Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem
Pedagogická fakulta

STATISTIKA

pro studium učitelství 1. stupně základní školy

Jan Melichar
Josef Svoboda

2002

Prof. RNDr. Jan Melichar, CSc., PaedDr. Josef Svoboda

Statistika

Vydala: Katedra matematiky Pedagogické fakulty Univerzity J. E. Purkyně v Ústí nad Labem, 2002

Recenzovali:

Prof. RNDr. Jiří Cihlář, CSc.

PaedDr. Anna Stopenová, Ph. D.

Předmluva

Předložený učební text Statistika je určen studentům 2. ročníku oboru učitelství pro 1. stupeň základní školy studujícím v kombinovaném studiu. Ve studijním plánu tohoto oboru je předmětu Statistika věnováno 6 hodin pracovního semináře a předmět je zakončen zápočtem.

V předmětu Statistika je zařazena pravděpodobnost a kombinatorika, neboť pravděpodobnost a kombinatorika jsou pro statistiku potřebné. V kombinovaném studiu učitelství 1. stupně základní studují nejen absolventi a absolventky gymnázií, ale i absolventky středních pedagogických škol a i středních škol jiných. Učební text si dává za úkol srozumitelnou formou být pomocníkem při studiu tohoto předmětu a pomoci překonat rozdíly v předchozí matematické přípravě.

Autoři

Obsah -- str.

1. Počet pravděpodobnosti

Nauka o počtu pravděpodobnosti se nazývá stochastika, resp. počet pravděpodobnosti.

1.1 Klasická definice pravděpodobnosti

Klasická definice pravděpodobnosti se omezuje na pokusy, v nichž elementární jevy jsou stejně možné.

Například při hodu mincí:

E_1 ....elementární jev „padne líc“

E_2 ....elementární jev „padne rub“

Například při hodu kostkou z „Člověče nezlob se“:

E_1.........elementární jev „padne 1“

E_2 ....elementární jev „padne 2 “

atd.

Definice 1:

Jestliže všechny elementární jevy náhodného pokusu E_i (i = 1, 2, ...,n) jsou stejně možné, pak pravděpodobnost jevu A se nazývá podíl počtu $n(A)$ elementárních jevů příznivých jevu A k počtu n všech možných elementárních jevů daného pokusu. Značí se symbolem $P(A)$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}$$

Příklady:

1. Při hodech mincí pravděpodobnosti padnutí rubu (E_1) a padnutí líce (E_2) jsou

$$P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2} \quad .$$

2. Při hodu hrací kostkou jsou elementární jevy „Padne číslo i “,počet elementárních jevů je n = 6

a) Pravděpodobnost, že „padne 6“ je $P(E_6) = \frac{1}{6}$.

b) Jev A..... „Padne sudé číslo.“ {2, 4, 6} $n(A)$ = 3

Jev B..... „Padne číslo dělitelné třemi“. {3, 6} $n(B)$ = 2

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \qquad P(B) = \frac{n(B)}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad .$$

Lze vyjádřit v procentech: $P(A)$ = 50 % a $P(B)$ = 33,33 % .

3. Při hodu dvěma kostkami jsou elementární jevy $E_{i,j}$ ..... „Na kostkách padne uspořádaná dvojice [i, j]". Počet všech možných těchto elementárních jevů je dán součinem 6.6 = 36.

Počet elementárních jevů příznivých jevu A .... „Padne součet 5" je $n(A) = 4$, neboť jsou to tyto dvojice [1, 4], [2, 3], [3, 2], [4, 1].

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

4. V osudí je 6 bílých a 8 červených lístků (stejného tvaru a stejné kvality).

Jev A ......„Vytáhneme bílý lístek".

Jev B ......„Vytáhneme červený lístek".

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}, \qquad P(B) = \frac{n(B)}{n} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}.$$

1. 2. Relativní (poměrná) četnost jevu *A*

Bylo provedeno N pokusů, jev A se vyskytl $N(A)$ - krát, pak podíl

$$r(A) = \frac{N(A)}{N}$$

se nazývá relativní četnost jevu A.

Například:

1. V sérii 4000 výrobků je 16 výrobků vadných, pak $r(A) = \dfrac{16}{4000} = 0{,}004$.
   V procentech je $r(A) = 0{,}4$ %.
2. Při 4 040 hodech padl rub 2048 krát, při 12000 hodech padl rub 6019 krát, při 24000 hodech padl rub 12012 krát.

$$r(A) = \frac{2048}{4040}, \qquad r(B) = \frac{6019}{12000}, \qquad r(C) = \frac{12012}{24000}.$$

Při vzrůstajícím N se relativní četnost přibližuje hodnotě vypočtené pravděpodobnosti.

1. 3. Věty o pravděpodobnosti

Věta 1 :

Pravděpodobnost $P(A)$ každého jevu A je nezáporné číslo menší nebo rovné jedné:

$$\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$$

Věta 2:

Pravděpodobnost jistého jevu S se rovná jedné : $\mathbf{P(S) = 1}$

Pravděpodobnost nemožného jevu $\emptyset$ se rovná nule : $\mathbf{P(\emptyset) = 0}$

Příklady:

1. Pro jistý jev $P(S) = 1$

Při hodu kostkou padne přirozené číslo menší než sedm.

2. Pro nemožný jev $P(\emptyset) = 0$

Při hodu kostkou padne přirozené číslo větší než 6.

Věta 3: (Věta o pravděpodobnosti sjednocení jevů)

Pro pravděpodobnost sjednocení dvou jevů A, B platí $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$ **.**

Speciálně jsou-li jevy disjunktní ($\boldsymbol{A \cap B = \{\ \}}$), pak platí $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$.

Příklady:

1. Určíme, jaká je při hodu dvěma kostkami pravděpodobnost, že součet čísel na obou kostkách bude roven 5 (jev A) nebo na první kostce padne číslo 2 (jev B).
Jevu A jsou příznivé jevy [1, 4], [2,3], [3,2], [4, 1]. $n(A) = 4$
Jevu B jsou příznivé jevy [2, 1], [2, 2], [2, 3], [2, 4], [2, 5], [2,6]. $n(B) = 6$
Všech možných jevů je 36.
$A \cup B$ = { [1, 4], [2,3], [3,2], [4, 1], [2, 1], [2, 2], [2, 4], [2, 5], [2,6]}
$A \cap B$ = {[2,3]}

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

2. Určíme jaká je při hodu dvěma kostkami pravděpodobnost, že součet čísel na obou kostkách bude roven 5 (jev A) nebo na obou kostkách padnou sudá čísla (jev C).

Jevu A jsou příznivé jevy [1, 4], [2,3], [3,2], [4, 1]. $n(A) = 4$
Jevu C jsou příznivé jevy [2, 2], [2,4], [2, 6], [4, 2], [4, 4], [4, 6], [6, 2], [6, 4], [6, 6].
$A \cup C$ = {[1, 4],[2,3],[3,2], [4, 1], [2, 2], [2,4], [2, 6], [4, 2], [4, 4], [4, 6], [6, 2], [6, 4],[6, 6]}
$n(C) = 9$. $A \cap C = \{\ \}$ Jevy A, C jsou disjunktní.

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{4}{36} + \frac{9}{36} = \frac{13}{36}\ .$$

Věta 4: (Věta o pravděpodobnosti doplňkových jevů)
Pro pravděpodobnost jevu A' doplňkového k jevu A platí $\boldsymbol{P(A') = 1 - P(A)}$.

Příklad:

Budeme házet jednou kostkou. K jevu A „Padne 6“, je doplňkový jev A' „Nepadne 6“, to znamená, padne 1, 2, 3, 4, 5.

$$P(A') = 1 - \mathrm{P}(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}\ .$$

Věta 5. (Věta o podmíněné pravděpodobnosti)
Pro pravděpodobnost jevu A podmíněného jevem B platí $P(A \mid B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)}$,

kde $\mathrm{n}(B) \neq 0$ je počet elementárních jevů příznivých jevu B a $n(A \cap B)$ je počet elementárních jevů příznivých současně jevům A, B.

Příklad:

Určíme jaká je při hodu dvěma kostkami pravděpodobnost, že součet čísel na obou kostkách bude roven 5 (jev A), jestliže na první kostce padne číslo 2 (jev B).

Jevu A jsou příznivé jevy [1, 4], [2,3], [3,2], [4, 1]. $n(A) = 4$.
Jevu B jsou příznivé jevy [2, 1], [2, 2], [2, 3], [2, 4], [2, 5], [2,6]. $n(B) = 6$.
Všech možných jevů je 36.
$A \cap B = \{[2,3]\}$

Tedy pravděpodobnost jevu A podmíněného jevem B je $P(A \mid B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)} = \dfrac{1}{6}$

1. 4. Nezávislé a závislé jevy

Jevy A, B se nazývají jako nezávislými jevy, jestliže pravděpodobnost jednoho z nich nezávisí na tom, zda druhý jev nastal či nikoliv, tj. když platí $P(A \mid B) = P(A)$ a $P(B \mid A) = P(B)$.
Nejsou-li uvedené podmínky pro jevy A , B splněny, nazýváme je závislými jevy.

Věta 6: (Věta o pravděpodobnosti dvou nezávislých jevů)

Jevy A, B jsou nezávislé tehdy a jen tehdy, když platí $P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$.

Příklady:

1. Při hodu dvěma mincemi jevy A „Na první minci padl líc“ a B „ Na obou mincích padl zároveň líc nebo rub“ jsou nezávislé, neboť

Jev A … „ Na první minci padl líc“. [L, R], [L, L]

Jev B … „ Na obou mincích padl zároveň líc nebo rub“. [L, R], [R, L]

a pak

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{n(B)}{n} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

$P\,(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n} = \dfrac{1}{4} = P(A) \,.\, P(B)$

2. Házíme dvěma kostkami. S jakou pravděpodobností padne na obou šestka? Jde o nezávislé jevy?

Jev A …. „Na první kostce padne 6“.

Jev B …..„Na druhé kostce padne 6“.

$P(A) = \dfrac{1}{6}$, $P(B) = \dfrac{1}{6}$.

$P\,(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n} = \dfrac{1}{36} = P(A) \,.\, P(B)$.

Ano jde o nezávislé jevy.

3. Určíme zde při hodu dvěma kostkami jsou jevy,kdy součet čísel na obou kostkách bude roven 5 (jev A) a na první kostce padne číslo 2 (jev B) závislé resp.nezávislé.

Jevu A jsou příznivé jevy [1, 4], [2,3], [3,2], [4, 1]. $P(A) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$.

Jevu B jsou příznivé jevy [2, 1], [2, 2], [2, 3], [2, 4], [2, 5], [2,6]. $P(B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$. Všech možných jevů je 36.

$A \cap B = \{[2,3]\}$

$P(A \cap B\,) = \dfrac{n(A \cap B)}{n} = \dfrac{1}{36}$. $P(A \cap B\,) \neq P(A) \,.\, P(B)$

Jevy jsou závislé.

1. 5. Bernoulliho schéma

Věta:

Nechť $P(A)$ je pravděpodobnost jevu A, který je výsledkem jistého náhodného pokusu. Pravděpodobnost, že při n-násobném opakování tohoto pokusu nastane jev A právě k-krát ($k \leq n$) je

$$\binom{n}{k} \,.\, P(A)^k \,.\, [\,(1 - P(A)\,]^{n-k}$$

Jakub Bernoulli (1654-1705) – švýcarský matematik, zakladatel počtu pravděpodobnosti.

Příklady:

1. Hodím zároveň 10 mincemi. S jakou pravděpodobností padne právě na osmi rub.

$n = 10$ $k = 8$ $P(A) = 0,5$

Výpočet: $\binom{10}{8} \,.\, 0,5^8 \,.\, (1 - 0,5)^{10-8} = 10 \,.\, 9 \,/\, 2 \,.\, 0,5^8 \,.\, 0,5^2 =$
$= 0,043945 = 4,4\ \%$

Na deseti zároveň hozených mincí padne právě na osmi rub s pravděpodobností 4,4 %.

2. Pravděpodobnost narození chlapce je v populaci 55 %. Určete pravděpodobnost, že ve skupině deseti náhodně vybraných dětí budou nejvýše 3 dívky.

Výpočet:

Nejvýše 3 dívky znamená 0, 1, 2, 3.

Pravděpodobnost narození chlapce $P(CH) = 0,55$

Pravděpodobnost narození dívky $P(D) = 0,45$

žádná dívka $\binom{10}{0} \,.\, 0,45^0 \,.\, 0,55^{10} = 0,253 \,.\, 10^{-2}$

jedna dívka $\binom{10}{1} \,.\, 0,45^1 \,.\, 0,55^9 = 2,07 \,.\, 10^{-2}$

dvě dívky $\binom{10}{2} \ . \ 0,45^2 \ . \ 0,55^8 = 1,70 \ . \ 10^{-2}$

tři dívky $\binom{10}{3} \ . \ 0,45^3 \ . \ 0,55^7 = 2,03 \ . \ 10^{-2}$

$0,253 \ . \ 10^{-2} + 2,07 \ . \ 10^{-2} + 1,70 \ . \ 10^{-2} + 2,03 \ . \ 10^{-2} = 6,05 \ . \ 10^{-2} = 0,06$

Pravděpodobnost, že ve skupině deseti náhodně vybraných dětí budou nejvýše tři dívky je 0,06 což je 6 %.

4. Klíčivost semen je 48% - ní. S jakou pravděpodobností ze 6 zasazených semen vzklíčí právě 4?

Vyřešte jako úkol.

2. Kombinatorika

V životní praxi často potřebujeme řešit úlohy, v nichž sestavujeme určité skupiny objektů a zajímá nás kolik takových skupin je, jaké je pořadí jejich prvků. Například trenér hokejistů sestavuje útočné trojice z určitého skupiny hráčů, potřebuje sestavit všechny možné trojice a navíc potřebuje znát kdo bude hrát levé křídlo, kdo pravé a kdo bude středním útočníkem. Tedy záleží na pořadí hokejistů v této skupině. Ředitel školy potřebuje sestavit rozvrh. Tvoří opět skupiny předmětů, kde záleží na pořadí, atp. Tím vším se zabývá obor matematiky nazývaný kombinatorika.

Kombinatorika je obor matematiky, zabývající se uspořádáváním daných prvků podle jistých pravidel do určitých skupin a výpočtem množství těchto skupin. Kombinatorika je též nazývána naukou o skupinách. Ve starých učebnicích aritmetiky z minulého století kombinatoriku nazývali sestavování. Změnu pořadí objektů ve skupinách nazývali přestavy.

2.1. Základní pojmy kombinatoriky

Základním pojmem kombinatoriky, je pojem skupiny. Skupinu o n prvcích budeme rozumět libovolnou n-tici prvků, kterými mohou být libovolné objekty (matematické i nematematické). Pokud budeme uvažovat skupiny s navzájem různými objekty bez ohledu na jejich pořadí, je pojem skupiny totožný s pojmem konečné množiny. Obecně se však některé prvky ve skupině mohou opakovat a uvažované n-tice mohou být uspořádané. Musíme tedy zvažovat zda u prvků ve skupinách záleží na pořadí a zda se prvky mohou opakovat. Tyto dvě základní podmínky nám určují další základní pojmy kombinatoriky.

2.1.1. Permutace

2.1.1.1. Permutace *n* prvků bez opakování

Uvažujeme libovolnou základní množinu **Z** o n prvcích. Skupiny obsahující všech n prvků dané základní množiny **Z** a lišící se jen pořadím nazýváme permutacemi *n* prvků bez opakování.

Stručněji lze říci:

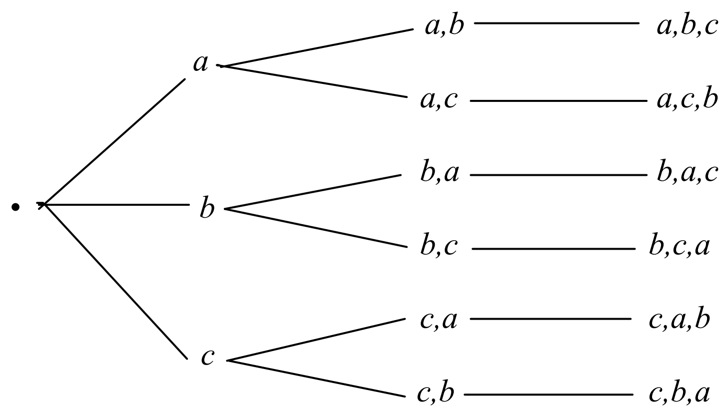
Permutace *n* prvků bez opakování jsou všechny možné uspořádané *n*-tice vytvořené ze všech prvků dané základní množiny.

Příklad:

Je dána základní množina $\mathbf{Z} = \{a;\ b;\ c\}$, všechny permutace tří prvků *a, b, c* bez opakování jsou tyto uspořádané trojice:

$[a;\ b;\ c]$, $[a;\ c;\ b]$, $[b;\ a;\ c]$, $[b;\ c;\ a]$, $[c;\ a;\ b]$, $[c;\ b;\ a]$.

Určit všechny trojice nám pomůže logický strom možností:

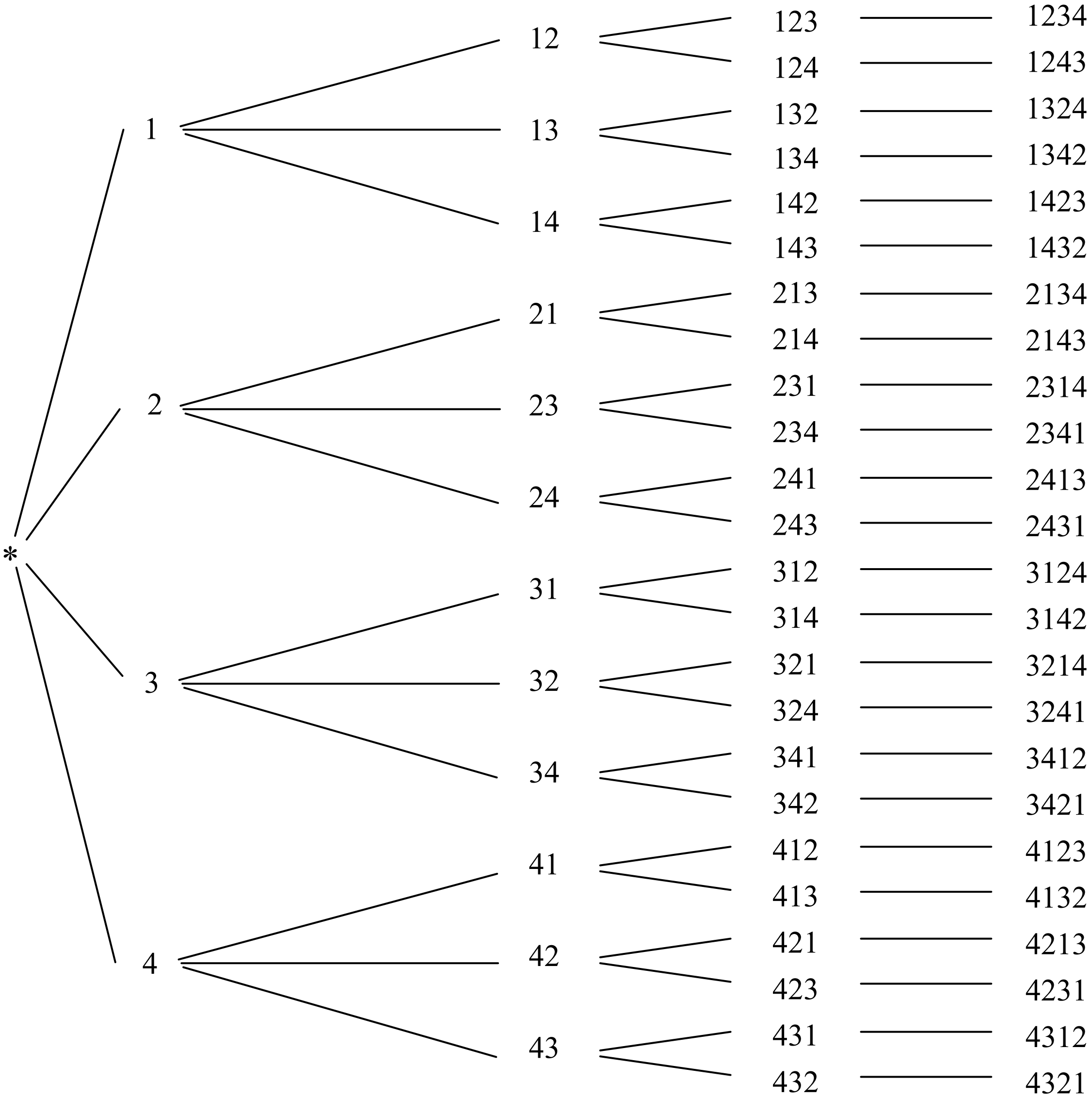


Příklad: Kolik čtyřciferných čísel můžeme utvořit pomocí cifer 1, 2, 3, 4, když se číslice nesmí opakovat?

Opět použijeme logický strom možností. Při konstrukci logického stromu možností sledujte počty jednociferných, dvojciferných, trojciferných a čtyřciferných čísel v jednotlivých „patrech“ logického stromu možností.

V prvním patře jsou čtyři čísla jednociferná, ve druhém patře dvanáct čísel dvojciferný (například číslo 23), ve třetím patře dvacet čtyři trojciferných (například číslo 234) a ve čtvrtém patře dvacet čtyři čtyřciferných (například číslo 2341).

Logický strom možností:



Z logického stromu možností usoudíme, že počet čtyřciferných čísel je

4.3.2.1 = 24.

Pro součiny typu 3 . 2 . 1 nebo 4 . 3 . 2 . 1 nebo 8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 .2. 1 a podobně, které při výpočtech budeme často používat, zavádíme zvláštní označení.

Čteme a píšeme:

„tři faktoriál“	3!	3 . 2 . 1
„čtyři faktoriál“	4!	4 . 3 . 2 . 1
„osm faktoriál“	8!	8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1

„n faktoriál“ $\quad n! \quad n.(n-1).(n-2).(n-3) \ldots 2.1$

Pro počet permutací bez opakování platí věta:
Budiž dána základní množina **Z** o *n* prvcích. Pak počet *P(n)* všech permutací bez opakování *n* prvků je dán vzorcem

$$\boxed{P(n) = n.(n-1)\ldots 3.\,2.1 = n!}$$

2.1.1.2. Permutace k prvků s opakováním

Uvažujme opět libovolnou základní množinu **Z** o *n* prvcích. Skupiny o *k* prvcích, které obsahují všech *n* prvků množiny **Z**, přičemž některé prvky se opakují (tj. $k > n$) a liší se pořadím prvků , se nazývají permutace *k* prvků s opakováním.

Stručně lze říci: Permutace *k* prvků s opakováním jsou všechny možné uspořádané *k*-tice prvků, v nichž některé prvky se opakují.

Například: Je-li dána množina $\mathbf{Z} = \{a; b; c\}$, pak permutace prvků *a, a, b, c* jsou tyto uspořádané čtveřice:

$[a,a,b,c]$, $[a,a,c,b]$, $[a,b,a,c]$, $[a,b,c,a]$, $[a,c,a,b]$, $[a,c,b,a]$, $[b,a,a,c]$, $[b,a,c,a]$, $[b,c,a,a]$, $[c,a,a,b]$, $[c,a,b,a]$, $[c,b,a,a]$.

Pro počet permutací s opakováním platí věta:

Je-li dáno *n* různých prvků základní množiny **Z** a vytvoříme-li z nich permutace *k* prvků ($k > n$), přičemž 1. prvek se opakuje k_1-krát, 2. prvek k_2-krát, … , *n*-tý prvek k_n-krát je počet všech těchto permutací s opakováním dán vzorcem

$$\boxed{P'_{(k_1,k_2,\ldots k_n,)} = \frac{k!}{k_1!.k_2!.\mathrm{K}\ k_n!}}\ , \quad \text{kde } k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$$

Například: Je-li dána základní množina $\mathbf{Z} = \{a; b; c\}$, pak počet permutací s opakováním

a) z prvků $a,\ a,\ b,\ c$ je $P'_{(2,1,1)}(4) = \frac{4!}{2!.1!.1!} = \frac{24}{2} = 12$

b) z prvků a,a,a,b,c je $P'_{(3,1,1)}(5) = \frac{5!}{3!.1!.1!} = \frac{120}{6} = 20$

c) z prvků a,b,c,c,c je $P'_{(1,2,3)}(6) = \frac{6!}{1!.2!.3!} = \frac{720}{2.6} = 60$

Pomocí logického stromu možností lze opět odvodit počty permutací s opakováním.

2.1.2. Variace

2.1.2.1. Variace bez opakování

Skupiny obsahující k prvků vybraných z n prvků dané základní množiny Z a lišící se buď prvky (aspoň jedním) nebo jejich uspořádáním, nazýváme variacemi k-té třídy z n prvků bez opakování.

Stručně lze říci: Variace k-třídy z n prvků bez opakování jsou všechny možné uspořádané k-tice různých prvků vybraných z n prvků dané základní množiny.

Například: Je-li dána základní množina Z = $\{a,b,c\}$, všechny variace druhé třídy ze tří prvků a,b,c jsou uspořádané dvojice :

$$[a,b],\ [a,c],\ [b,a],\ [b,c],\ [c,a],\ [c,b].$$

Podíváme-li se na logický strom možností můžeme řešit úlohu :
Kolik jednociferných, dvojciferných, trojciferných a čtyřciferných čísel můžeme utvořit pomocí cifer 1, 2, 3 a 4, když se číslice nesmí opakovat? Též vidíme, že permutace 4 prvků bez opakování jsou variace 4 třídy ze 4 prvků bez opakování.

Poznámka: Permutace n prvků bez opakování jsou variace n-té třídy z n prvků bez opakování.

Dodefinujeme-li, že platí 0! = 1, pak pro počet variací bez opakování platí:

Nechť je dána základní množina Z o n prvcích a nechť k je přirozené číslo menší nebo rovno n, potom počet $V_k(n)$ všech variací k-té třídy z n prvků bez opakování je dán vzorcem

$$V_k(n) = n.(n-1).(n-2).....(n-k+1)$$

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Poznámka: Pro $k = n$ je $V_n(n) = n! = P(n)$

Například:

$V_2(3) = 3 \,.\, 2 = 6$ $\qquad$ $V_3(7) = 7 \,.\, 6 \,.\, 5 = 210$

2.1.2.2. Variace s opakováním

Skupiny obsahující *k* prvků sestavených z *n* různých prvků dané základní množiny tak, že kterýkoli z prvků se může ve skupině libovolněkrát opakovat a jednotlivé skupiny se liší buď prvky (aspoň jedním) nebo jejich uspořádáním, se nazývají variace *k*-té třídy z *n* prvků s opakováním.

Stručně lze říci: Variace k-té třídy z n prvků s opakováním jsou všechny možné uspořádané *k*-tice prvků sestavené z daných *n* různých prvků, prvky uspořádané *k*-tice nemusí být různé, mohou se opakovat.

Například: Je-li dána základní množina Z = $\{a,b,c\}$, pak variace druhé třídy ze tří prvků *a, b, c* s opakováním jsou uspořádané dvojice

$[a,a],[a,b],[a,c],[b,a],[b,b],[b,c],[c,a],[c,b],[c,c],$

variace třetí třídy ze tří prvků *a, b, c* s opakováním jsou uspořádané trojice

$[a,a,a]$, $[a,a,b]$, $[a,a,c]$, $[a,b,a]$, $[a,b,b]$, $[a,b,c]$, $[a,c,a]$, $[a,c,b]$, $[a,c,c]$,

$[b,a,a]$, $[b,a,b]$, $[b,a,c]$, $[b,b,a]$, $[b,b,b]$, $[b,b,c]$, $[b,c,a]$, $[b,c,b]$, $[b,c,c]$,

$[c,a,a]$, $[c,a,b]$, $[c,a,c]$, $[c,b,a]$, $[c,b,b]$, $[c,b,c]$, $[c,c,a]$, $[c,c,b]$, $[c,c,c]$.

Pro počet variací *k*-třídy z *n* prvků s opakováním platí:

Nechť je dána základní množina Z o *n* různých prvcích a nechť je dáno libovolné přirozené číslo *k*, pak pro počet variací *k*-té třídy z *n* prvků s opakováním platí vzorec

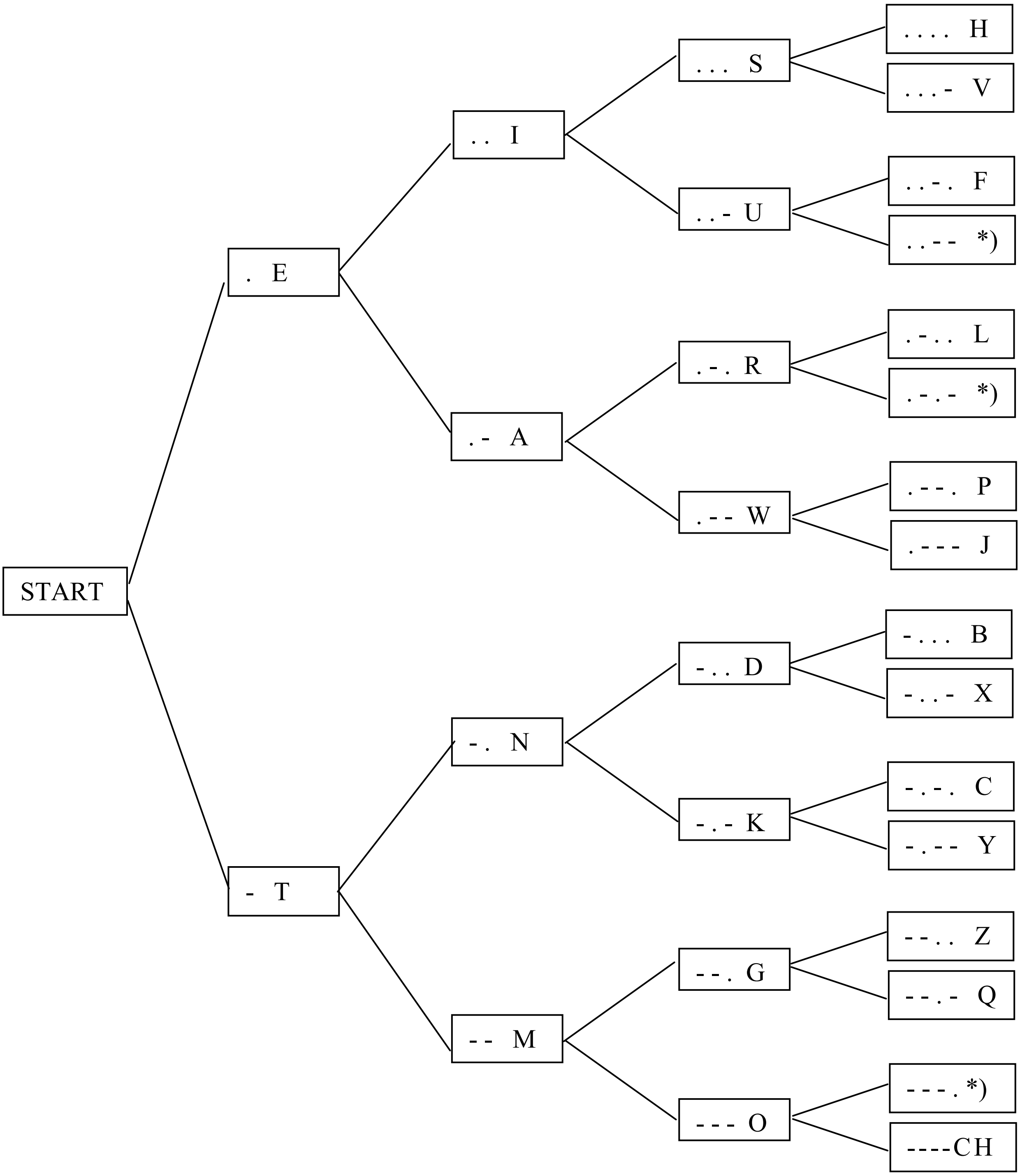
$$\boxed{V_k'(n) = n^k}$$

Například:

$$V_2'(3) = 3^2 = 9 \qquad V_4'(2) = 2^4 = 16$$

Úloha: Vytvořte ze znaků „ **.**“ , „ **-** “ jednoprvkové, dvouprvkové, tříprvkové a čtyřprvkové variace s opakováním. Určete jejich počty. K těmto znakům přiřaďte písmena dle Morseovy abecedy.

Úloha budeme řešit pomocí logického stromu možností:



*).....toto seskupení se nevyužívá

2.1.3. Kombinace

2.1.3.1. Kombinace bez opakování

Skupiny obsahující k prvků vybraných z n prvků dané základní množiny Z a lišící se prvky (aspoň jedním), přičemž se nepřihlíží (na rozdíl od variací) k jejich uspořádání, se nazývají kombinace k-té třídy z n prvků bez opakování.

Stručně lze říci: Kombinace k-té třídy z n prvků bez opakování jsou všechny možné podmnožiny základní množiny Z, které obsahují k prvků.

Poznámka: Pokud neřekneme slova „bez opakování“ automaticky uvažujeme o permutaci, variaci a kombinaci bez opakování. Víme tedy, že podmnožiny konečné množiny Z se nazývají kombinace množiny Z . Lze tedy říkat „ Podmnožina P množiny Z “ nebo „ Kombinace P množiny Z “ .

Například: Je-li dána základní množina Z = $\{a, b, c\}$, pak všechny kombinace první třídy ze tří prvků a,b,c jsou množiny $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$,
všechny kombinace druhé třídy ze tří prvků a,b,c jsou množiny $\{a, b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$,
kombinací třetí třídy ze tří prvků a,b,c je samotná množina $\{a,b,c\}$.

Úloha: Je dána množina M = $\{a,b,c,d\}$. Určete všechny její 2-prvkové kombinace. Systém, podle kterého vybíráme všechny 2-prvkové kombinace určíme tabulkovou nebo grafickou metodou.

Tabulková metoda:

1)

a b c d	$\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$
a b c d	$\{b, c\}$, {b,d}
a b c d	$\{ c,d\}$

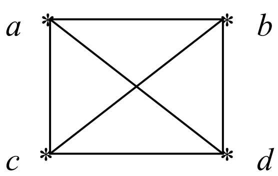
2)

	a	b	c	d
a	*	{a,b}	{a,c}	{a,d}
b	*	*	{b,c}	{b,d}
c	*	*	*	{c,d}

a	b	c	d
/	/	-	-
/	-	/	-
/	-	-	/
-	/	/	-
-	/	-	/
-	-	/	/

Grafická metoda:

Prvky množiny M znázorníme čtyřmi body v rovině, které leží přibližně na kružnici. Narýsujeme všechny úsečky, které jsou určeny těmito čtyřmi body. Krajní body úseček udávají všechny 2-prvkové kombinace.



$\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$

$\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{c,d\}$

Pro počet kombinací k-té třídy z n prvků bez opakování platí:

Nechť je dána základní množina o n prvcích a nechť k je menší nebo rovno n, k je přirozené číslo, pak počet $C_k(n)$ všech kombinace k-té třídy z n prvků bez opakování je dán vzorcem

$$\boxed{C_k(n) = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\Lambda\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\Lambda\cdot k}}$$

Příklady:

$C_2(3) = \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} = 3$ $\qquad$ $C_3(5) = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10$

Pomocí tohoto vzorce definujeme kombinační číslo :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\Lambda\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\Lambda\cdot k}}$$

pro n a k přirozené číslo a k menší nebo rovno n

Dále definujme $\binom{n}{0} = 1$ a $\binom{0}{0} = 1$.

2.1.3.1.1. Doplňková kombinace

Doplněk K´ kombinace K množiny M se nazývá doplňková kombinace ke kombinaci K.

Poznámka: Je samozřejmé, že počet všech doplňkových kombinací dané množiny je roven počtu jejich kombinací.

Úloha: U starých jízdenek městské hromadné dopravy byla množina 9 prvků . Ve městě X nad Y jezdily autobusy a trolejbusy. Autobusů jezdilo více. Kolika místné znehodnocovače jízdenek ředitelství městské dopravy vybralo?

Řešení:

Hromadná doprava X nad Y		
9	8	7
6	5	4
1	2	3

$C_1(9) = 9$

$C_2(9) = 36$

$C_3(9) = 84$

$C_4(9) = 126$

$C_5(9) = 126$

$C_6(9) = 84$

$C_7(9) = 36$

$C_8(9) = 9$

$C_9(9) = 1$

Pro autobusy byly zvoleny čtyřmístné a pro trolejbusy třímístné znehodnocovače. Je vidět, že doplňkových kombinací je stejně, ale vícemístné znehodnocovače se hůře kontrolují.

2.1.3.2. Kombinace s opakováním

Skupiny obsahující *k* prvků vybraných z *n* prvků dané základní množiny Z tak, že kterýkoli z prvků se může ve skupině libovolněkrát opakovat a nepřihlíží se k uspořádání prvků ve skupinách, se nazývají kombinace *k*-té třídy z *n* prvků s opakováním.

Například: Kombinace druhé třídy ze tří prvků *a,b,c* s opakováním jsou *dvojice* *a,a; a,b; a,c; b,b; b,c ; c,c.* Kombinace třetí třídy ze tří prvků *a,b,c* s opakováním jsou trojice *a,a,a; a,a,b; a,a,c; a,b,b; a,b,c; a,c,c; b,b,b; b,b,c; b,c,c; c,c,c*

Pro počet kombinací *k*-té třídy z *n* prvků s opakováním platí : Nechť je dána základní množina Z o *n* různých prvcích a budiž dáno libovolné přirozené číslo *k*, pak počet všech kombinací *k*-té třídy z *n* prvků s opakováním je dán vzorcem

$$\boxed{C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}}$$

Například : $C'_2(3) = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$

2.1.4. Kartézský součin

Často potřebujeme určit počet všech možných uspořádaných dvojic. Uspořádané dvojice jsou například dvojice určující políčko na šachovnici nebo dvojice dopisujících si dvojic, kde je určeno pořadím kdo je odesílatel a kdo je příjemce

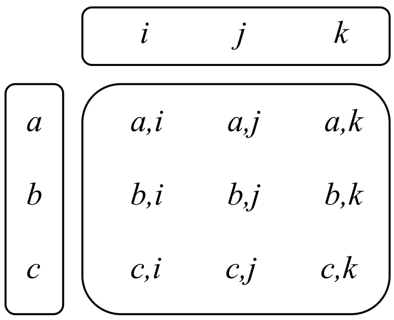
Kartézský součin množin A a B je množina všech uspořádaných dvojic, kde první složkou dvojice je prvek množiny A a druhou složkou prvek množiny B. Zapisujeme A × B = C.

Například : Množina A = $\{a,b,c,d\}$, množina B = $\{x,y,z\}$ pak kartézský součin A × B = $\{[a,x];[a,y];[a,z];[b,x];[b,y];[b,z];[c,x];[c,y];[c,z];[d,x];[d,y];[d,z]\}$.

Úloha: Dvě trojčlenná družstva stolních tenistů se střetla na turnaji tak, že každý hráč prvního družstva hrál s každým hráčem druhého družstva. Určete všechny dvojice střetnutí a počet zápasů turnaje.

Řešení: První družstvo označíme K = $\{a,b,c\}$, druhé družstvo L = $\{i,j,k\}$. Množinovým diagramem nebo tabulkou nebo stromem nebo kartézským grafem znázorníme množinu všech uspořádaných dvojic:

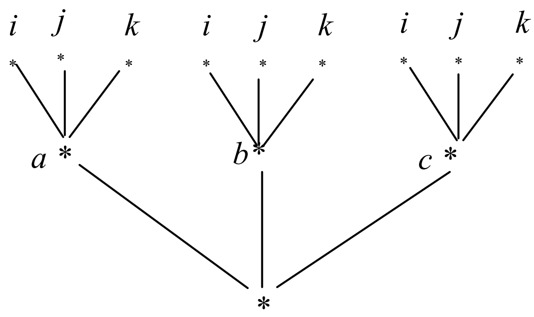
Množinový diagram:



Tabulka:

	i	j	k
a	a,i	a,j	a,k
b	b,i	b,j	b,k
c	c,i	c,j	c,k

Strom:



Kartézský graf:

k	$[a,k]$	$[b,k]$	$[c,k]$
j	$[a,j]$	$[b,j]$	$[c,j]$
i	$[a,i]$	$[b,i]$	$[c,i]$
	a	b	c

Kartézský součin K × L = $\{[a,i];[a,j];[a,k];[b,i];[b,j];[b,k];[c,i];[c,j];[c,k]\}$.

V turnaji se hrálo celkem 9 zápasů.

Poznámka: Kartézský součin a kartézský graf nazván po René Descartesovi. René Descartes (1596-1650) - latinsky Kartezius, francouzský matematik a filosof, válčil na Bílé hoře (1620).

3. Statistika

Význam statistiky je v soudobé společnosti všeobecně uznáván. Svědčí o tom články v denním i odborném tisku, slýcháme o ní často i ve vystoupeních hospodářských i politických pracovníků.

Definice statistiky je uváděna jako obor zabývající se zkoumáním a kvantitativní charakteristikou hromadných jevů nebo jako číselná evidence hromadných jevů. Existuje několik definic statistiky, které se od sebe často liší. Pro obor statistika jsou příznačné dvě skutečnosti: jejím předmětem jsou hromadné jevy, to jsou jevy, které mají hromadný výskyt a jejím charakteristickým rysem je číselné a grafické vyjadřování zkoumaných skutečností.

Znamená to, že statistika se nezabývá jevy jedinečnými, neopakovatelnými. Zabývá se pouze jevy, které jsou příznačné pro velký počet jedinců, popřípadě, které se často opakují.

Zkoumané skutečnosti o hromadných jevech statistika vyjadřuje statistickými údaji-statistickými daty. Se statistickými údaji se setkáváme např. ve Statistické ročence České republiky.

Slovo statistika, statistický, jsou slova mezinárodní. V převážné většině jazyků je odvozeno od slova stát (např.v němčině: die Statistik-statistika, statistisch-statistický; der Staat-stát; v angličtině: statistics-statistika, statistical-statistický; state-stát).

Statistické informace o sociálním, ekonomickém a ekologickém vývoji České republiky a jejich jednotlivých částí zajišťuje státní statistická služba, kterou vykonává Státní statistický úřad.

3.1. Základní pojmy statistiky

Úkolem statistiky je zkoumání stavu a vývoje hromadných jevů a souvislostí mezi nimi. Jevy rozumíme objekty (předměty), jejich vlastnosti i vzájemné vztahy mezi nimi; pojmem hromadný zdůrazňujeme, že číselné statistické údaje neposkytují informace o individuálních objektech, ale o celých souborech těchto objektů.

3.1.1. Statistický soubor a statistická jednotka

Množinu všech předmětů pozorování (osob, věcí, jevů apod.) shromážděných na základě toho, že mají společné vlastnosti, nazýváme statistickým souborem. Jednotlivé prvky této množiny se nazývají prvky (elementy) statistického souboru nebo též statistické jednotky. Počet všech prvků statistického souboru se nazývá rozsah souboru N.

Soubor, který je předmětem zkoumání, se nazývá základní soubor. Často nelze nebo není účelné provést zkoumání všech statistických jednotek tohoto základního souboru. Základní soubor pak zkoumáme pomocí statistických jednotek, které z něj byly určitým způsobem vybrány a které tvoří tak zvaný výběrový soubor.

Například: Při zjišťování výšky žáků ve třídě je statistickým souborem množina žáků dané třídy. Jejich společnou vlastností je, že jsou žáky například třídy 4. A základní školy v Křešicích, a že budeme zkoumat jejich výšku. Statistickou jednotkou je žák 4. A základní školy v Křešicích. Rozsahem souboru je počet žáků dané třídy, například 12. Statistickým souborem může být také množina všech žáků dané školy.

3.1.2. Statistické znaky

Vlastnosti statistických souborů, které jsou předmětem statistického zkoumání, sleduje statistika prostřednictvím vlastností statistických jednotek daného souboru, které postihuje statistickými znaky.

Statistický znak je vyjádřením určité vlastnosti statistických jednotek (prvků množin) sledovaného statistického souboru; slouží k charakterizování sledovaného hromadného jevu-vlastnosti daného statistického souboru.

Znak (argument) souboru se zpravidla značí x. Jednotlivé údaje znaku se nazývají hodnoty znaku, značí se x_1, x_2, x_N, kde N je rozsah souboru.

Například: Například při určování výšky žáků dané třídy je statistickým znakem výška žáků, hodnotou znaku je číselně vyjádřená příslušná výška žáka např.142 cm.

Hodnoty znaku mohou být vyjádřeny buď čísly nebo jiným způsobem (zpravidla slovním popisem). V prvním případě mluvíme o znacích kvantitativních, např. tělesná výška, tělesná hmotnost, počet obyvatel měst, atp.. V druhém případě mluvíme o znacích kvalitativních, které se mohou vyskytovat ve dvou druzích (znaky alternativní, např. muž-žena, voják-nevoják, prospěl-neprospěl) nebo ve více druzích (např. povolání, národnost, náboženství, atp.).

Statistickým zkoumáním určitého statistického souboru získáme zpravidla velký počet údajů o jeho statistických znacích. Aby byl tento statistický přehledný je třeba ho někdy nejprve utřídit. Mluvíme o statistickém třídění, které spočívá v rozčlenění statistického souboru do menších skupin, které nazýváme třídami. Je však třeba dodržet zákony třídění, tzn., že třídění musí být úplné - musíme roztřídit všechny hodnoty znaků souboru, musí být disjunktní, průnik skupin musí být prázdná množina a musíme třídit dle určitého znaku.

Třídění podle jednoho znaku může být provedeno v podstatě dvěma způsoby. Při prvním z nich se do jedné třídy shrnují všechny prvky, jimž přísluší táž hodnota znaku x_k (k = 1, 2, ..., m, kde m počet všech různých hodnot znaku x). Hodnota x_k se nazývá třídní znak k-té třídy. Druhý způsob tvoření tříd se používá tehdy, je-li počet různých hodnot znaku příliš velký. Volí se t.zv. intervaly.

3.1.3. Četnost

Počet prvků statistického souboru, které patří do k-té třídy se nazývá četnost (absolutní četnost) prvků v k-té třídě; značíme N_k. Podíl $r_k = \frac{N_k}{N}$, kde N je rozsah uvažovaného statistického souboru, se nazývá relativní (poměrná četnost) prvků v k-té třídě. Vyjadřuje se jako číslo desetinné nebo v procentech. Součet všech četností prvků v první až k-té třídě se nazývá kumulativní četnost prvků v k-té třídě. Součet všech relativních četností prvků v první až k-té třídě se nazývá kumulativní relativní četnost prvků v k-té třídě.

Například: Ve 4. A třídě 3. základní školy v Litoměřicích byly naměřeny tyto výšky žáků: 130 cm, 132 cm, 135 cm, 135 cm, 138 cm, 140 cm, 142 cm, 142cm, 142 cm, 142 cm, 147 cm, 147 cm, 149 cm, 149 cm, 152 cm, 159 cm, 160 cm, 160 cm, 164 cm, 164 cm.

Hodnoty sledovaného znaku t.j. výšku žáků třídy 4. A 3. základní školy Litoměřice uvedeme v tabulce rozdělení četností neboli četnostní tabulce:

Hodnoty znaku x_i	**Četnosti**		**Kumulativní četnosti**	
	absolutní	relativní	absolutní	relativní
130	1	0,05	1	0,05
132	1	0,05	2	0,10
135	2	0,10	4	0,20
138	1	0,05	5	0,25
140	1	0,05	6	0,30
142	4	0,20	10	0,50
147	2	0,10	12	0,60
149	2	0,10	14	0,70
152	1	0,05	15	0,75
159	1	0,05	16	0,80
160	2	0,10	18	0,90
164	2	0,10	20	1,00
Součet	20	1,00		

3.2. Charakteristiky statistického souboru

Statistickými charakteristikami nazýváme čísla, která podávají stručnou základní informaci o uvažovaném statistickém souboru z různých hledisek. Je-li předmětem našeho zájmu jediný kvantitativní znak, jde o charakteristiku úrovně (polohy) a charakteristiku variability (proměnnosti, rozptýlení).

3.2.1. Charakteristiky úrovně (polohy)

Charakteristiky úrovně (polohy) jsou čísla, která charakterizují

„průměrnou hodnotu“ sledovaného kvantitativního znaku. Patří mezi ně aritmetický průměr, medián, modus, případně harmonický průměr a geometrický průměr.

3.2.1.1. Aritmetický průměr

Aritmetický průměr $\bar{x}$ hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_N$ kvantitativního znaku x je součet těchto hodnot dělený jejich počtem (rozsahem souboru) N :

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \Lambda + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}$$

Například: Jsou dány výšky žáků (viz příklad ze str.24). Určete jejich aritmetický průměr:

$$\bar{x} = \frac{130+132+135+135+138+140+142+142+142+142+147+147+149+149}{20} +$$

$$+ \frac{152+159+160+160+164+164}{20} = \frac{2929}{20} = 146{,}45$$

Aritmetický průměr výšky žáků je 146,45 cm .

Máme-li sestavenou tabulku rozdělení četností, podle níž hodnota x_1 má četnost N_1, hodnota x_2 má četnost N_2, … ,hodnota x_m má četnost N_m (kde $N_1 + N_2 + \ldots + N_m = N$), vypočteme aritmetický průměr podle vzorce:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{N_1 \cdot x_1 + N_2 \cdot x_2 + \Lambda + N_m \cdot x_m}{N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{m} N_k \cdot x_k}$$

Říká se mu vážený aritmetický průměr (jednotlivé hodnoty znaku jsou „váženy“ jejich četnostmi).

Například: Určete vážený průměr předchozího příkladu:

$$\bar{x} = \frac{1\cdot 130 + 1\cdot 132 + 2\cdot 135 + 1\cdot 138 + 1\cdot 140 + 4\cdot 142 + 2\cdot 147 + 2\cdot 149 + 1\cdot 152 + 1\cdot 159 + 2\cdot 160 + 2\cdot 164}{20} = 146{,}45$$

Vážený průměr výšky žáků je 146,45 cm .

Aritmetický průměr má tyto důležité vlastnosti:

a) Součet rozdílů (tzv. odchylek) $x_i - \bar{x}$ jednotlivých hodnot znaku x_i od jejich aritmetického průměru $\bar{x}$ se rovná nule.

b) Přičteme-li nebo odečteme-li od každé hodnoty znaku konstantní číslo A, pak aritmetický průměr nových hodnot se rovná aritmetickému průměru původních hodnot zvětšenému nebo zmenšenému o číslo A.

c) Násobíme-li nebo dělíme-li každou hodnotu znaku určitou konstantou K různou od nuly pak aritmetický průměr nových hodnot se rovná aritmetickému průměru původních hodnot násobenému nebo dělenému konstantou K.

3.2.1.2. Medián ($\hat{x}$)

Medián u souborů, jejichž rozsah N je liché číslo, je roven hodnotě znaku prostředního prvku [tj. $\left(\frac{N+1}{2}\right)$- tého prvku] a u souborů, jejichž rozsah N je sudé číslo, je roven aritmetickému průměru hodnot dvou středních prvků [t.j. $\frac{N}{2}$- tého a $\left(\frac{N}{2}+1\right)$ - tého prvku] .

Poznámka: Hodnoty znaků musí být seřazeny podle velikosti.

Například: Medián výšek žáků 4.A je $\hat{x} = \frac{142+147}{2}$ = 144,5 centimetrů.

3.2.1.3. Modus ($\tilde{x}$)

Modus je hodnota znaku, která má maximální četnost.

Například: Modus výšek žáků 4.A je $\tilde{x}$ = 142 cm.

Poznámka: Medián a modus se používají jako charakteristiky úrovně, jsou-li extrémní hodnoty znaku mimořádně odlišné od ostatních hodnot znaků, takže aritmetický průměr je netypickou charakteristikou úrovně souboru.

3.2.1.4. Harmonický průměr

Harmonický průměr $\bar{x}_H$ hodnot znaků $x_1, x_2, \dots, x_N$ je

$$\bar{x}_H = \frac{N}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \Lambda + \frac{1}{x_N}} = N : \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}$$

Máme-li sestavenou tabulku rozdělení četností, podle níž hodnota x_1 má četnost N_1, hodnota x_2 má četnost N_2, … ,hodnota x_m má četnost N_m (kde $N_1 + N_2 + \dots + N_m = N$), vypočteme vážený harmonický průměr podle vzorce:

$$\bar{x}_H = \frac{N_1 + N_2 + \Lambda + N_m}{N_1 \cdot \frac{1}{x_1} + N_2 \cdot \frac{1}{x_2} + \Lambda + N_m \cdot \frac{1}{x_m}} = N : \sum_{k=1}^{m} \frac{N_k}{x_k}$$

3.2.1.5. Geometrický průměr

Geometrický průměr $\bar{x}_G$ hodnot znaků $x_1, x_2, \dots, x_N$ je

$$\bar{x}_G = \sqrt[N]{x_1 \cdot x_2 \, \Lambda \, \cdot x_N}$$

3.2.2. Charakteristiky variability (proměnnosti, rozptýlení)

Charakteristiky variability (proměnnosti, rozptýlení) hodnot znaků jsou čísla, která charakterizují z různých hledisek proměnnost sledovaného kvantitativního znaku statistického souboru. Patří mezi ně variační rozpětí, průměrná odchylka, rozptyl,směrodatná odchylka a variační koeficient.

3.2.2.1. Variační rozpětí

Variační rozpětí R je rozdíl mezi největší a nejmenší hodnotou znaku prvků daného souboru:

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

Například: Variační rozpětí výšek žáků 4. A je R = 164 – 130 = 34 cm.

3.2.2.2. Průměrná odchylka

Průměrná odchylka $\overline{d}$ je aritmetický průměr absolutních hodnot odchylek znaků všech prvků souboru od jejich aritmetického průměru :

$$\boxed{\overline{d} = \frac{|x_1 - \overline{x}| + |x_2 - \overline{x}| + \Lambda + |x_N - \overline{x}|}{N}}$$

3.2.2.3. Relativní průměrná odchylka

Relativní průměrná odchylka r je podíl průměrné odchylky a příslušného aritmetického průměru:

$$\boxed{r = \frac{\overline{d}}{\overline{x}}}$$

3.2.2.4. Rozptyl

Rozptyl s^2 je aritmetický průměr druhých mocnin odchylek hodnot znaku od aritmetického průměru:

$$\boxed{s^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \Lambda + (x_N - \overline{x})^2}{N}}$$

3.2.2.5. Směrodatná odchylka

Směrodatná odchylka s je druhá odmocnina z rozptylu.

$$\boxed{s = \sqrt{s^2}}$$

3.2.2.6. Variační koeficient

Variační koeficient V je poměr směrodatné odchylky a aritmetického průměru vyjádřený v procentech:

$$V = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100$$

Příklad:

Je dán statistický soubor 5, 4, 5, 5, 8, 3, 6, 5, 5, 7, 9 . Určete charakteristiky úrovně (aritmetický, geometrický a harmonický průměr, modus a medián) a charakteristiky variability (variační rozpětí, průměrnou odchylku, rozptyl, směrodatnou odchylku a variační koeficient daného souboru.

Řešení:

Seřaďme nejprve hodnoty znaku podle velikosti (viz. poznámka u výpočtu mediánu).

Aritmetický průměr

$$\bar{x} = \frac{3+4+5+5+5+5+5+6+7+8+9}{11} = \frac{62}{11} = 5{,}636 \ .$$

Geometrický průměr

$$\bar{x}_G = \sqrt[11]{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = 5{,}398$$

Harmonický průměr

$$\bar{x}_H = \frac{11}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}} = 5{,}167$$

Modus $\tilde{x} = 5$ Medián $\hat{x} = 5$

Variační rozpětí

$$R = 9 - 3 = 6$$

Průměrná odchylka

$$\bar{d} = \frac{|5{,}636-3| + |5{,}636-4| + 5 \cdot |5{,}636-5| + |6-5{,}636| + |7-5{,}636| + |8-5{,}636| + |9-5{,}636|}{11} = 1{,}355$$

Rozptyl

$$s^2 = \frac{2{,}636^2 + 1{,}636^2 + 5 \cdot 0{,}636^2 + 0{,}364^2 + 1{,}364^2 + 2{,}364^2 + 3{,}364^2}{11} = 2{,}777$$

Směrodatná odchylka

$$s = \sqrt{2{,}777} = 1{,}666$$

Variační koeficient

$$V = \frac{1{,}666}{5{,}636} \cdot 100 = 29{,}599$$

3.3. Teorie statistické závislosti. Dvourozměrný statistický prostor.

Dvourozměrným statistickým souborem se nazývá statistický soubor, u něhož je předmětem zájmu vztah dvou statistických znaků. Například je to vztah klasifikace z matematiky v pololetí a klasifikace kontrolní písemné práce z matematiky ve 2. pololetí v dané třídě.

Nejjednodušší závislostí mezi těmito dvěma statistickými znaky je lineární závislost, jejíž těsnost se měří korelačním koeficientem r_{xy}, který nabývá hodnot v intervalu od -1 do 1.

Korelační koeficient rovný 1 značí přímou úplnou funkční lineární závislost, kdežto rovná-li se -1, jde o nepřímou úplnou funkční lineární závislost. Nabude-li korelační koeficient hodnoty 0, značí to, že lineární závislost není pro aproximaci vhodná. Při hodnotách -1 až 0 nebo 0 až 1 jde o větší či menší stupeň těsnosti nepřímé či přímé lineární závislosti.

Vzorec pro korelační koeficient:

$$\boxed{r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}}$$

kde s_{xy} se nazývá kovariance , s_x a s_y jsou směrodatné odchylky znaku x a znaku y.

Vzorec pro kovarianci je

$$\boxed{s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_1 - \bar{x}) \cdot (y_1 - \bar{y})}{N}}$$

Vzorec pro korelační koeficient r_{xy} tedy je

$$r_{xy} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y})}{N}}{\sqrt{\left[\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\right]\cdot\left[\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2\right]}}$$

Příklad :

Závěrečného testu z matematiky se zúčastnilo 12 žáků čtvrtého ročníku. Výsledky testu (vyjádřené průměrnou známkou) i jejich pololetní klasifikaci z matematiky vyjadřuje následující tabulka. Vypočítejte korelační koeficient mezi pololetní klasifikací a průměrnou známkou z testu.

Žák	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
pol. klasifikace	2	1	3	2	1	4	1	2	2	3	3	3
průměrná známka	1	1,16	2,17	1,7	1,16	1,83	1,33	1,16	1,16	1,16	1,5	1,83

Řešení:

Označíme-li pololetní klasifikaci x a průměrnou známku z testu y pak $\bar{x} = 2{,}25$ a $\bar{y} = 1{,}43$.

$$s_{xy} = \frac{(-0{,}25)\cdot(-0{,}43)+(-1{,}25)\cdot(-0{,}26)+(0{,}75)\cdot(0{,}74)+(-0{,}25)\cdot(0{,}27)+(-1{,}25)\cdot(-0{,}27)+(1{,}75)\cdot(0{,}4)}{12}+$$

$$+\frac{(-1{,}25)\cdot(-0{,}1)+(-0{,}25)\cdot(-0{,}27)+(-0{,}25)(-0{,}27)+(0{,}75)(-0{,}27)+(0{,}75)\cdot(0{,}07)+(0{,}75)(0{,}4)}{12}=0{,}1973$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{12}\left[3\cdot(1-2{,}25)^2 + 4\cdot(2-2{,}25)^2 + 4\cdot(3-2{,}25)^2 + 1\cdot(4-2{,}25)^2\right]} = 0{,}9242$$

obdobně $s_y = 0{,}3541$

a korelační koeficient

$$r_{xy} = \frac{0{,}1973}{0{,}9242\cdot 0{,}3541} = 0{,}6029$$

Vypočtená hodnota korelačního koeficientu potvrzuje přímou lineární závislost mezi pololetní klasifikací a hodnocením testu.

Příklad :

Při měření teploty a tlaku vzduchu byly získány následující údaje (viz tabulka). Vypočtěte korelační koeficient mezi teplotou a atmosférickým tlakem. Vyřešte jako úkol.

Číslo měření	1.	2.	3.	4.	5.
Teplota vzduchu [ºC]	10	15	20	25	30
Atmosférický tlak [kPa]	1003	1005	1010	1011	1014

Literatura:

Bušek I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky, SPN, Praha, 1985

Cihlář J.,Melichar J., Zelenka M.: Matematika pro 1., 2., 3., 4. třídu, Fortuna, Praha, 1993-95

Cihlář J., Zelenka M.: Matematika pro 5. třídu, Fortuna, Praha

Kaňoková J.: Základy statistiky a počtu pravděpodobnosti, FSE UJEP, Ústí nad Labem, 2001

Melichar J. a kol.: Cvičení z matematiky pro 5. ročník, SPN, Praha

Melichar J. a kol.: Cvičenia z matematiky pre 5. ročník základnej školy, SPN, Bratislava, 1993

Pešková E., Mulačová J.: Přehled středoškolského učiva-matematika, ORFEUS, Praha, 1992

Płocki A.: Pravděpodobnost kolem nás, Acta Universitatis Purkynianae 68, UJEP, Ústí nad Labem, 2001

Polák J.: Přehled středoškolské matematiky, SPN, Praha, 1983