_0$ je neomezeně definovaná v $\mathbf{N}_0$**,** je asociativní, je komutativní, má neutrální prvek 0, nemá prvky inverzní. Asociativní vlastnost se zde nazývá **vlastnost sdružování sčítanců**, komutativní vlastnost **vlastnost záměny sčítanců** a neutrální prvek je prvek **nulový**.

Operace **násobení** v množině přirozených čísel a nuly $\mathbf{N}_0$ je neomezeně definovaná v $\mathbf{N}_0$**,** je asociativní, je komutativní, má neutrální prvek 1, nemá prvky inverzní. Asociativní vlastnost se zde nazývá **vlastnost sdružování činitelů**, komutativní vlastnost **vlastnost záměny činitelů** a neutrální prvek je prvek **jednotkový**.

Operace **sčítání** v množině celých čísel **C** je neomezeně definovaná v **C,** je asociativní, je komutativní, má neutrální prvek 0, má prvky inverzní. Inverzními prvky k číslům například 1, 2, 3, 4 jsou čísla –1, -2, -3, -4, (neboť platí např. 1 + (-1) = 0).

Můžeme sestrojovat **operační tabulku**:

Příklad 52:

V množině **M** = { 0, 1, 2, 3} je definována binární operace o předpisem $a \circ b = |a - b|$.
Sestrojíme operační tabulku:

o	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	1	2
2	2	1	0	1
3	3	2	1	0

Vidíme i dle tabulky, že operace o v množně **M** je neomezeně definovaná (tabulka vyplněna), že je komutativní (tabulka je souměrná dle šikmé osy), má neutrální prvek 0 (řádek u 0 je shodný se záhlavím). Přesvědčíme se o asociativnosti, musíme vyzkoušet všechny variace 3. třídy ze čtyř prvků s opakováním, t j. (0 o 0) o 0 = 0 o (0 o 0)
(0 o 0) o 1 = 0 o (0 o 1) , atd. a zjistíme, že pro všechny trojice rovnost není pravdivá, např. (1 o 2) o 3 = 1 o (2 o 3) , nejdříve vypočteme závorky a dostaneme
1 o 3 = 1 o 1 a jednoduše vypočteme, že
2 = 0, což není pravda.

Příklad 53:

V rámci matematického myšlení můžeme řešit i úlohu, kde množina není číselná.

Zvolme si množinu povelů na místě **T** vpravo vbok (označíme P), vlevo vbok (označíme L), čelem vzad (označíme Z) a na místě (označíme M). Zavedeme si operaci □ skládání těchto povelů. T = { P, L, Z, M }. Sestavíme operační tabulku:

□	P	L	Z	M
P	Z	M	L	P
L	M	Z	P	L
Z	L	P	M	Z
M	P	L	Z	M

Operace □ v množině **T** je neomezeně definovaná, je komutativní a má neutrální prvek M. Ověříme 27 možností asociativnosti (variace s opakováním třetí třídy ze 4 prvků) a zjistíme, že operace □ v množině **T** je asociativní. Inverzní prvky jsou k prvku P je to prvek L, k prvku Z je to prvek Z a k prvku je to prvek M.

4.3. Jednoduché slovní úlohy

Jednoduché slovní úlohy jsou takové slovní úlohy k jejichž řešení potřebujeme právě jednu početní operaci. Jejich typy jsou určeny dle početní operace sčítání, odčítání, násobení a dělení v množině přirozených čísel a nuly $\mathbf{N}_0$. Tyto typy popisuje Prof. RNDr. Karel Hruša. Je důležité tyto typy znát, neboť vedou žáky 1. stupně základní školy metodickou řadou k lepšímu pochopení početní operace.

Typy slovních úloh:

Sčítání (určení součtu, zvětšení o daný počet)

Odčítání (určení rozdílu, zmenšení o daný počet , porovnávání rozdílem a to „o kolik více“ a „o kolik méně“).

Násobení (určení součtu stejných sčítanců, zvětšení čísla několikrát)

Dělení (dělení na stejné části, dělení podle obsahu, zmenšení čísla několikrát, porovnávání podílem a to „kolikrát více“ a „kolikrát méně“).

Příklad 54:

Určení součtu: Adam měl 2 jablka, Bedřich měl 5 jablek. Kolik jablek měli dohromady Adam s Bedřichem?

Zvětšení o daný počet: David měl 2 jablka, Evžen měl o 5 jablek více než David. Kolik jablek měl Evžen?

Určení rozdílu: Karel měl 10 korun a 3 koruny ztratil. Kolik korun zbylo Karlovi po ztrátě?

Zmenšení o daný počet: Jan měl 10 korun. Stanislav měl o 3 koruny méně než Jan. Kolik korun měl Stanislav? (Nemůže být v textu „o 3 koruny méně“, musí být „o 3 koruny méně než Jan“).

Porovnávání rozdílem: Václav měl 10 korun. Zdeněk měl 3 koruny? O kolik korun měl Václav více než Zdeněk ? O kolik korun měl Zdeněk méně než Václav ?

Určení součtu stejných sčítanců: Jeden kilogram brambor stojí 7 korun. Kolik stojí 5 kilogramů brambor?

Zvětšení čísla několikrát: Jeden kilogram brambor stojí 7 korun. Jeden kilogram meruněk stojí pět krát více než jeden kilogram brambor. Kolik stojí kilogram meruněk?

Dělení na stejné části: Dvanáct knedlíků máme podělit 3 chlapcům, tak aby každý měl stejný počet? Kolik knedlíků dostane každý z chlapců?

Dělení podle obsahu: Dvanáct knedlíků máme podělit tak, aby každý chlapec dostal na talíř 4 knedlíky. Kolik chlapců můžeme podělit?

Zmenšení čísla několikrát: Jeden kilogram meruněk stojí 35 korun. Jeden kilogram brambor

je pět krát levnější než jeden kilogram meruněk. Kolik stojí 1 kilogram brambor?

Porovnávání podílem: Jeden kilogram meruněk stojí 35 korun.Jeden kilogram brambor 7 korun. Kolikrát je jeden kilogram brambor levnější než jeden kilogram meruněk? Kolikrát je jeden kilogram meruněk dražší než jeden kilogram brambor?

5. Rámcový program pro předškolní vzdělávání

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy vydalo pod čj. 14 132/01-22 dne 19. března 2001 v souladu s § 12 odst. 1 zákona č. 564/1990 Sb., o státní správě a samosprávě ve školství, ve znění pozdějších předpisů, **Rámcový program pro předškolní vzdělávání**.

Rámcový plán je přístupný na internetových stránkách Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy (www.msmt.cz) a Výzkumného ústavu pedagogického (www.vuppraha.cz).

Rámcový program pro předškolní vzdělávání představuje nový základní dokument pro mateřské školy, který je určitým završením procesu proměn uplynulých deseti let. Na rozdíl od všech předchozích podobných dokumentů není programem, podle něhož by mohl pedagog při výchově a vzdělávání dětí přímo a jednoduše postupovat. Funkce rámcového programu je jiná: je podkladem pro přípravu školních vzdělávacích programů s cílem podpořit rozvoj různých programů a při zachování základních požadavků na předškolní vzdělávání (tímto dokumentem stanovených) umožnit mateřských školám vytvářet školní programy „na míru".

Předškolní pedagog se tak dostává do situace, kdy je méně svazován předpisy a má více svobody, zároveň je však postaven před nutnost samostatně pracovat, rozhodovat se a nést osobní odpovědnost. Každý by měl být schopen vytvořit (spoluvytvořit) vzdělávací program, který by respektoval rámcová pravidla a požadavky na předškolní vzdělávání a stejně tak i konkrétní podmínky, možnosti a okolnosti mateřské školy, možnosti a potřeby obce, rodičů i dalších partnerů. A nejen to: pedagog by měl být schopen také tento školní program realizovat ve třídě dětí, a to tak, aby - v úzké vazbě s rodiči - umožnil všem dětem optimálně rozvinout všechny předpoklady a pomáhal jim utvářet si pokud možno vstřícný a pozitivní vztah ke světu.

5.1. Rámcový program pro předškolní vzdělávání, jeho funkce, struktura a obsah

Rámcový program je základní osnovou pedagogického programu v předškolních institucích a obsahuje (formuluje):

- obecné cíle předškolního vzdělávání
- rámcový obsah předškolního vzdělávání v pěti oblastech: biologické, psychologické, interpersonální (oblast týkající se mezilidských vztahů), sociálně-kulturní a environmentální (oblast týkající se vzájemných vztahů člověka a prostředí), a to formou popisu:
- základní charakteristiky každé z těchto oblastí a jejích vzdělávacích záměrů
- vzdělávacích cílů specifických pro každou jednotlivou oblast
- hlavních činností, resp. příležitostí, které by v konkrétní oblasti mělo předškolní vzdělávání nabízet a zajišťovat očekávaných výsledků, resp. **kompetencí** (termín uplatňovaný v současných kurikulárních dokumentech našich i zahraničních, který se snaží postihnout, že cílem vzdělávání není jen osvojení poznatků a dovedností, ale vytváření obecnějších poznávacích a činnostních způsobilostí; jde o soubory (bloky) dovedností, poznatků, prožitků, zkušeností, hodnot a postojů, které přesahují školní prostředí, které si jedinec trvale osvojí a které je připraven uplatňovat v dalším vzdělávání i v životě mimo školu), které dítě vzděláváním v té které oblasti zpravidla získává
- hlavních rizik, která znesnadňují průběh vzdělávání a která mohou v jednotlivých oblastech ohrozit jeho výsledky
- podmínky předškolního vzdělávání, tj. věcné, sociální, organizační a odborné charakteristiky vzdělávacího prostředí, které ovlivňují kvalitu poskytovaného vzdělávání
- možnosti využití Rámcového programu ve vzdělávání dětí se speciálními vzdělávacími potřebami a dětí nadaných
- požadavky na pedagogické hodnocení v předškolním vzdělávání
- základní požadavky na práci a profesionální odpovědnost předškolního pedagoga
- zásady a doporučení pro zpracování školního vzdělávacího programu. předškolního vzdělávání (pro pedagogy), ale také pro zřizovatele předškolních vzdělávacích institucí i pro odborné a sociální partnery v rámci vzdělávacího systému.

5.2. Specifika předškolního vzdělávání

Vzdělávání poskytované mateřskou školou se v mnohém liší od vzdělávání poskytovaného školou základní; jeho specifika vyplývají především z dosud nehotových a postupně se rozvíjejících osobnostních struktur dítěte předškolního věku a jeho specifických potřeb. Z toho důvodu se předškolní vzdělávání *přizpůsobuje vývojovým kognitivním, sociálním a emocionálním potřebám dětí této věkové skupiny* a dbá, aby tato vývojová specifika byla při vzdělávání dětí v plné míře respektována.

První roky mají pro život dítěte dalekosáhlý význam. Poznatky lékařů, psychologů a pedagogů dokazují, že většinu toho, *co dítě v tomto věku prožije a co z podnětů okolního prostředí přijme, je trvalé,* a že rané zkušenosti, které dítě získává svým životem v rodinném i mimorodinném prostředí, se v jeho životě - třeba i daleko později - zhodnotí a najdou své uplatnění.

Pro předškolní období je nutné, aby *vzdělávání bylo vždy vázáno jak k obecným potřebám daným věkem, tak k individuálním, resp. individuálně různým potřebám a možnostem jednotlivých dětí* a aby pedagogické aktivity probíhaly v rozsahu potřeb každého z nich. Vzdělávací působení vychází z pozorování a uvědomění si individuálních potřeb a zájmů dětí a ze znalosti jejich aktuálního rozvojového stavu i konkrétní životní a sociální situace. Je třeba, aby se každému dítěti, které se účastní předškolního vzdělávání, dostalo podpory, péče a stimulace v míře, kterou individuálně potřebuje, a v kvalitě, která mu vyhovuje.

Předškolní dítě se učí především *na základě své interakce s okolím a svou vlastní prožitou zkušeností*. Vzdělávací činnosti v mateřské škole jsou proto založeny na přímých zážitcích dítěte, vycházejí z jeho samostatné činnosti a individuální volby, z dětské zvídavosti a potřeby objevovat. Využívají přirozený tok dětských myšlenek a spontánních nápadů, poskytují dostatek prostoru pro spontánní aktivity a dětské plány a zajišťují dětem dostatečnou možnost projevovat se, bavit se a zaměstnávat přirozeným dětským způsobem.

Předškolní vzdělávání probíhá jako konkrétní interaktivní proces. Proto je důležité, aby právě v počátcích vzdělávání dítě mělo *možnost prožívat uspokojení z úspěchu a z překonávání překážek a aby sebe sama vnímalo jako plnohodnotného a schopného jedince, který je svým okolím uznáván a přijímán.* Pedagog působí v mateřské škole jako ten, kdo příznivě ovlivňuje prožívání i učení dítěte, jeho aktivitu a výkonnost (facilitátor). Každé dítě dostatečně stimuluje v jeho rozvoji, citlivě podněcuje jeho chuť k učení a pozitivně je motivuje k dalšímu úsilí. Je průvodcem dítěte na jeho cestě za poznáním. Iniciuje vhodné činnosti, připravuje prostředí a nabízí dítěti příležitosti, jak poznávat, přemýšlet, chápat a porozumět sobě i všemu kolem stále účinnějším způsobem.

Vzdělávání předškolních dětí v mateřských školách je cílevědomý a plánovaný proces,v němž jsou *spontánní a řízené aktivity vyvážené*, v poměru, který odpovídá potřebám a možnostem dětí. Specifickou formu předškolního vzdělávání je *didakticky zacílená činnost, která je pedagogem přímo nebo nepřímo motivovaná,* kterou dítěti nabízíme a v níž je zastoupeno spontánní a záměrné učení. Je založena na aktivní účasti dítěte omezující přijímání hotových poznatků, využívá zejména prožitkového a interaktivního učení; probíhá zpravidla v menší skupině či individuálně.

Stejně jako veškeré procesy učení, neprobíhá ani vzdělávání předškolních dětí v mateřské škole pouze v didakticky zaměřených činnostech. *Předškolní vzdělávání se uskutečňuje ve všech činnostech a situacích, které se v průběhu dne v mateřské škole vyskytnou.* Dítě je neustále ovlivňováno vším, co vyplývá z jeho interakce s okolním prostředím, napodobuje vzory, které mu svým chováním poskytujeme, a přijímá postoje, které v různých situacích zaujímáme (týká se nejen pedagogů, ale i ostatních zaměstnanců).

Nezbytnou součástí práce pedagoga v mateřské škole je *tvořivá improvizace,* resp. pružné a citlivé *reagování na okamžitou situaci;* to poskytuje dítěti srozumitelnou praktickou ukázku životních souvislostí, učí dítě vnímat spojitosti a napomáhá umocňovat jeho zážitek, což nepochybně zvyšuje přirozenou účinnost vzdělávání.

Vzdělávání v mateřské škole smysluplně obohacuje denní program dítěte v průběhu jeho předškolních let. Rámcový program usiluje o to, aby první vzdělávací krůčky byly stavěny na promyšleném, odborně podepřeném a lidsky i společensky hodnotném základě, aby čas prožitý v mateřské škole byl pro dítě radostí, příjemnou zkušeností a zdrojem dobrých základů do života i vzdělávání. Nejde o to, abychom naplňovali dětskou mysl, ale v první řadě o to *probouzet v dítěti aktivní zájem a chuť dívat se kolem sebe, naslouchat a objevovat, i odvahu ukázat, co všechno už samo umí, zvládne a dokáže.*

5.3. Rámcové cíle a záměry předškolního vzdělávání

Záměrem předškolního vzdělávání je dovést dítě na konci jeho předškolního období k tomu, aby v rozsahu svých osobních předpokladů získalo *věku přiměřenou fyzickou, psychickou i sociální samostatnost a základy kompetencí důležitých pro jeho další rozvoj a učení, pro život a vzdělávání*: základy pro zdravé sebevědomí a sebejistotu, pro schopnost být samo sebou a zároveň se přizpůsobit životu v sociální komunitě, v kulturní a multikulturní společnosti, základy pro celoživotní učení i základy pro schopnost jednat v duchu základních lidských a etických hodnot - to vše na úrovni přizpůsobené věku předškolního dítěte, elementárním možnostem jeho chápání a vidění světa i přirozeným životním souvislostem a okolnostem, v nichž dnešní dítě vyrůstá.

V návaznosti na obecné cíle vzdělávání formulované ve školském zákoně jsou hlavními cíli předškolního vzdělávání:

1. rozvíjení dítěte a jeho schopnosti učení
2. osvojení si základů hodnot, na nichž je založena naše společnost
3. získání osobní samostatnosti a schopnosti projevovat se jako samostatná osobnost působící na své okolí

1. cíl: **rozvíjení dítěte a jeho schopnosti učení**

Předpokladem naplňování tohoto cíle je:

- podporovat tělesný rozvoj a zdraví dítěte, jeho osobní spokojenost a pohodu
- systematicky rozvíjet řeč dítěte a cvičit schopnosti a dovednosti, které dítěti umožňují a usnadňují proces jeho dalšího rozvoje a učení
- podporovat stále dokonalejší chápání okolního světa i dětskou radost z rozšiřujících se možností zasahovat do jeho dění, motivovat dítě k aktivnímu poznávání, povzbuzovat jeho chuť k učení, zájem poznávat nové a objevovat neznámé, porozumět věcem a jevům kolem sebe
- rozvíjet schopnost přemýšlet a rozhodovat se, rozvíjet všechny poznávací a kreativní (tvůrčí) schopnosti dětí, jejich fantazii, zájmy a nadání
- přispívat k elementárnímu dětskému chápání vývoje, pohybu a proměn, rozvíjet schopnost dítěte přizpůsobovat se, reagovat na změny a vyrovnávat se s nimi.

2. cíl: **osvojení si základů hodnot, na nichž je založena naše společnost**

Předpokladem naplňování tohoto cíle je:

- **poskytovat dítěti možnost poznávat takové hodnoty, jako je nedotknutelnost lidských práv, individuální svoboda, stejná hodnota a rovnost všech lidí, soucítění a solidarita se slabými a ohroženými, péče o druhé a ohled na jiné, hodnoty spojené se zdravím, životem a životním prostředím a důstojnými vztahy mezi lidmi**
- v rozsahu dětských možností přispívat k předávání kulturního dědictví, jeho hodnot, tradic, jazyka a poznání
- rozvíjet schopnost komunikovat, spolupracovat, spolupodílet se na činnostech a rozhodnutích
- vést děti k sociální soudržnosti, připravovat je na život v multikulturní společnosti, k tomu, aby vnímaly různost kulturních komunit jako samozřejmost a měly porozumění pro jejich rozdílné hodnoty i pro vzájemné sbližování.

3.cíl: **získání osobní samostatnosti a schopnosti projevovat se jako samostatná osobnost působící na své okolí**

Předpokladem naplňování tohoto cíle je:

- **rozvíjet poznávání sebe sama, vlastních zájmů, možností a potřeb**
- vytvářet příležitosti k rozvoji sebevědomí a získání zdravé sebedůvěry
- vést dítě k zájmu podílet se na společném životě a činnostech ve škole i v rodině (učit je spolupracovat, spoluodpovídat, akceptovat a tolerovat druhé)
- vést dítě k poznání, že může svou životní situaci ovlivňovat, že může jednat svobodně, že však za to, jak se rozhodne a co udělá, odpovídá.

5.4. Obsah předškolního vzdělávání

Hlavním prostředkem rozvoje a kultivace předškolního dítěte, obohacením jeho poznání i sociální zkušenosti v mateřské škole je obsah předškolního vzdělávání. Rámcový program formuluje základní výběr obsahu, který musí být povinně zakomponován ve vzdělávacím programu zpracovávaném mateřskou školou.

Základní obsah předškolního vzdělávání byl stanoven tak, aby v návaznosti na současné trendy ve vzdělávání odpovídal cílům a záměrům předškolního vzdělávání a aby respektoval věk, předpoklady a zkušenosti dětí předškolního věku, jejich současné i budoucí potřeby a stejně tak i prostředí a možnosti mateřské školy. Obsah je strukturován do oblastí, které reflektují vývoj dítěte, jeho přirozený život, zrání i učení. *Jednotlivé oblasti vzdělávání jsou rozlišeny na základě vztahů, které si dítě postupně vytváří k sobě samému, k druhým lidem i k okolnímu světu,* resp. na základě přirozených interakcí, do kterých dítě v rámci těchto vztahů vstupuje, v nichž žije, rozvíjí se a vyrůstá, učí se a také vzdělává. Člověk se narodí na svět se svým tělem a jeho životními funkcemi (biologická úroveň) a s předpoklady psychických funkcí, jejichž prostřednictvím poznává a emocionálně prožívá tento svět, vytváří vědomí a svoje já (psychologická úroveň).

K tomu, aby se z jeho těla stal organismus fungující jako lidský, potřebuje kontakt nejméně s jednou dospělou osobou, aby ho tomu učila. K učení potřebuje lásku této osoby, zpravidla matky. Tak se vytváří první vztah mezi dvěma lidmi, který se postupně rozšiřuje o další vztahy s dospělými a dětmi, s kterými se dítě setkává a komunikuje i mimo okruh rodiny, např. ve společenské instituci, jako je mateřská škola (interpersonální úroveň).

Matka nebo jiná osoba v její funkci však sama od začátku potřebuje oporu širšího společenství, v kterém ostatně žije ještě před narozením dítěte a do jehož středu postupně uvádí i dítě. Od matky a v lidských společenstvích se učí kultuře, soužití s ostatními lidmi, pravidlům organizace společnosti a hodnotám mravním i duchovním. Dítě se do společnosti postupně začleňuje svými postoji, aktivitami a chováním, ale také již některými rolemi. Je konfrontováno se společenstvím, pociťuje na sobě, zda je přijímáno a jak se mu daří role naplňovat. Nabízí se mu příležitost se vzdělávat, získat povolání, naučit se pracovat, podílet se na životě společnosti a jejím blahu (sociálně-kulturní úroveň).

Interpersonálními vztahy a sociálně-kulturními rolemi se dítě stává sociální bytostí.Jednotlivá společenství žijí v širších společenských celcích, ty opět v ještě širších a všechna dohromady v přírodním prostředí planety Země. Člověk se vždy narodí do nějakého společenského a přírodního prostředí; jak roste a vyvíjí se, podílí se i na jeho ovlivňování a tvorbě, učí se rozumět souvislostem mezi ním a prostředím a učí se prostředí chránit a zvelebovat. Tím se stává příslušníkem lidského rodu vědomým si poslání člověka (environmentální úroveň).

Interakčních oblastí je celkem pět: biologická, psychologická, interpersonální, sociálně-kulturní a environmentální. Od nich jsou odvozeny oblasti předškolního vzdělávání, které jsou v **Rámcovém programu** nazvány:

1. **Dítě a jeho tělo**
2. **Dítě a jeho psychika**
3. **Dítě a ten druhý**
4. **Dítě a společnost**
5. **Dítě a svět**

Tyto oblasti vzdělávání jsou - stejně jako oblasti interakční - činně propojeny, vzájemně se ovlivňují a vytvářejí společně fungující celek, v životní skutečnosti nedělitelný. *Čím úplnější a dokonalejší je propojení všech oblastí vzdělávání, a zároveň i podmínek, za kterých probíhá* (viz kapitola 5), *tím je vzdělávání účinnější a hodnotnější.* Formální dělení a strukturování celku - pro jeho popis nezbytné - není z tohoto důvodu jednoduché: obsah jednotlivých oblastí předškolního vzdělávání se v Rámcovém programu - stejně jako v životě - prolíná, prostupuje, vzájemně se podmiňuje, dílčí cíle i dosahované kompetence dítěte na sebe navazují a vzájemně se doplňují, na některých místech pak i částečně překrývají. V rámci různých oblastí se tak přirozeně mohou - i když zpravidla v jiných souvislostech - opakovat.

5.4.1 Dítě a jeho tělo

Záměrem vzdělávacího úsilí v oblasti biologické je stimulovat a podporovat růst a neurosvalový vývoj dítěte, podporovat jeho fyzickou pohodu, zlepšovat jeho tělesnou zdatnost i pohybovou a zdravotní kulturu, podporovat rozvoj jeho pohybových i manipulačních dovedností, učit je sebeobslužným dovednostem a vést je k zdravým životním návykům a postojům.

Každá oblast předškolního vzdělávání má v Rámcovém programu určeny:

- specifické vzdělávací cíle,
- hlavní činnosti a příležitosti, které ve vzdělávání vytváříme, dítěti nabízíme a umožňujeme (například v rozvoji matematického myšlení konstruktivní a grafické činnosti),
- co dítě na konci předškolního období zpravidla dokáže (očekávané kompetence),
- hlavní rizika ohrožující úspěch vzdělávacích záměrů

5.4.2. Dítě a jeho psychika

Záměrem vzdělávání v oblasti psychologické je podporovat duševní pohodu, psychickou zdatnost a odolnost dítěte, rozvoj jeho intelektu, řeči a jazyka, poznávacích procesů a funkcí, jeho citů i vůle, stejně tak i jeho sebepojetí a sebenahlížení, jeho kreativity a sebevyjádření, stimulovat osvojování a rozvoj jeho vzdělávacích dovedností a povzbuzovat je v dalším rozvoji, poznávání a učení.
Tato oblast zahrnuje tři „podoblasti": 4.2.1 Jazyk a řeč, 4.2.2 Poznávací schopnosti a funkce, myšlenkové operace, představivost a fantazie, 4.2.3 Sebepojetí, city a vůle.

5.4.2.1. Jazyk a řeč

Specifické vzdělávací cíle**,** které jsou důležité pro rozvoj matematického myšlení:

- rozvoj řečových schopností a jazykových dovedností receptivních (vnímání, porozumění, poslechu) i produktivních (výslovnosti, vytváření pojmů, mluvního projevu, vyjadřování)
- rozvoj komunikativních dovedností (verbálních i neverbálních) a kultivovaného projevu
- osvojení některých dovedností, které předcházejí čtení i psaní, rozvoj zájmu o psanou podobu jazyka

Hlavní činnosti a příležitosti, které ve vzdělávání vytváříme, dítěti nabízíme a umožňujeme, které jsou důležité pro rozvoj matematického myšlení:

- grafické napodobování symbolů, tvarů, čísel, písmen

Co dítě na konci předškolního období zpravidla dokáže (očekávané kompetence), které jsou důležité pro rozvoj matematického myšlení:

- vyjadřovat samostatně a smysluplně myšlenky, nápady, pocity, mínění a úsudky ve vhodně zformulovaných větách
- porozumět slyšenému
- formulovat otázky
- učit se nová slova a aktivně je používat (ptát se na slova, kterým nerozumí)
- naučit se zpaměti krátké texty
- popsat situaci (skutečnou, podle obrázku)
- sledovat očima zleva doprava
- rozlišovat některé symboly, porozumět jejich významu i jejich komunikativní funkci
- rozlišovat a znát některá písmena a číslice

Hlavní rizika ohrožující úspěch vzdělávacích záměrů v rozvoji matematického myšlení:

- nepřiměřené využívání audiovizuální, popř. počítačové techniky, nabídka nevhodných programů (nevhodná volba pořadů televize, videa apod.)
- nedostatečná pozornost k rozvoji dovedností předcházejících čtení a psaní

5.4.2.2. Poznávací schopnosti a funkce, myšlenkové operace, představivost a fantazie

Specifické vzdělávací cíle důležité pro rozvoj matematického myšlení:

- rozvoj, zpřesňování a kultivace smyslového vnímání, přechod od konkrétně názorného myšlení k myšlení slovně-logickému (pojmovému), rozvoj a kultivace paměti, pozornosti, představivosti, fantazie
- rozvoj tvořivosti (tvořivého myšlení, řešení problémů, tvořivého sebevyjádření)
- posilování přirozených poznávacích citů (zvídavosti, zájmu, radosti z objevování apod.)
- vytváření pozitivního vztahu k intelektuálním činnostem a k učení, podpora a rozvoj zájmu o učení
- vytváření základů pro práci s informacemi

Hlavní činnosti a příležitosti, které ve vzdělávání vytváříme, dítěti nabízíme a umožňujeme důležité pro rozvoj matematického myšlení:

- přímé pozorování
- motivovaná manipulace s předměty, zkoumání jejich vlastností
- konkrétní operace s materiálem (třídění, přiřazování, uspořádání, odhad, porovnávání apod.)
- volné hry a experimenty s materiálem a předměty
- smyslové hry, nejrůznější činnosti zaměřené na rozvoj a cvičení vnímání, zrakové a sluchové paměti a pozornosti apod.
- námětové hry a činnosti
- činnosti zaměřené k vytváření (chápání) pojmů a osvojování poznatků (vysvětlování, objasňování, odpovědi na otázky, práce s knihou, s obrazovým materiálem, s médii apod.)

Co dítě na konci předškolního období zpravidla dokáže (očekávané kompetence) důležité pro rozvoj matematického myšlení:

- vnímat všemi svými smysly
- záměrně se soustředit na činnost a udržet pozornost
- pojmenovat většinu toho, čím je obklopeno
- přemýšlet a to, o čem přemýšlí, také vyjádřit
- zaměřovat se na to, co je z poznávacího hlediska důležité (odhalovat podstatné znaky, vlastnosti předmětů, nacházet společné znaky, podobu a rozdíl, charakteristické rysy předmětů či jevů a vzájemné souvislosti mezi nimi)
- vnímat, že je zajímavé dozvídat se nové věci, využívat zkušeností k učení
- postupovat a učit se podle pokynů a instrukcí
- **chápat základní číselné a matematické pojmy, elementární matematické souvislosti a podle potřeby je prakticky využívat (porovnávat, řadit a třídit soubory předmětů podle určitého pravidla, orientovat se v elementárním počtu cca do šesti, chápat číselnou řadu v rozsahu první desítky, poznat více, stejně, méně, první, poslední apod.)**
- **chápat prostorové pojmy (vpravo, vlevo, dole, nahoře, uprostřed, za, pod, nad, u, vedle, mezi apod. v prostoru i v rovině), částečně se orientovat v čase**
- řešit kognitivní problémy, úkoly a situace, myslet kreativně, vymýšlet „nápady“,

Hlavní rizika ohrožující úspěch vzdělávacích záměrů **v oblasti rozvoje matematického myšlení:**

- nedostatek příležitostí k poznávacím činnostem založeným na vlastní zkušenosti
- převaha předávání hotových poznatků slovním poučováním a vysvětlováním
- příliš racionální, hotový a uzavřený výklad světa

- omezený prostor pro vyjádření a uplatnění představivosti
- převažující důraz na pamětní učení a mechanickou reprodukci, málo názornosti i prostoru pro rozvoj fantazie
- zahlcování podněty a informacemi bez rozvíjení schopnosti s nimi samostatně pracovat
- málo příležitosti a prostoru k experimentaci a exploraci a samostatnému řešení konkrétních poznávacích situací
- nedostatek porozumění a ocenění úspěchu či úsilí

5.4.2.3. Sebepojetí, city, vůle

Specifické vzdělávací cíle vhodné pro rozvoj matematického myšlení:
- rozvoj pozitivních citů dítěte ve vztahu k sobě (uvědomění si vlastní identity, získání sebevědomí, sebedůvěry a relativní citové samostatnosti)

Hlavní činnosti a příležitosti, které ve vzdělávání vytváříme, dítěti nabízíme a umožňujeme vhodné pro rozvoj matematického myšlení:
- sympatizující a přijímající prostředí, vstřícná a citlivá komunikace
- činnosti zajišťující spokojenost, radost, veselí a pohodu
- podpora důvěry dítěte ve vlastní síly a schopnosti, dostatečné oceňování jeho snahy a úsilí
- přiměřené činnosti a úkoly umožňující dítěti dosáhnout úspěchu
- činnosti nejrůznějšího zaměření vyžadující (umožňující) samostatné vystupování, vyjadřování, obhajování vlastních názorů, rozhodování a sebehodnocení
- příležitosti a hry vyžadující vůli, vytrvalost a sebeovládání
- cvičení organizačních schopností

Co dítě na konci předškolního období zpravidla dokáže (očekávané kompetence) vhodné pro rozvoj matematického myšlení:
- uvědomovat si svou samostatnost, zaujímat vlastní názory a postoje a vyjadřovat je
- rozhodovat o svých činnostech
- odhadovat, na co stačí a co zvládne, postupně si uvědomovat své nedostatky, přiznávat si chybu
- přijímat pozitivní ocenění i svůj případný neúspěch a vyrovnat se s ním, učit se hodnotit svoje osobní pokroky
- prožívat radost ze zvládnutého a poznaného
- vyvinout volní úsilí, soustředit se na činnost a kontrolovat ji, dokončit, co započalo
- poslouchat a plnit smysluplné pokyny a slovní příkazy, přijímat vyjasněné a zdůvodněné povinnosti, přistupovat na vysvětlená a pochopená pravidla
- zorganizovat hru

Hlavní rizika ohrožující úspěch vzdělávacích záměrů v oblasti rozvoje matematického myšlení:
- nepřiměřené nároky na dítě, časté negativní hodnocení, kdy dítě opakovaně prožívá pocit selhání
- nedostatečné oceňování úsilí či úspěchu dítěte, málo pochvaly
- spěch a nervozita, omezování možností dítěte dokončovat činnost v individuálním tempu, nevhodné zásahy a přerušování činností dětí dospělými
- stresy a napětí, nejistota,

5.4.3. Dítě a ten druhý

Záměrem vzdělávání v interpersonální oblasti je podporovat utváření vztahů dítěte k jinému dítěti či dospělému, posilovat, kultivovat a obohacovat jejich vzájemnou komunikaci a zajišťovat pohodu těchto vztahů.

5.4.4. Dítě a společnost

Záměrem vzdělávání v oblasti sociálně - kulturní je uvést dítě do společenství ostatních lidí, do života v lidské společnosti i do světa kultury a umění, pomoci dítěti osvojit si potřebné dovednosti, návyky i postoje, přijmout základní všeobecně uznávané společenské, morální a estetické hodnoty a podílet se na utváření společenské pohody.

5.4.5. Dítě a svět

Záměrem vzdělávání v environmentální oblasti je založit u dítěte elementární povědomí o okolním světě a jeho dění, o vlivu člověka na životní prostředí – počínaje nejbližším okolím a konče globálními problémy celosvětového dosahu – a vytvořit základy pro otevřený a odpovědný postoj dítěte (člověka) k životnímu prostředí.

5.5. Podmínky předškolního vzdělávání

Povinnost bezpodmínečně dodržet pro předškolní vzdělávání v mateřských školách určité podmínky, je stanovena zákonem. Základní podmínky jsou legislativně vymezeny v různých právních normách (v zákonech, vyhláškách, prováděcích předpisech apod.). V návaznosti na ně Rámcový program *podrobněji popisuje a doplňuje další materiální, organizační, personální, psychohygienické a pedagogické podmínky, které příznivě ovlivňují kvalitu poskytovaného vzdělávání.*

5.6. Vzdělávání dětí se speciálními vzdělávacími potřebami a dětí mimořádně nadaných

Vzdělávání dětí se speciálními vzdělávacími potřebami.

Rámcový program vychází ve své základní koncepci z respektování individuálních potřeb a možností dítěte. Z toho důvodu je Rámcový program základním východiskem i pro přípravu vzdělávacích programů pro děti se speciálními potřebami, ať už jsou tyto děti vzdělávány v běžné mateřské škole či v mateřské škole se speciálním vzdělávacím programem.

Rámcové cíle a záměry předškolního vzdělávání jsou pro vzdělávání všech dětí společné. Při vzdělávání dětí se speciálními vzdělávacími potřebami se jejich naplňování přizpůsobuje tak, aby maximálně vyhovělo dětem, jejich potřebám i možnostem. Snahou pedagogů je - stejně jako ve vzdělávání dětí, které speciální vzdělávací potřeby nemají - vytvořit každému dítěti optimální podmínky k rozvoji jeho osobnosti, k učení i ke komunikaci s ostatními a pomoci mu, aby dosáhlo co největší samostatnosti.

Rozsáhlou skupinu představují **děti se zdravotním postižením**. Jde o děti s tělesným postižením, děti se zrakovým postižením, děti se sluchovým postižením, děti s mentální retardací, děti s poruchami pozornosti a vnímání, děti s poruchami řeči a děti s více vadami.

Druhou skupinu představují děti **se zdravotním znevýhodněním**. Také jejich vzdělávání je třeba přizpůsobit potřebám, které vyplývají z jejich zdravotního oslabení, které jsou důsledkem dlouhodobější nemoci dítěte nebo které jsou dány lehčími poruchami jeho učení a chování.

Mezi děti se speciálními vzdělávacími potřebami se řadí i děti **se sociálním znevýhodněním**. Jsou to děti ze socio - kulturně znevýhodňujícího prostředí, děti s oslabeným rodinným zázemím či děti, které pocházejí z jazykově odlišného prostředí a které nemluví jazykem, v němž probíhá vzdělávání. Předškolní vzdělávání těchto dětí probíhá podle požadavků daných Rámcovým programem s tím, že obsah vzdělávání i podmínky je třeba přizpůsobit jejich speciálním - skupinově či individuálně značně rozdílným - potřebám, ať už jejich snížené sociální adaptabilitě či zvýšené potřebě výchovy a vzdělávání v některé oblasti, nebo i tím, že jsou uplatňovány speciální vzdělávací metody akcentující diagnostický a rozvojově stimulační význam, který předškolní vzdělávání pro tyto děti bezesporu má. Tato specifika postihuje školní, třídní i individuální vzdělávací program.

Vzdělávání dětí se speciálními potřebami v mateřských školách či třídách **se speciálním školním či třídním vzdělávacím programem** snáze splňuje základní povinné podmínky; vzdělávací prostředí v těchto školách tak v mnoha ohledech potřebám dětí vyhovuje lépe než prostředí běžných mateřských škol. Výhodou je např. odborně vyškolený personál, nižší počet dětí ve skupině, speciálně upravené prostředí apod.. Integrace dětí do běžné mateřské školy však znamená přiblížení se normálnímu prostředí a oslabení určité izolace dítěte i jeho případného vylučování ze společnosti ostatních vrstevníků. To bezpochyby usnadňuje osobnostní a sociální rozvoj i sociální integraci dítěte. Z toho důvodu Rámcový program podporuje integrované předškolní vzdělávání všude tam, kde je to vzhledem k druhu a míře postižení či znevýhodnění dítěte možné, resp. kde lze vytvořit a zajistit potřebné podmínky.

Důležitou podmínkou úspěšnosti předškolního vzdělávání dětí s postižením či znevýhodněním - ať už probíhá podle běžných či speciálních programů - je nejen volba vhodných (potřebám dětí odpovídajících) vzdělávacích metod a prostředků, ale i *uplatňování vysoce profesionálních postojů* pedagogů i ostatních pracovníků, kteří se na péči o dítě a jeho vzdělávání podílejí. Rozvoj osobnosti dítěte s postižením závisí na citlivosti a přiměřenosti působení okolí mnohem více, než je tomu u dítěte, které není ve svých možnostech primárně omezeno. Je nezbytné, aby pedagog postupoval vždy s vědomím, že takové dítě má jiné osobnostní předpoklady a je v obtížnější situaci: má menší zkušenosti a větší problémy s osamostatňováním, hůře se prosazuje, má méně rozvinutou schopnost autoregulace apod. Je proto velmi důležité, aby pedagog - v souladu se základními požadavky Rámcového programu - ponechal dítěti při nezbytném usměrňování, zvýšeném dozoru a pomoci dostatek samostatnosti a vlastního rozhodování a poskytoval mu tolik potřebnou pozitivní motivaci (oceňoval snahu, chválil i ty nejmenší úspěchy a pokroky). Je nutné zajistit, aby děti s postižením či znevýhodněním byly od počátků vzdělávání přijímány stejně jako jiné děti a nedostávaly od okolí častěji než ostatní negativní zpětnou vazbu.

Vzdělávání dětí mimořádně nadaných.

Zcela samostatnou skupinu představují děti, u nichž se začíná již v předškolním věku projevovat mimořádné nadání. Rámcovost Rámcového programu umožňuje, aby školní, třídní i individuální vzdělávací program, jeho obsah i podmínky, byly dle potřeb a možností rozumně přizpůsobeny mimořádným schopnostem dětí a popř. doplněny nabídkou dalších aktivit podle zájmů a mimořádných schopností dětí.

Nadané děti začínají dříve mluvit, jejich slovník je bohatší a dovedou se dobře vyjadřovat. pro tyto děti je typické, že se více vyptávají a jejich otázky přesahují oblast aktuálně vnímaného dění. projevují předčasný zájem i o čtení a počítání, při nástupu do

školy obvykle už dovedou číst, psát i počítat. Bývají zvídavější a otevřenější novým poznatkům, snaží se pochopit podstatu a souvislosti různých jevů. Jejich myšlení je mnohem zralejší, obvykle ve všech složkách. Ve svém uvažování jsou samostatnější, flexibilnější, dovedou lépe zobecňovat a stejně dobře dovedou svoje poznatky aplikovat. Mají zájmy, které jsou typické pro starší děti. Rychleji a snadněji se učí a dosahují lepších výkonů. Vyšší inteligence se projevuje i odlišným způsobem řešení úkolů. Takové děti věnují více času porozumění problému a hledání jeho řešení. Méně se zabývají dílčími problémy a méně se zaměřují na nepodstatné detaily. Bylo by možné říci, že se chovají účelnějším způsobem. Jejich schopnosti bývají rovnoměrně rozvinuté, dovedou pracovat s čísly i s verbálním materiálem.
Nadprůměrné děti mohou působit rušivě. Ve vztahu k učiteli je zatěžující jejich zvídavost a neustále dotazy, které přesahují výukový standard. Jejich tendence diskutovat může být posuzována jako nevychovanost. Snadno může vzniknout i opačný problém: výuka je přestane zajímat, nedávají pozor, jsou pasivní. Může se stát, že učitel správně nepochopí příčinu jejich nedostatečné motivace. Za takových okolností může i nadprůměrné dítě získat k mateřské škole odpor a ztratit zájem o další vzdělávání.

5.7. Pedagogická evaluace předškolního vzdělávání

Pedagogická evaluace je termín užívaný jako zastřešující, neboť znamená víc než tradiční hodnocení - znamená zjišťování, porovnávání a vysvětlování dat, charakterizujících stav, kvalitu a efektivnost vzdělávacího procesu a jeho výsledků; v rámci pedagogické evaluace jsou užívány dva pojmy: „evaluace“ a „hodnocení“. Jejich vzájemné zaměňování není pro pedagogiku zcela přesné. V Rámcovém programu je pojem „hodnocení“ užíván ve vztahu k dítěti či pedagogovi, resp. při hodnocení rozvoje a učení dítěte nebo při hodnocení práce pedagoga; pojem „evaluace“ pak tehdy, jedná-li se o hodnocení mateřské školy a její práce, o vzdělávací proces, o podmínky, které jsou v mateřské škole vytvářeny, o činnosti, které v mateřské škole probíhají, o výsledky, kterých mateřská škola dosahuje.

Plánování předškolního vzdělávání, sledování a vyhodnocování jeho průběhu i výsledků jsou důležité etapy vzdělávacího procesu, jejichž provázanost zvyšuje účinnost a kvalitu vzdělávání poskytovaného v mateřských školách. *Analýza pedagogického procesu a jeho výsledků i vyvozování odpovídajících závěrů a jejich reflexe (tj. pedagogická evaluace) by proto měly být v předškolním vzdělávání samozřejmostí.*

5.8. Závěr

Cíle a obsah předškolního vzdělávání formulované Rámcovým programem směrují mateřskou školu k tomu, aby děti, které ji opouštějí, byly osobnosti pokud možno jedinečné, vzhledem k svému věku a individuálním možnostem co nejvíce samostatné, sebevědomé a sebejisté, s vlastním rozumem, schopné dívat se kolem sebe, uvažovat, tvořivě přemýšlet a jednat, jedinci na své úrovni přizpůsobiví, odvážní a také zodpovědní, ochotní nejen přijímat, ale také dávat, schopní se dále rozvíjet, učit se všemu, co budou v životě potřebovat a aktivně čelit problémům, které život přináší.

Zkušenost nás učí, že dítě k samostatnosti a sebevědomí však nedovede pedagog, který je nesamostatný a který si nevěří; tvořivě myslet a jednat je nenaučí ten, kdo samostatně nepřemýšlí a sám netvoří; vytvořit si vlastní představu o světě a životě nepomůže dítěti ten, kdo sám svou představu nemá; odpovědnosti a cílevědomosti těžko může učit dítě pedagog, který nestojí pevně na svých vlastních nohou, který si sám nedokáže stanovit cíle své práce, svou odpovědnost přesouvá na jiné a schovává se za rozhodování druhých; ten, kdo sám nedokáže vést dialog, těžko bude učit své žáky se dohodnout a přistupovat na kompromisy.

Snahou odborníků v oblasti předškolní výchovy a vzdělávání je proto maximálně podporovat v osobnostech pedagogů a v jejich práci všechno to, co sami mají dětem předávat, tedy akcentovat rozvoj a uplatňování těch kompetencí, jejichž základy by dítě mělo pod jejich vedením získat. **Důležitou úlohu v tomto směru musí sehrát především profesní příprava pedagogů a jejich další vzdělávání.**

Literatura :

Kontrolní úlohy

1 Určete, zda následující sdělení je nebo není výrokem:

a) Jedním z vyučovacích předmětů v prvním ročníku základní školy je matematika.
b) Pražské metro přepraví denně půl miliónu lidí.
c) Ve světě je sto třicet sedm měst.
d) Vltava je přítokem Labe.
e) Otevřete okno !
f) Kde jste byl včera ve dvacet hodin ?
g) Tři plus pět rovná se osm.
h) Tři plus pět.
i) Devětkrát sedm se rovná šedesát pět.
j) Číslo -15 je menší než číslo -7. k) Sláva !
l) Třetí odmocnina z osmi je celé číslo.
m) 237 o) $a > 17$ q) Pracuje.
n) Ach ! p) $x + 3 = y$ r) Čtverec.
s) Čtverec je čtyřúhelník.
t) Merkur je planeta.
u) Číslo šest je dělitelné dvěma a třemi.

2 Formulujte negace výroků z úlohy 1, určete jejich pravdivost a porovnejte s pravdivostí původních výroků.

3 Utvořte ze dvou výroků „Karel píše“, „Petr čte“ složený výrok „Karel píše a Petr čte“. Zhodnoťte jeho pravdivost v různých situacích, za předpokladu, že
a) oba dílčí výroky jsou pravdivé,
b) první výrok je pravdivý a druhý není pravdivý,
c) první výrok není pravdivý a druhý pravdivý je,
d) ani jeden z dílčích výroků není pravdivý.

4 Výrok „Jana nepojede na výlet bez Petra“ formulujte tak, aby byl složen z výroků „Jana pojede na výlet“, „Petr pojede na výlet“. Určete typ složeného výroku, tj. zjistěte, zda hledaný složený výrok bude konjunkce, disjunkce, implikace nebo ekvivalence.

5 Rozhodněte, zda obě výpovědi lze s ohledem na pravdivost považovat za rovnocenné:
„včera jsem nebyl v kině ani v divadle“,
„není pravda, že jsem byl včera v kině nebo v divadle“.

6 Rozhodněte, zda oba výroky lze s ohledem na pravdivost považovat za rovnocenné:

a) „První auto nepojede bez druhého auta a ani druhé auto nepojede bez prvního auta.“
b) „Jela obě auta.“

7 Zjistěte, zda uvedený zápis vyjadřuje správnou úvahu.

a) $\dfrac{a \wedge b}{b}$ b) $\dfrac{(a \Rightarrow b) \wedge \neg b}{\neg a}$ c) $\dfrac{(a \Rightarrow b) \wedge \neg a}{\neg b}$

8 Dosazujte v uvedené výrokové formě za proměnnou (tedy do prázdného rámečku) vhodná slova a tvořte tím výroky ať už pravdivé nebo nepravdivé. Najděte i slova, po jejichž dosazení výroky nevzniknou.

a) 11 > $\quad$ + 3   b) ($\quad$ - 2) .($\quad$ + 1) = 0

9 Vyšetřete, zda uvedený zápis s proměnnými, popřípadě s jednou proměnnou, je nebo není výrokovou formou:

a) součet čísel □ a ○ se rovná 7,
b) číslo □ je větší než 5,
c) ○ + □ ,
d) součin čísla □ a součtu čísel ○ , □,

10 V podniku jsou zaměstnáni pracovníci: Novotný, Janda, Kohout, Mareš, Horák, Dlouhý, Farský, Všetečka, Adamová, Benda. (Pro zjednodušení je budeme označovat malými písmeny). Někteří z nich umí německy nebo anglicky. Německy umí n, k, h, m, f, anglicky umí d, f, a, n, m. Kteří zaměstnanci ovládají oba z uvedených jazyků? Kteří zaměstnanci umí pouze německy? Kteří umí pouze anglicky? Kteří neovládají žádný z uvedených jazyků ?

11 Určete vlastnosti relace
a) $\{[x,y]\in N\times N\colon x + y = 12\}$,
b) $\{[x,y]\in C\times C\colon |x| = |y|\}$,
c) $\{[x,y]\in R\times R\colon y = 3x + 1\}$,

12 Je dána relace R = {[r,s],[s,m],[m,m]} v množině M = {r,s,m}. Určete, zda
a) R je nebo není antisymetrická,
b) výrok $(\forall x,y\in M)\ xRy \Rightarrow \neg yRx$ je nebo není pravdivý.

13 Rozhodněte, zda daná relace je nebo není ekvivalence v množině M = {a,b,c,d} jestliže
a) R = {aa,bb,cc,dd,bc,cb}
b) R = {aa,bb,cc,dd}

c) $R = \{[x,y] \in M \times M: x = y\} \cup \{bc, cb, ad, da\}$.
Své rozhodnutí zdůvodněte.

14 Zapište alespoň tři různá uspořádání v množině M, jestliže $M = \{a,b,c,d\}$.

15 Zapište alespoň dvě relace v M, $M = \{p,g,r\}$, které nejsou uspořádáním v M .

16 Určete, zda relace S je zobrazením z C do D, když
a) $S = \{[m,n],[o,p],[p,p]\}$, $C = \{m,n,o,p\}$, $D = \{p,n\}$
b) $S = \{[a,b],[b,a]\}$, $C = \{a,b\}$, $D = C$.
c) $S = \{[f,g],[g,h],[h,f],[f,h]\}$, $C = \{f,g,h,j\}$, $C = D$.

17 Zjistěte, zda jsou ekvivalentní množiny
a) $\{a,b,c\} \sim \{k,l,m\}$,
b) $\{a,b,c\} \sim \{x \in N: x<4\}$,
c) $N \sim S$, kde S je množina všech sudých přirozených čísel.

18 Dokažte, že
a) množina všech přirozených čísel je nekonečná,
b) množina všech lichých čísel je nekonečná.

19 V množině všech přirozených čísel N je dána operace „aritmetický průměr dvou čísel“. Zjistěte, zda je asociativní a zda má neutrální prvek.

20 V množině všech celých čísel C je dána operace $*$ takto:
$(\forall u,v \in C)\ u*v = u + v + 2u.v$. Vypočítejte $2 * 7 =$. Vypočítejte x, jestliže $x * 4 = 13$.
Zjistěte, zda je tato operace asociativní.

21 V množině $G = \{r,s\}$ je dána operace $*$ takto: $r*r = r$, $r*s = r$, $s*r = r$, $s*s = s$. Zapište tabulku operace $*$ v množině G. Určete vlastnosti operace $*$ v množině G.

22 V množině všech přirozených čísel N je dána binární operace ♦ takto: f ♦ g = f.g + f + g
Vyšetřete vlastnosti operace ♦ v množině N.

23 Sestavte tabulku pro úplnou binární operaci ◆ v množině M,
$M = \{a,b,c\}$, jestliže $(\forall x,y \in M)\ x = y \Rightarrow x$ ◆ $y = x \wedge x \neq y \Rightarrow x$◆$y = z \ \wedge\ z \neq x \wedge z \neq y$.

24 Zjistěte, které vlastnosti má binární operace $\square$ v množině celých čísel C, jestliže $(\forall x,y \in C)\ x \square y = x + y + 7$.

25 Binární operace ▪ v množině $M = \{a,b,c,d\}$ je dána tabulkou.

▪	a	b	c	d
a	b	c	a	b
b	c	d	b	a
c	a	b	c	d
d	b	a	d	a

Vypočítejte: (b▪c)▪a = , b▪(c▪a) = , (d▪a)▪d = , d▪(a▪d) = ,
(d▪d)▪a = , d▪(d▪a) = . Rozhodněte, zda operace ▪ v množině M je nebo není asociativní.
Určete, zda ke každému prvku množiny M existuje vzhledem k operaci ▪ inverzní prvek.