



**Katedra matematiky
PF UJEP**



Aritmetika s didaktikou II.

KM1 / 0026

**Přednáška 03
Ordinální čísla**

O čem budeme hovořit:

- Dobré uspořádání množiny
- Podobnost dobře uspořádaných množin
- Ordinální čísla konečných dobře uspořádaných množin – přirozená čísla
- Ordinální čísla nekonečných dobře uspořádaných množin

Dobré uspořádání množiny

Definice

Neostré lineární uspořádání v množině M budeme nazývat **dobré** právě tehdy, když v každé neprázdnej podmnožině množiny M existuje nejmenší prvek.

Příklady:

obvyklé uspořádání množiny N je dobré,
obvyklé uspořádání množiny Z není dobré,
uspořádání $\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$
množiny Z je dobré.

Označování

Dobré uspořádání množiny M budeme obvykle značit tak, že množinu zapíšeme úplným či neúplným výčtem prvků a nad tento zápis přidáme šipku (symbolické znázornění Hasseova diagramu).

Příklady:

$\overrightarrow{\{d, c, b, a\}}$

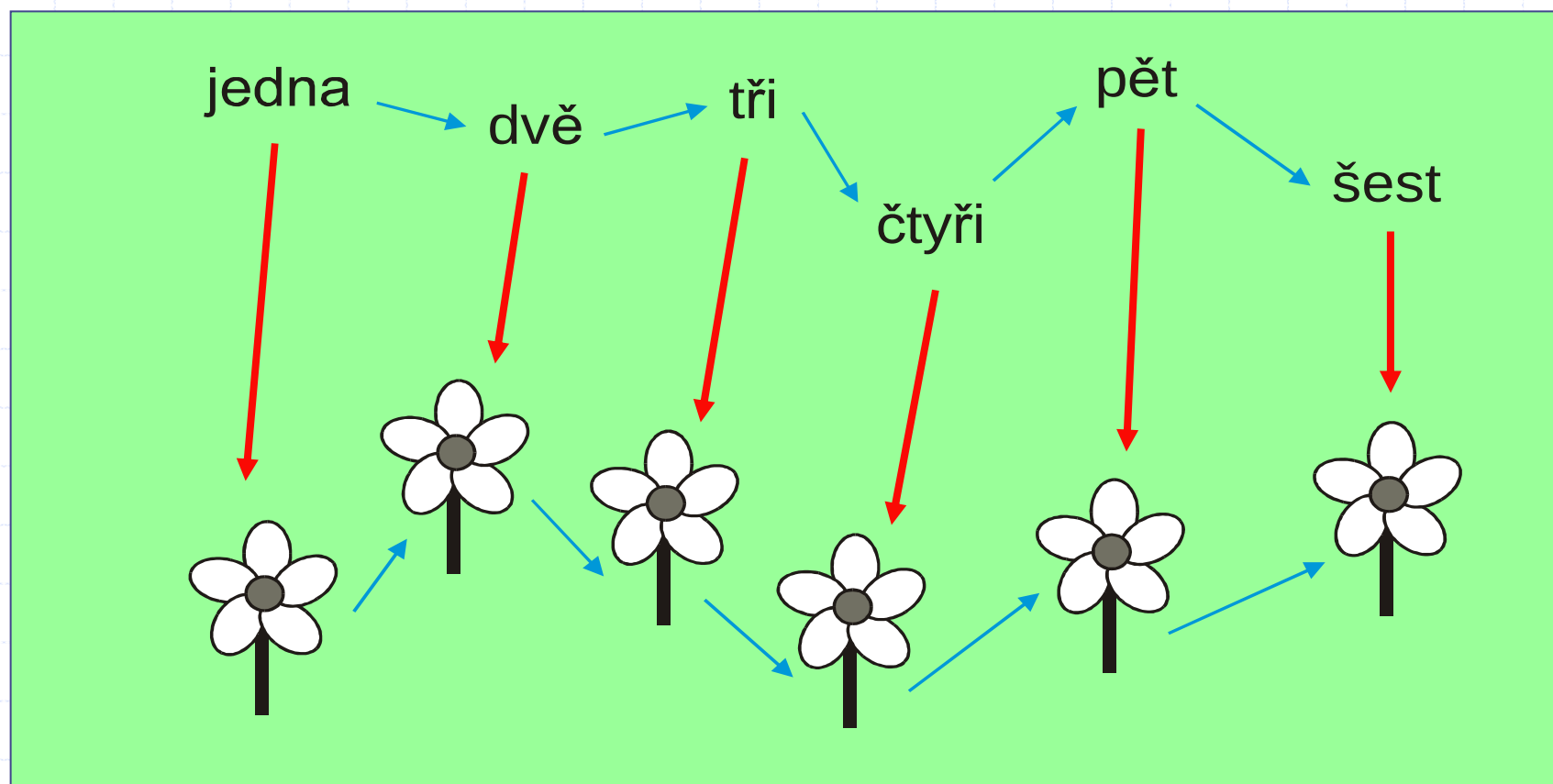
$\overrightarrow{\{0, 1, 2, 3, \dots\}}$

$\overrightarrow{\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}}$

Podobnost dobře uspořádaných množin

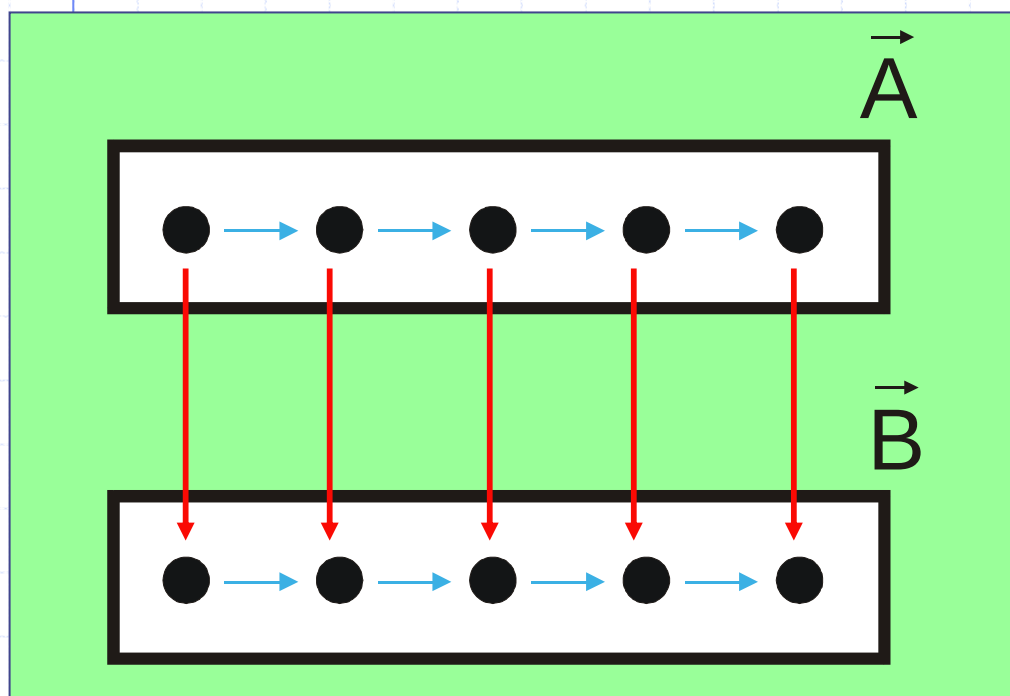
Jak děti počítají?

Když mají děti „spočítat“ kolik je na obrázku květinek, používají známé „říkadlo“. Zobrazují jednu dobře uspořádanou množinu na druhou.



Definice

Budeme říkat, že dobře uspořádaná množina **A** je **podobná** s dobře uspořádanou množinou **B** právě tehdy, když existuje **prosté** zobrazení množiny **A** na množinu **B**, které „zachovává jejich uspořádání“.



Tuto definici můžeme aplikovat na libovolné dobře uspořádané množiny (třeba nekonečné).

Má tato relace vlastnosti ekvivalence?

Právě definovanou relaci podobnosti budeme označovat $A \cong B$.

Je reflexivní, symetrická a tranzitivní?

Umíme dokázat, že platí tyto formule?

$$(\forall A) A \cong A$$

$$(\forall A, B) A \cong B \Rightarrow B \cong A$$

$$(\forall A, B, C) A \cong B \wedge B \cong C \Rightarrow A \cong C$$

Relace $A \cong B$ má vlastnosti ekvivalence.

Důležitá poznámka

Vlastnost reflexivity můžeme též přeformulovat tak, že platí:

$$(\forall A, B) \quad A = B \Rightarrow A \cong B$$

(Hledané zobrazení bude každému prvku z množiny **A** přiřazovat tentýž prvek, který leží v množině **B**.)

Platí i obrácená věta?

Zavedení ordinálních čísel

Vznik ordinálních čísel

Opět si připomeňme, že každá **relace ekvivalence** indukuje **rozklad** množiny či třídy, na níž je definována.

Ekvivalence $\cong$ tedy indukuje rozklad třídy všech dobře uspořádaných množin. V každé třídě rozkladu leží všechny navzájem podobné dobře uspořádané množiny a každá dobře uspořádaná množina je obsažena v právě jedné třídě rozkladu.

Třídy tohoto rozkladu budeme nazývat **ordinálními čísly**.

Představa ordinálních čísel

U (třída všech dobře uspořádaných množin)

...	Atd.
...	$\overrightarrow{\{1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots; 0\}}$
ω	$\overrightarrow{\{1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots\}}, \overrightarrow{\{2; 4; 6; 8; 10; \dots\}}, \dots$
...	Atd.
3	$\overrightarrow{\{a; b; c\}}, \overrightarrow{\{10; 2; \#\}}, \dots$
2	$\overrightarrow{\{a; b\}}, \overrightarrow{\{b; a\}}, \overrightarrow{\{3; 7\}}, \overrightarrow{\{\#; \square\}}, \dots$
1	$\overrightarrow{\{a\}}, \overrightarrow{\{0\}}, \overrightarrow{\{\#\}}, \overrightarrow{\{\square\}}, \dots$
0	$\overrightarrow{\emptyset}$

Symbolické zápisy

Ordinální číslo dobře uspořádané množiny A budeme označovat symbolem $\text{ord } A$.

Takže například:

$$\text{ord } \{\vec{}\} = 0$$

$$\text{ord } \{\vec{a}\} = \text{ord } \{\vec{0}\} = \text{card } \{\vec{}\} = 1$$

$$\text{ord } \{10; 2; \#\} = \text{ord } \{0; 1; 2\} = 3$$

$$\text{ord } \{1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots\} = \omega$$

Zřejmě platí:

$$\text{ord } A = \text{ord } B \iff A \cong B$$

**Přirozená čísla jako ordinální
čísla konečných dobře
uspořádaných množin**

Důležitá vlastnost konečných množin

Konečnou množinu můžeme uspořádat různými způsoby, množinu $\{0; 1; 2\}$ například takto:

$\overrightarrow{\{0; 1; 2\}}$, $\overrightarrow{\{1; 0; 2\}}$, $\overrightarrow{\{2; 0; 1\}}$,
 $\overrightarrow{\{0; 2; 1\}}$, $\overrightarrow{\{1; 2; 0\}}$, $\overrightarrow{\{2; 1; 0\}}$.

Každé dvě z těchto dobře uspořádaných množin jsou podobné, všechny tedy mají ordinální číslo 3.

Počet různých dobrých uspořádání množiny, která má n prvků je:

$$n! = n.(n-1).(n-2). \dots .3.2.1$$

Jak můžeme chápat přirozená čísla?

Můžeme postupovat takto:

$$\text{ord } \{\overrightarrow{}\} = 0 ,$$

$$\text{ord } \{\overrightarrow{0}\} = 1 ,$$

$$\text{ord } \{\overrightarrow{0; 1}\} = 2 ,$$

$$\text{ord } \{\overrightarrow{0; 1; 2}\} = 3 ,$$

$$\text{ord } \{\overrightarrow{0; 1; 2; 3}\} = 4 ,$$

a tak dále.

Přirozená čísla jsou ordinální čísla konečných množin.

Ordinální čísla nekonečných dobře uspořádaných množin

Ordinální číslo ω

Definujeme:

$$\text{ord } \{ 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots \} = \omega$$

Ordinální číslo ω má tedy množina všech přirozených čísel s obvyklým uspořádáním a všechny jí podobné množiny.

Příklady:

$$\text{ord } \{ 0; 2; 4; 6; 8; 10; \dots \} = \omega$$

$$\text{ord } \{ 10; 15; 20; 25; 30; \dots \} = \omega$$

$$\text{ord } \{ 0; -1; -2; -3; -4; -5; \dots \} = \omega$$

$$\text{ord } \{ a_0; b_0; a_1; b_1; a_2; b_2; \dots \} = \omega$$

Různá uspořádání množiny $\mathbb{N}$

Množinu $\mathbb{N}$ můžeme uspořádávat mnoha různými způsoby, například:

$\{1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots; 0\}$

$\{2; 3; 4; 5; 6; \dots; 0; 1\}$

$\{0; 2; 4; 6; \dots 1; 3; 5; 7; \dots\}$

$\{0; 3; 6; 9; 12; \dots 1; 4; 7; 10; 13; \dots 2; 5; 8; 11; \dots\}$

$\{2; 4; 6; \dots 3; 9; 15; \dots 5; 25; 35; \dots 7; 49; \dots; \dots\}$

Všechny tyto dobře uspořádané množiny mají různá ordinální čísla. Proč? („Jaká“ se dozvíme se příště!)

Děkuji za pozornost

