



**Katedra matematiky
PF UJEP**



Aritmetika s didaktikou II.

KM1 / 0026

Přednáška 01

Kardinální čísla

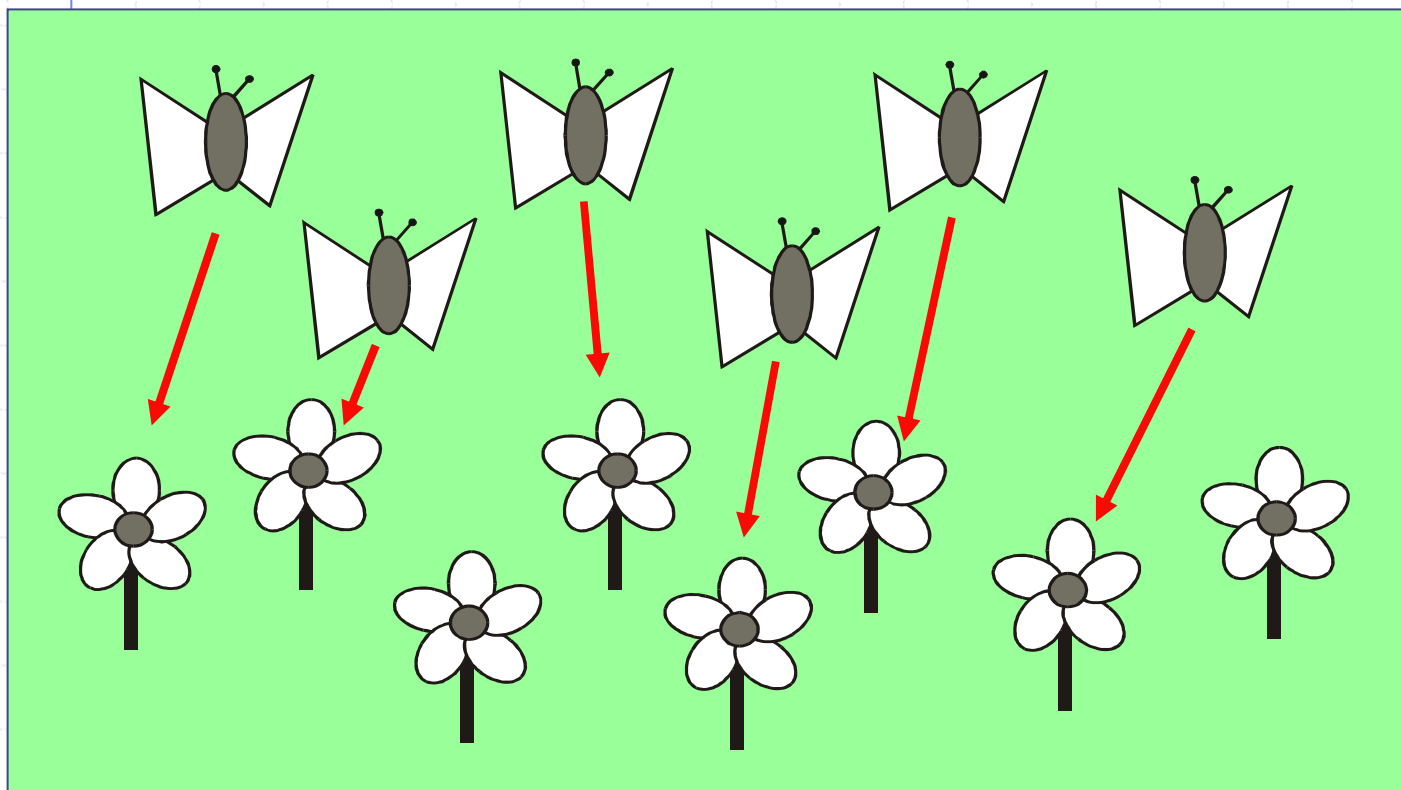
O čem budeme hovořit:

- Ekvivalence množin
- Konečné a nekonečné množiny
- Kardinální čísla konečných množin – přirozená čísla
- Kardinální čísla nekonečných množin

Ekvivalence množin

Úloha pro děti

Mohou malé děti, které ještě neumějí počítat, zjistit, zda je na obrázku více motýlků nebo více květinek nebo je jich stejně?



A jak?

Úloha pro tanečního mistra

Taneční mistr pravděpodobně umí počítat, ale vzhledem k počtu mladých slečen a pánů v sále mu to je málo platné.

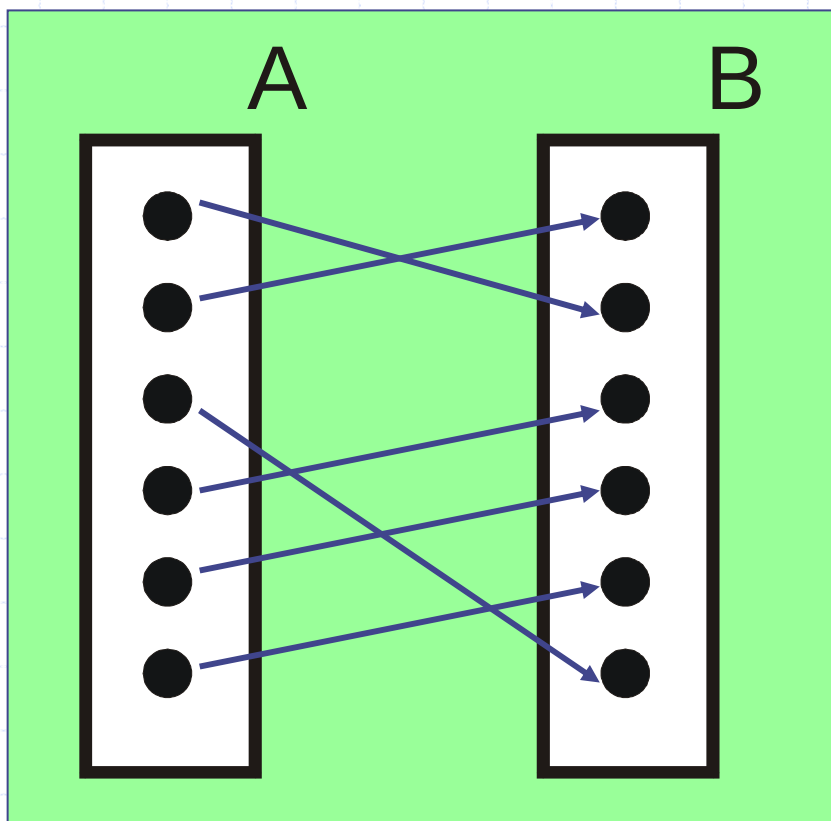
Může přesto snadno zjistit, zda je v sále více slečen nebo více pánů nebo je jich stejně?

A jak?

V obou příkladech nebyl podstatný „počet prvků“ u obou množin, zjistí se pouze, zda jsou obě množiny „**stejně mohutné**“.

Definice

Budeme říkat, že množina **A** je **ekvivalentní** s množinou **B** právě tehdy, když existuje **prosté** zobrazení množiny **A** na množinu **B**.



Tuto definici můžeme aplikovat na libovolné množiny, mohou mít velmi mnoho prvků, dokonce mohou být „nekonečné“.

Má tato relace vlastnosti ekvivalence?

Právě definovanou relaci budeme označovat $A \sim B$.

Je reflexivní, symetrická a tranzitivní?

Umíme dokázat, že platí tyto formule?

$$(\forall A) A \sim A$$

$$(\forall A, B) A \sim B \Rightarrow B \sim A$$

$$(\forall A, B, C) A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$$

Relace $A \sim B$ má vlastnosti ekvivalence.

Důležitá poznámka

Vlastnost reflexivity můžeme též přeformulovat tak, že platí:

$$(\forall A, B) \quad A = B \Rightarrow A \sim B$$

(Hledané zobrazení bude každému prvku z množiny **A** přiřazovat tentýž prvek, který leží v množině **B**.)

Platí i obrácená věta?

Zavedení kardinálních čísel

Vznik kardinálních čísel

Co již víme:

Každá **relace ekvivalence** indukuje **rozklad** množiny či třídy, na níž je definována.

V každé třídě rozkladu přitom leží všechny navzájem ekvivalentní prvky a každý prvek leží v právě jedné třídě rozkladu.

Co z toho plyne?

Ekvivalence $\sim$ indukuje rozklad třídy všech množin. V každé třídě rozkladu leží všechny navzájem ekvivalentní množiny a každá množina je obsažena v právě jedné třídě rozkladu.

Představa kardinálních čísel

Třídy tohoto
rozkladu
budeme
nazývat
kardinálními
číslly.

...

$\aleph_1$

$\aleph_0$

...

3

2

1

0

U (univerzum, tj. třída všech množin)

Atd.

R

{1; 2; 3; 4; 5; 6; ... } , S, L ,

Atd.

{a; b; c} , {10; 2; #} ,

{a; b} , {3; 7} , { #; □ } ,

{a} , {0} , {#} , {□} ,

∅

Symbolické zápisy

Kardinální číslo množiny A budeme označovat symbolem **card A** (někdy používáme i symbol $|A|$).

Takže například:

$$\text{card } \{10; 2; \#\} = \text{card } \{0; 1; 2\} = 3$$

$$\text{card } \{a\} = \text{card } \{0\} = \text{card } \{\#\} = 1$$

$$\text{card } \{\} = 0$$

$$\text{card } N = \aleph_0$$

Zřejmě platí:

$$\text{card } A = \text{card } B \iff A \sim B$$

Konečné a nekonečné množiny

Divná vlastnost nekonečných množin

Intuitivní představa nám říká, že

„celek je vždy větší než nějaká jeho část“.

Některá fakta o množinách vyžadují, abychom si tuto naivní představu zpřesnili.

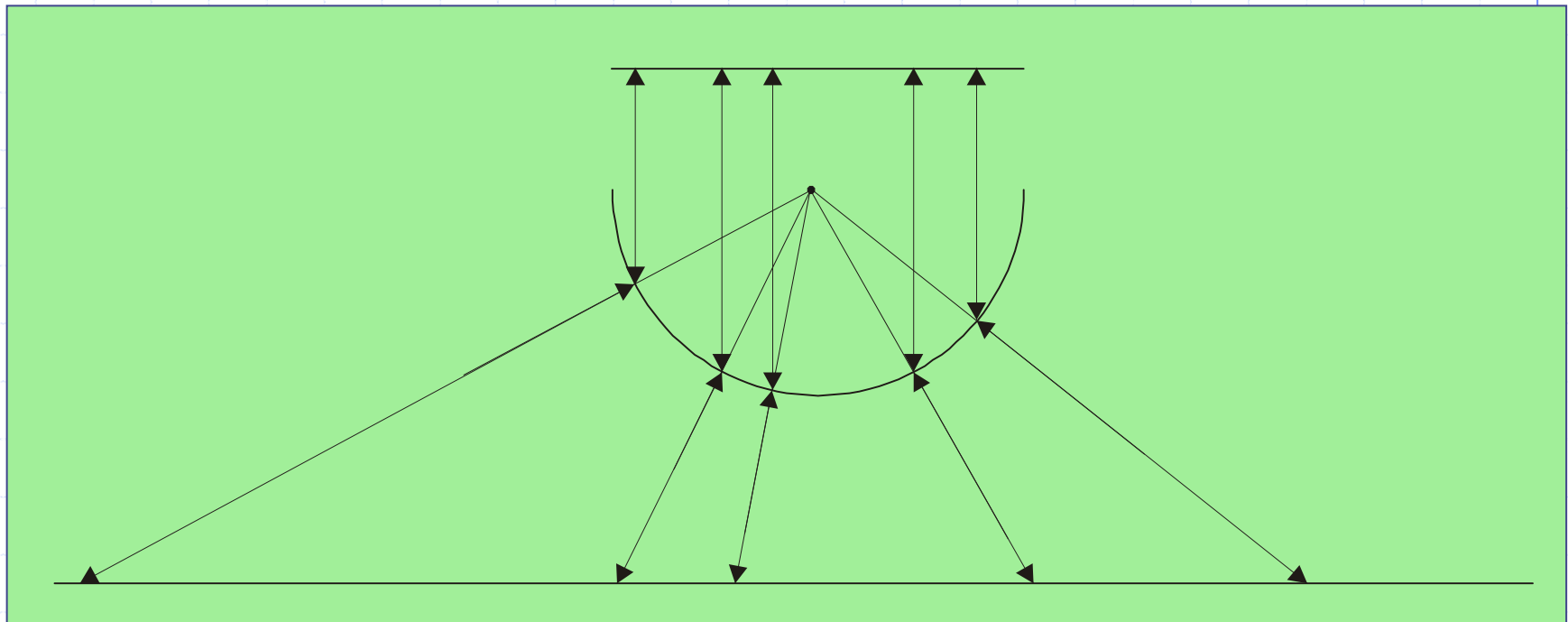
Například: $N \sim S$, tedy $\text{card } N = \text{card } S = \aleph_0$

$\{1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots; n; \dots\}$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$\{2; 4; 6; 8; 10; 12; \dots; 2n; \dots\}$

Podobné je to i v „geometrii“



$$\text{card } p = \text{card } u = \aleph_1$$

$$\text{card } R = \text{card } (-1;1) = \aleph_1$$

Definice nekonečných (a konečných) množin

Definice:

Množina se nazývá nekonečná právě tehdy, když je ekvivalentní s některou svou vlastní podmnožinou.

Symbolicky:

$$A \text{ je nekonečná} \Leftrightarrow (\exists B) B \subset A \wedge B \sim A$$

Definice:

Množina se nazývá konečná právě tehdy, když není nekonečná.

**Přirozená čísla jako
kardinální čísla
konečných množin**

Jak můžeme chápat přirozená čísla?

Můžeme postupovat takto:

$$\text{card } \{ \} = 0 ,$$

$$\text{card } \{0\} = 1 ,$$

$$\text{card } \{0; 1\} = 2 ,$$

$$\text{card } \{0; 1; 2\} = 3 ,$$

$$\text{card } \{0; 1; 2 ; 3 \} = 4 ,$$

a tak dále.

Přirozená čísla jsou kardinální čísla konečných množin.

Více podrobně:

Přijmeme tuto indukativní definici:

$$0 = \text{card } \emptyset$$

$$x = \text{card } A \Rightarrow x' = \text{card } (A \cup \{A\})$$

Pak postupně získáváme:

$$1 = 0' = \text{card } (\emptyset \cup \{\emptyset\}) = \text{card } \{\emptyset\} = \text{card } \{0\}$$

$$\begin{aligned} 2 = 1' = \text{card } (\{0\} \cup \{\{0\}\}) &= \text{card } \{0; \{0\}\} = \\ &= \text{card } \{0; 1\} \end{aligned}$$

a tak dále.

Kardinální čísla nekonečných množin

Další kardinální čísla

Kardinální čísla nekonečných množin označujeme prvním písmenem hebrejské abecedy $\aleph$ (alef) s příslušnými indexy, tedy $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$, atd.

Definujeme:

$$\text{card } N = \aleph_0$$

Protože platí, že $N \sim S \sim L$, jsou si kardinální čísla těchto množin rovna, a tedy

$$\text{card } N = \text{card } S = \text{card } L = \aleph_0$$

Dále pak platí, že:

$$\aleph_\alpha = \text{card } A \Rightarrow \aleph_{\alpha+1} = \text{card Pot } (A)$$

Ilustrace

Jak porozumět tomu, že například platí:

$$\aleph_0 = \text{card } N \Rightarrow \aleph_1 = \text{card Pot } (N)$$

Využijeme toho, že každé číslo z intervalu $(0;1)$ můžeme zapsat ve dvojkové soustavě, a pak například:

$$\{1, 2, 4\} \longrightarrow (0,1101)_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0}{8} + \frac{1}{16} = \frac{13}{16}$$

$$\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\} \longrightarrow (0,010101\dots)_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

Děkuji za pozornost

