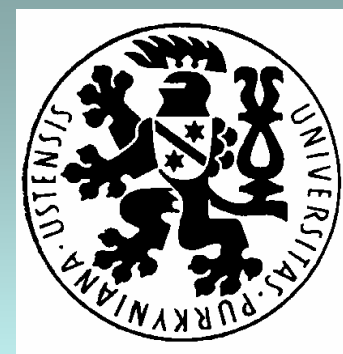




**Katedra matematiky
PF UJEP**



Aritmetika s didaktikou II.

KM1 / 0026

Přednáška 02

Vlastnosti kardinálních čísel

O čem budeme hovořit:

- Sčítání a násobení kardinálních čísel
- Vlastnosti těchto operací
- Počítání s „alefy“

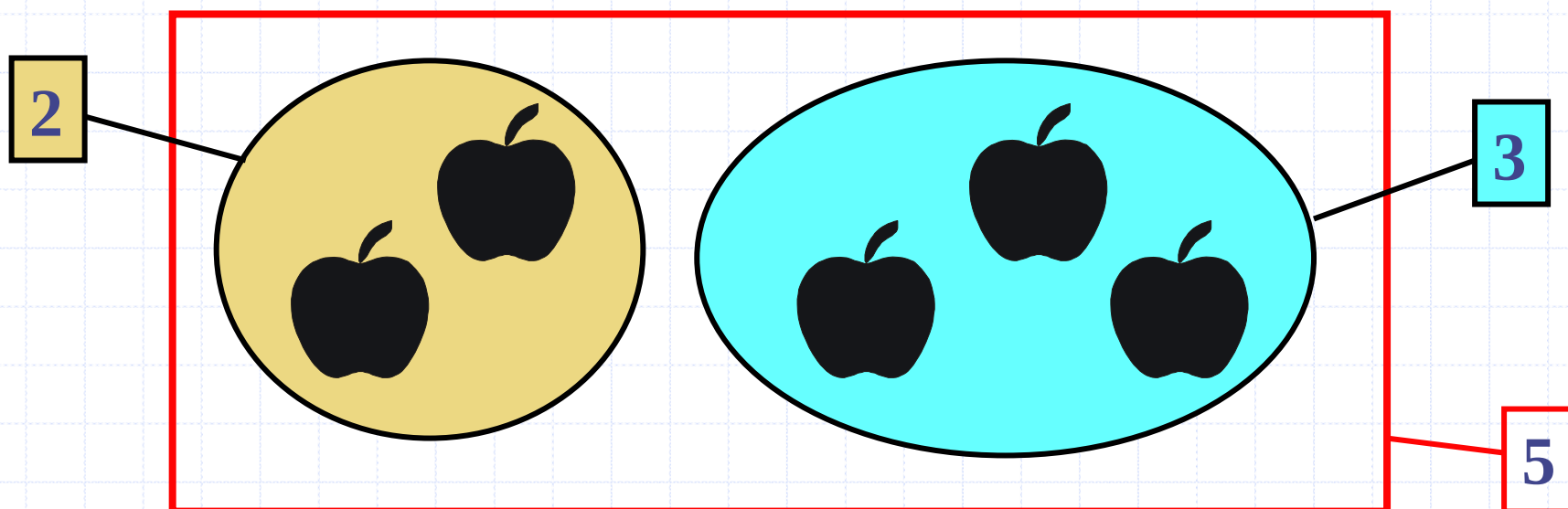
Sčítání kardinálních čísel

Jak učíme děti počítat?

Představa počítání čísel se u dětí vytváří tak, že se „nějaké věci dávají dohromady“.

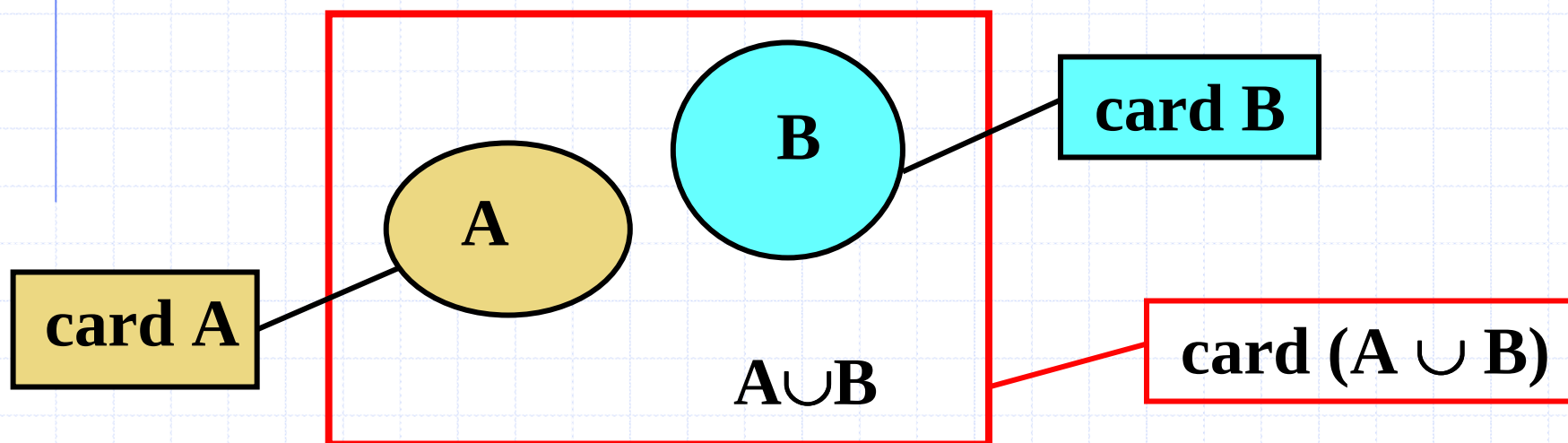
Například: Petr má dvě jablka a Pavel tři jablka.

Kolik jablek mají oba dohromady?



Definice sčítání kardinálních čísel

Definice sčítání kardinálních čísel vychází z této představy:



$$\text{card } A + \text{card } B =_D \text{card } (A \cup B)$$

Množiny A, B musí být disjunktní !!! Proč?

Příklady

$$2 + 3 = ???$$

$$\begin{aligned} 2 + 3 &= \text{card } \{a; b\} + \text{card } \{0; 1; 2\} = \\ &= \text{card } \{a; b; 0; 1; 2\} = 5 \end{aligned}$$

$$\aleph_0 + \aleph_0 = ???$$

$$\begin{aligned} \aleph_0 + \aleph_0 &= \text{card } S + \text{card } L = \\ &= \text{card } N = \aleph_0 \end{aligned}$$

A tak dále.

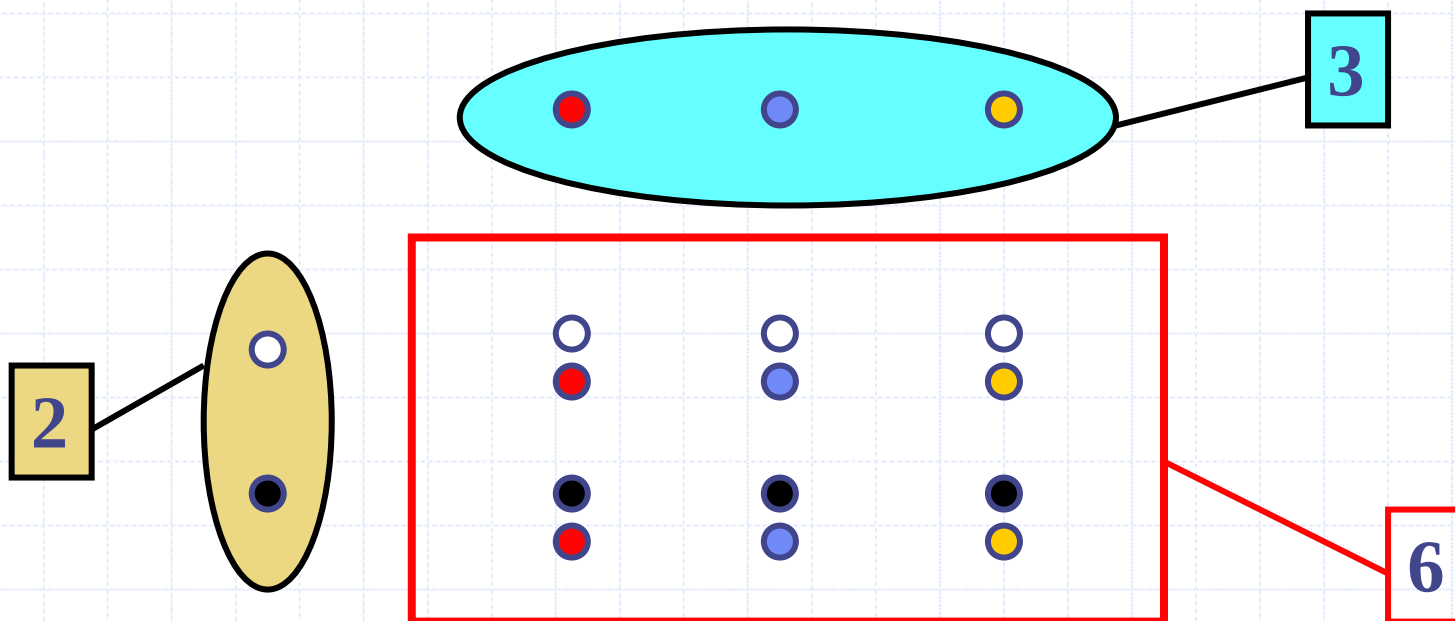
Násobení kardinálních čísel

Jak učíme děti násobit?

Představa násobení čísel se u dětí vytváří tak, že se „nějaké věci navzájem kombinují“.

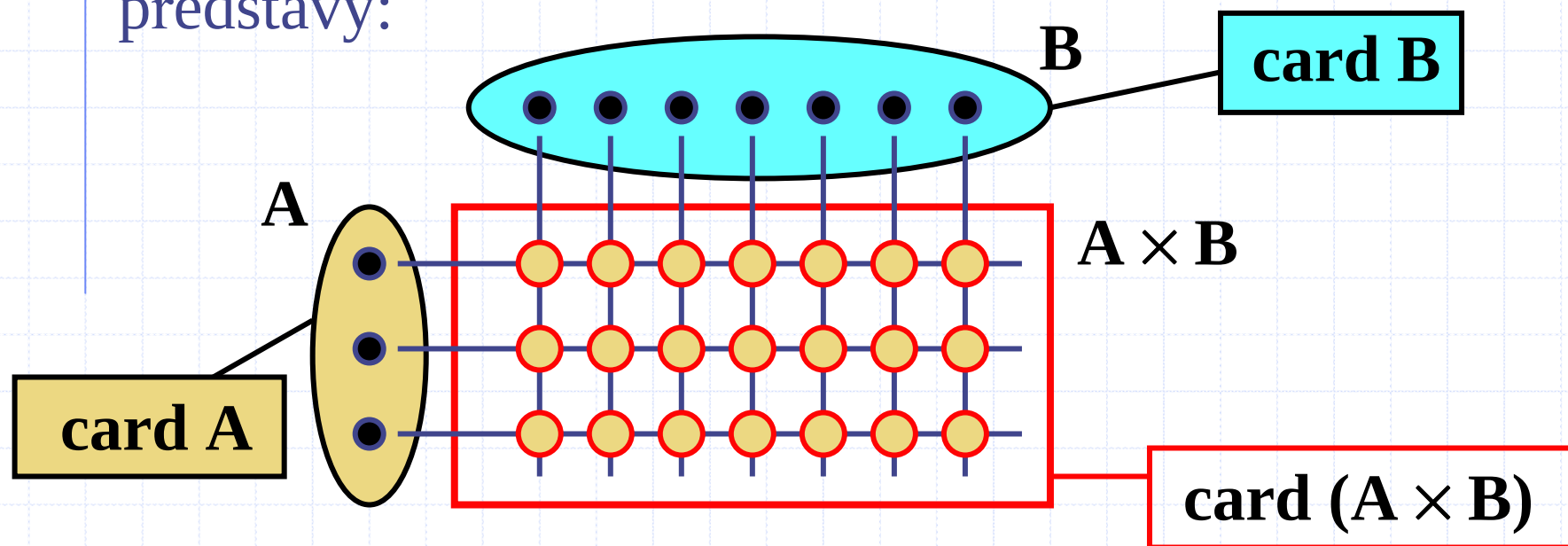
Například: Petr má dvě trička a troje trenýrky.

Kolik různých dresů si může obléci?



Definice násobení kardinálních čísel

Definice násobení kardinálních čísel vychází z této představy:



$$\text{card } A \cdot \text{card } B =_D \text{card } (A \times B)$$

Příklady

$$2 \cdot 3 = ???$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 &= \text{card } \{a; b\} \cdot \text{card } \{0; 1; 2\} = \\ &= \text{card } \{a0; a1; a2; b0; b1; b2\} = 6 \end{aligned}$$

$$2 \cdot \aleph_0 = ???$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot \aleph_0 &= \text{card } \{a; b\} + \text{card } N = \\ &= \text{card } \{a0; b0; a1; b1; a2; b2; a3; \dots\} = \aleph_0 \end{aligned}$$

A tak dále.

Vlastnosti struktury $(C_n, +, \cdot)$

Úplnost operací

Vycházíme z toho, že každá množina leží v nějaké třídě rozkladu, tedy každá množina má své kardinální číslo.

Z toho plyne, že máme-li množiny A , B takové, že $a = \text{card } A$, $b = \text{card } B$, pak jistě existují množiny $A \cup B$ a $A \times B$, a tedy existují kardinální čísla $a + b$, $a \cdot b$.

Operace sčítání a násobení jsou v C_n úplné.

Komutativnost operací

Necht' $a = \text{card } A$, $b = \text{card } B$.

??? $a + b = b + a$

$$\text{card } A \cup B = \text{card } B \cup A$$

$$A \cup B \sim B \cup A , \quad \text{a to platí. Proč?}$$

??? $a \cdot b = b \cdot a$

$$\text{card } A \times B = \text{card } B \times A$$

$$A \times B \sim B \times A , \quad \text{a to platí. Proč?}$$

Operace $+$ a $\cdot$ jsou v C_n komutativní.

Asociativnost operací

Necht' $a = \text{card } A$, $b = \text{card } B$, $c = \text{card } C$.

??? $(a + b) + c = a + (b + c)$

$$\text{card } (A \cup B) \cup C = \text{card } A \cup (B \cup C)$$

$(A \cup B) \cup C \sim A \cup (B \cup C)$, a to platí. Proč?

??? $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$$\text{card } (A \times B) \times C = \text{card } A \times (B \times C)$$

$(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$, a to platí. Proč?

Operace $+$ a $\cdot$ jsou v $\mathbb{C}_n$ asociativní.

Neutrální prvky operací

Necht' $a = \text{card } A$, $0 = \text{card } \emptyset$, $1 = \text{card } \{\square\}$.

??? $a + 0 = 0 + a = a$

$$\text{card } A \cup \emptyset = \text{card } \emptyset \cup A = \text{card } A$$

$$A \cup \emptyset \sim \emptyset \cup A \sim A, \text{ a to platí. Proč?}$$

??? $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

$$\text{card } A \times \{\square\} = \text{card } \{\square\} \times A = \text{card } A$$

$$A \times \{\square\} \sim \{\square\} \times A \sim A, \text{ a to platí. Proč?}$$

Obě operace $+$ a $\cdot$ mají v C_n neutrální prvek.

Inverzní prvky operací

Necht' $a = \text{card } A$,
 $b = \text{card } B$.

Je pravda, že $(\forall a)(\exists b) \ a + b = b + a = 0$, tedy že

$$(\forall A)(\exists B) \ \text{card } A \cup B = \text{card } B \cup A = \text{card } \emptyset ?$$

Je-li množina $A \neq \emptyset$, pak taková množina B neexistuje.

Je pravda, že $(\forall a)(\exists b) \ a \cdot b = b \cdot a = 1$, tedy že

$$(\forall A)(\exists B) \ \text{card } A \times B = \text{card } B \times A = \text{card } \{ \square \} ?$$

Je-li $\text{card } A$ alespoň 2, pak taková množina B opět neexistuje.

Operace $+$ a $\cdot$ nemají v C_n inverzní prvky.

Distibutivnost operací

Necht' $a = \text{card } A$, $b = \text{card } B$, $c = \text{card } C$.

??? $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

$$\text{card } (A \cup B) \times C = \text{card } ((A \times C) \cup (B \times C))$$

$$(A \cup B) \times C \sim (A \times C) \cup (B \times C) .$$

Tato formule platí. **Proč?**

Ve třídě C_n je operace násobení distributivní vzhledem k operaci sčítání.

Závěr o struktuře $(\mathbb{C}_n, +, \cdot)$

Obě operace jsou:

úplné, komutativní a asociativní,

tedy $(\mathbb{C}_n, +, \cdot)$ je **komutativní polookruh**.

Navíc mají obě operace neutrální prvek a nemají inverzní prvky.

$(\mathbb{C}_n, +, \cdot)$ tedy není okruhem (ani oborem integrity ani tělesem).

$(\mathbb{C}_n, +, \cdot)$ je komutativním polookruhem s neutrálními prvky.

Počítání s kardinálními čísly nekonečných množin

Jednoduché vzorce

Necht' $\aleph_\alpha = \text{card } A$, $\aleph_\beta = \text{card } B$.

Necht' $n = \text{card } C$, kde C je konečná množina,
tedy n je přirozené číslo.

Pak platí:

$$\aleph_\alpha + n = \aleph_\alpha$$

$$\aleph_\alpha \cdot 0 = 0$$

$$n > 0 \Rightarrow \aleph_\alpha \cdot n = \aleph_\alpha$$

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta =$$

$$= \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta =$$

$$= \aleph_{\max(\alpha, \beta)}$$

Děkuji za pozornost

