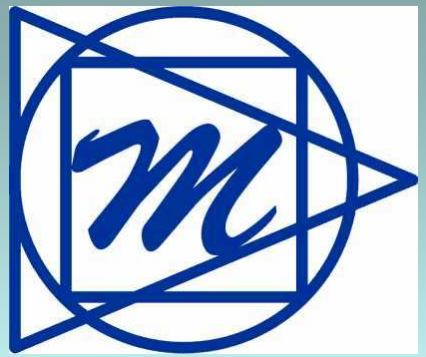
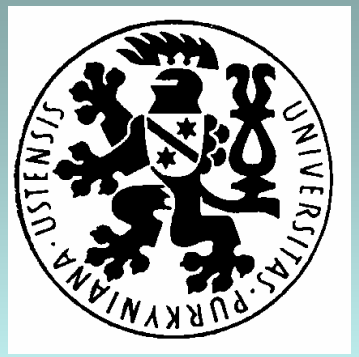


Katedra matematiky
PF UJEP



Aritmetika s didaktikou II.

KM1 / 0026

Přednáška 04

Vlastnosti ordinálních čísel

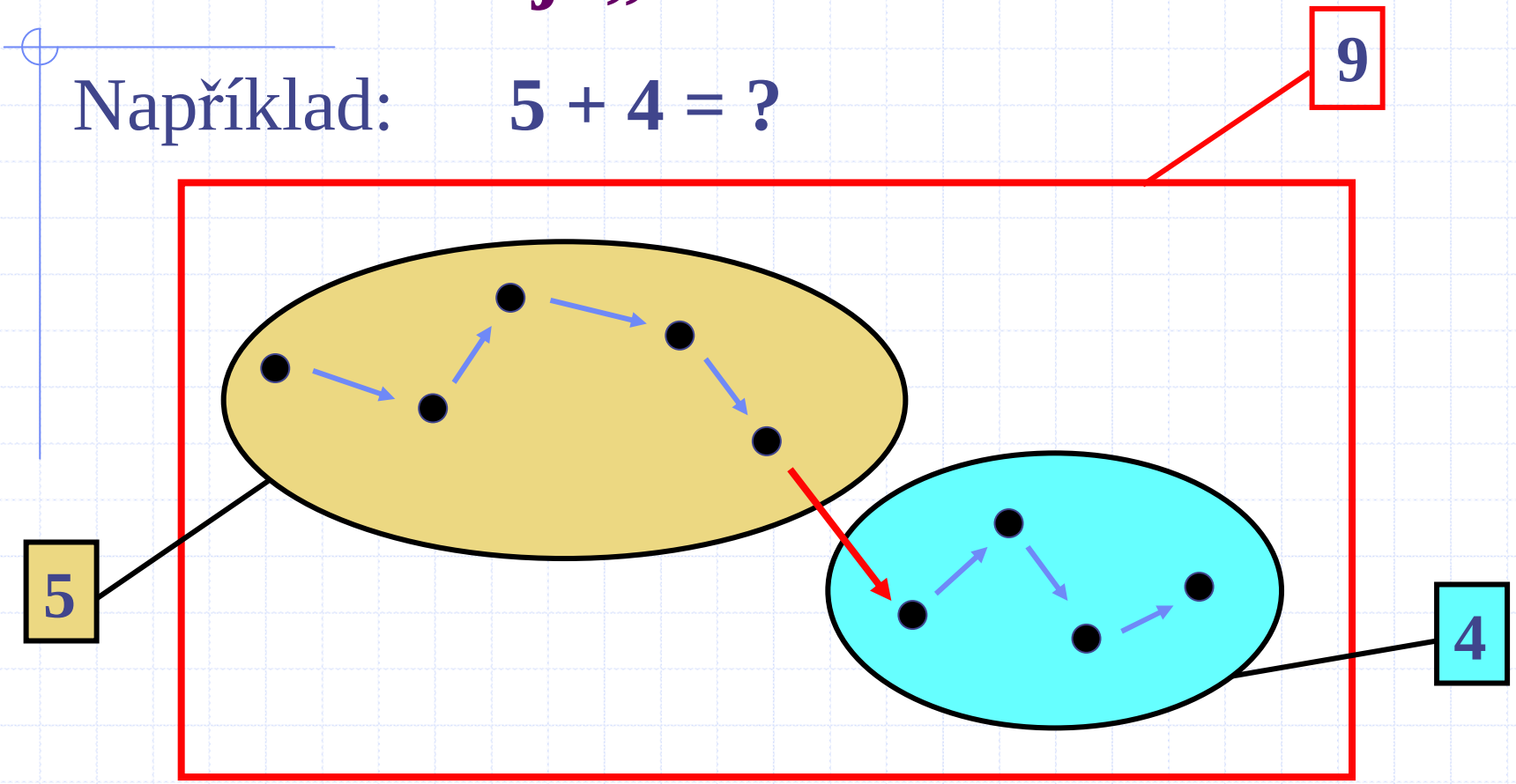
O čem budeme hovořit:

- Sčítání a násobení ordinálních čísel
- Vlastnosti těchto operací
- Počítání s ordinálními čísly nekonečných množin

Sčítání ordinálních čísel

Jak děti sčítají „větší“ čísla?

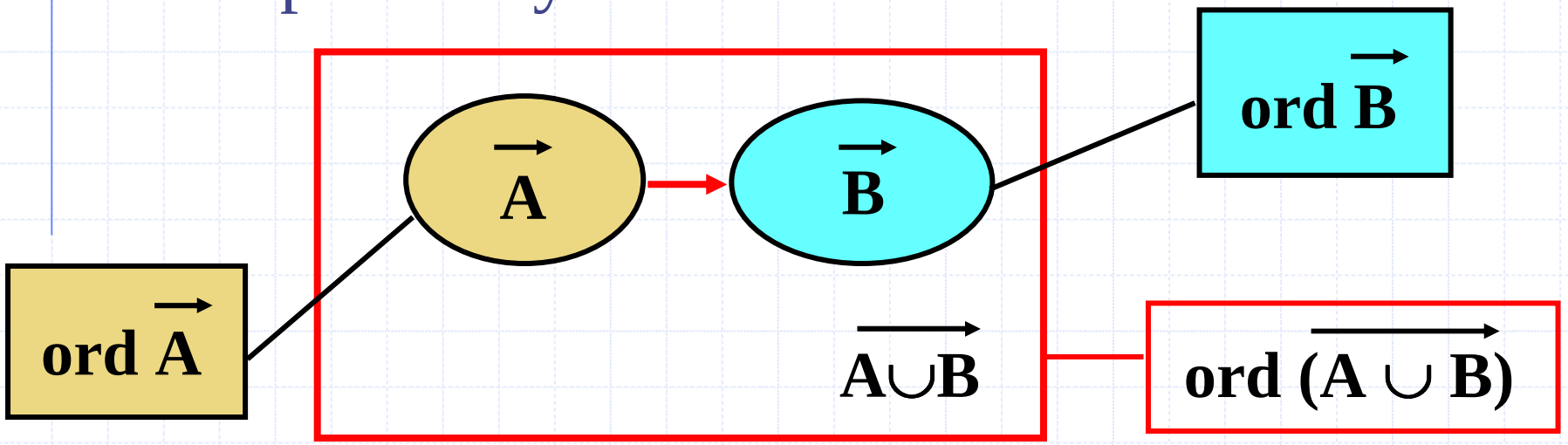
Například: **5 + 4 = ?**



Sjednocení je uspořádáno takto: **nejprve prvky první množiny, za nimi prvky druhé množiny.**

Definice sčítání ordinálních čísel

Definice sčítání ordinálních čísel vychází z této představy:



$$\text{ord}\,\overrightarrow{A} + \text{ord}\,\overrightarrow{B} =_D \text{ord}\,(\overrightarrow{A \cup B})$$

Množiny A, B musí být disjunktní !!! Proč?

Příklady

$2 + 3 = ???$

$2 + 3 = \mathrm{ord}\,\overrightarrow{\{a; b\}} + \mathrm{ord}\,\overrightarrow{\{0; 1; 2\}} =$

$= \mathrm{ord}\,\overrightarrow{\{a; b; 0; 1; 2\}} = 5$

$2 + \omega = ???$

$2 + \omega = \mathrm{ord}\,\overrightarrow{\{a; b\}} + \mathrm{ord}\,\overrightarrow{\{0; 1; 2; 3; \ldots\}} =$

$= \mathrm{ord}\,\overrightarrow{\{a; b; 0; 1; 2; 3; \ldots\}} = \omega$

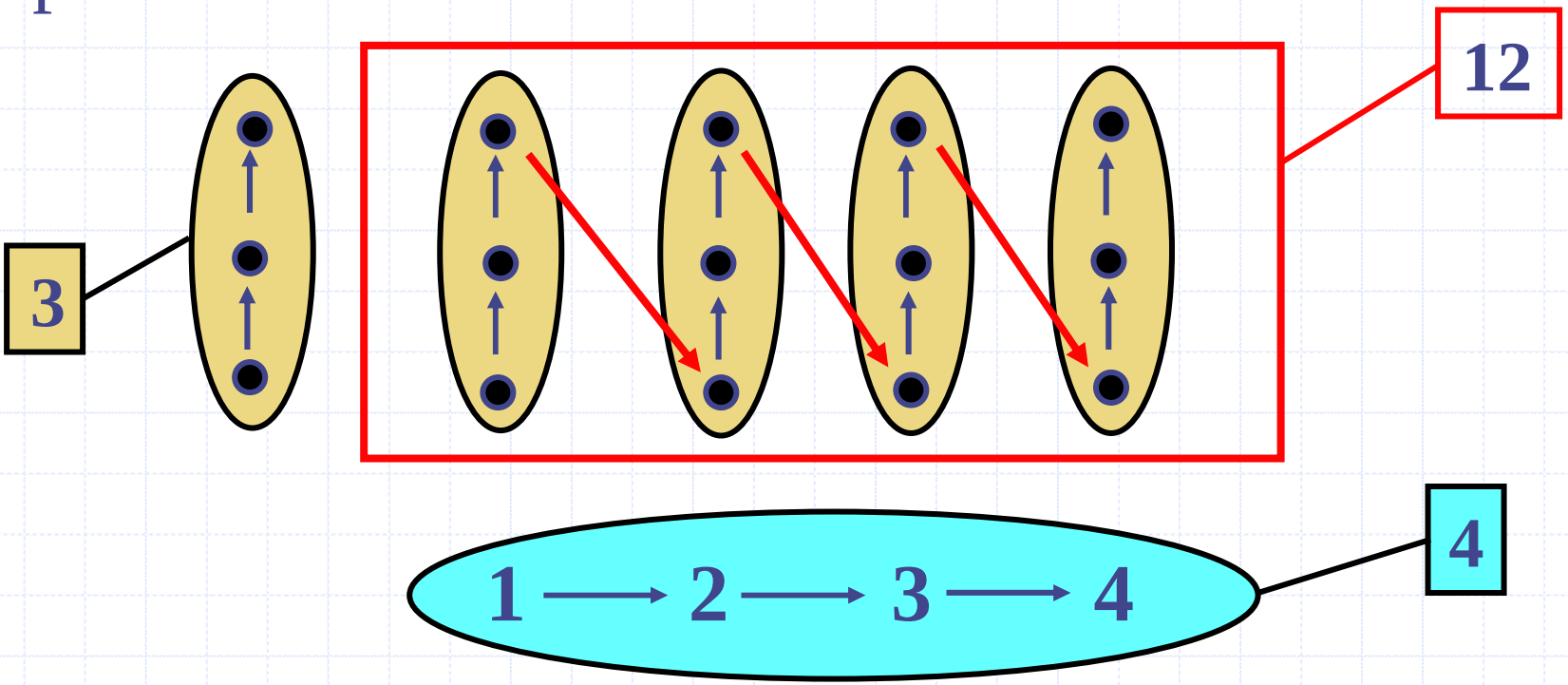
A tak dále.

Násobení ordinálních čísel

Násobení jako „opakované sčítání“

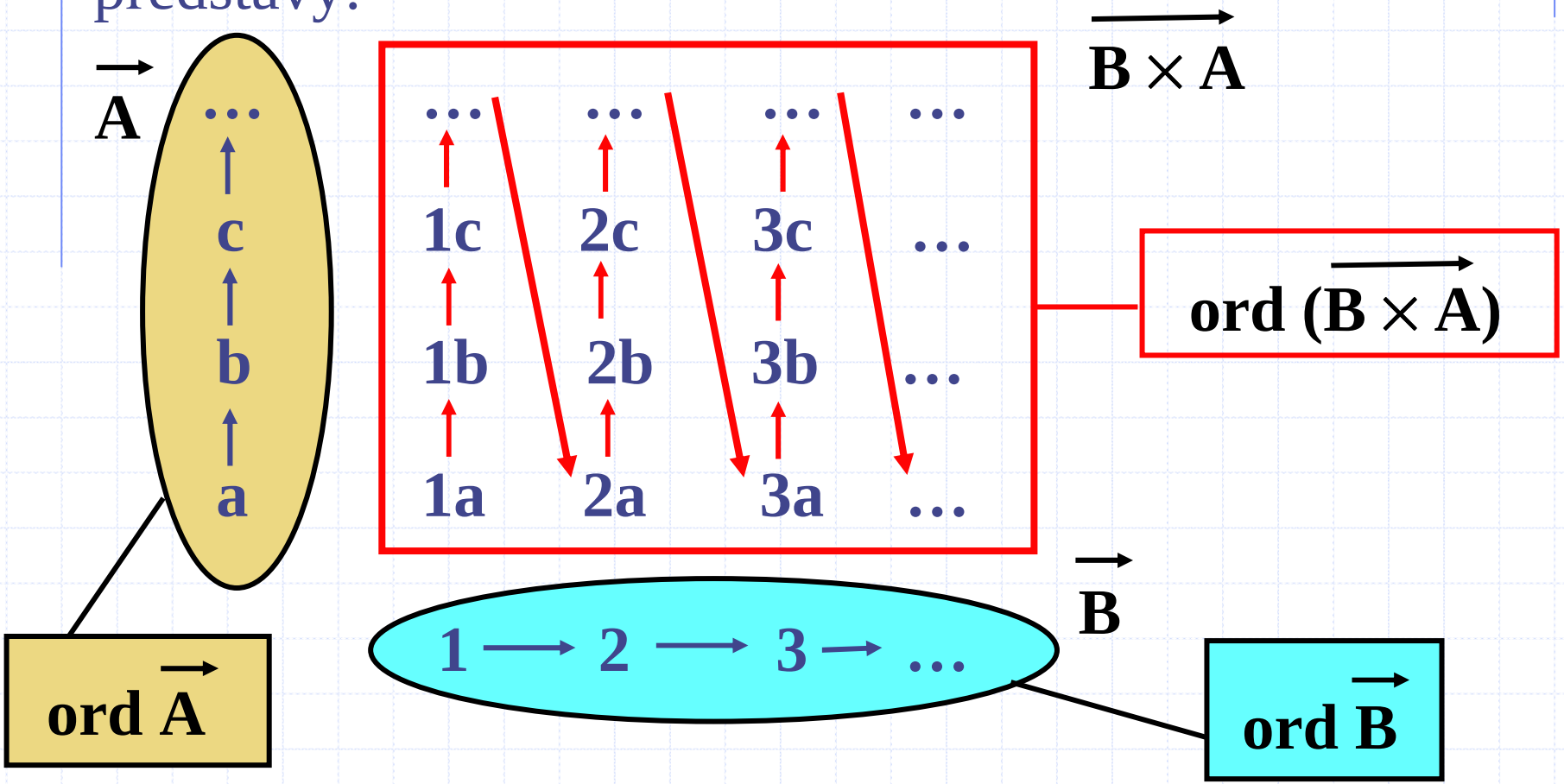
Představa násobení čísel se u dětí vytváří také tak, že se **„vytváří součet stejných sčítanců“.**

Například: **3 . 4 = 3 + 3 + 3 + 3**



Představa násobení ordinálních čísel

Definice násobení ordinálních čísel vychází z této představy:



Definice násobení ordinálních čísel

$$\mathbf{ord}\ \overrightarrow{A}\ .\ \mathbf{ord}\ \overrightarrow{B}\ =_D \mathbf{ord}\ \overrightarrow{(B \times A)}$$

Uspořádání kartézského součinu $\mathbf{B \times A}$ je podobné jako „ve slovníku“, říkáme mu „lexikografické“.

Příklady

$2 \cdot 3 = ???$

$2 \cdot 3 = \text{ord}\,\{\overrightarrow{a; b}\} \cdot \text{ord}\,\{\overrightarrow{0; 1; 2}\} =$

$= \text{ord}\,\{\overrightarrow{0a; 0b; 1a; 1b; 2a; 2b}\} = 6$

$2 \cdot \omega = ???$

$2 \cdot \omega = \text{ord}\,\{\overrightarrow{a; b}\} \cdot \text{ord}\,\{\overrightarrow{0; 1; 2; 3; \ldots}\} =$

$= \text{ord}\,\{\overrightarrow{0a; 0b; 1a; 1b; 2a; 2b; 3a; \ldots}\} = \omega$

A tak dále.

Vlastnosti struktury (On, +, .)

Úplnost operací

K libovolným ordinálním číslům **a**, **b** existují (disjunktní) dobře uspořádané množiny $\overrightarrow{\mathbf{A}}$, $\overrightarrow{\mathbf{B}}$.

K množinám **A**, **B** existují množiny $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$ a $\mathbf{B}\times\mathbf{A}$, ale musí se odůvodnit, že uspořádání z definic jsou dobrá. (Jak?)

K dobře uspořádaným množinám $\overrightarrow{\mathbf{A}\cup\mathbf{B}}$ a $\overrightarrow{\mathbf{B}\times\mathbf{A}}$ existují jejich ordinální čísla $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}$.

Operace sčítání a násobení jsou v On úplné.

Komutativnost sčítání

Platí formule $(\forall a,b \in On)\ a + b = b + a$?

Vypočítejme:

$$1 + \omega = ord\{\overrightarrow{a}\} + ord\{\overrightarrow{0; 1; 2; 3; \ldots}\} =$$

$$= ord\{\overrightarrow{a; 0; 1; 2; 3; \ldots}\} = \omega$$

$$\omega + 1 = ord\{\overrightarrow{0; 1; 2; 3; \ldots}\} + ord\{\overrightarrow{a}\} =$$

$$= ord\{\overrightarrow{0; 1; 2; 3; \ldots; a}\} \neq \omega$$

Operace + není v On komutativní.

Komutativnost násobení

Platí formule $(\forall a,b \in On)\ a \cdot b = b \cdot a$?

Vypočítejme:

$$2 \cdot \omega = \overrightarrow{ord\{a; b\}} \cdot \overrightarrow{ord\{0; 1; 2; 3; \dots\}} =$$

$$= \overrightarrow{ord\{0a; 0b; 1a; 1b; 2a; 2b; 3a; \dots\}} = \omega$$

$$\omega \cdot 2 = \overrightarrow{ord\{0; 1; 2; 3; \dots\}} \cdot \overrightarrow{ord\{a; b\}} =$$

$$= \overrightarrow{ord\{a0; a1; a2; \dots; b0; b1; b2; \dots\}} \neq \omega$$

Operace . není v On komutativní.

Asociativnost operací

Nechť $a = \mathbf{ord}\,\overrightarrow{A}$, $b = \mathbf{ord}\,\overrightarrow{B}$, $c = \mathbf{ord}\,\overrightarrow{C}$.

??? $(a + b) + c = a + (b + c)$

$\mathbf{ord}\,\overrightarrow{(A \cup B) \cup C} = \mathbf{ord}\,\overrightarrow{A \cup (B \cup C)}$

$\overrightarrow{(A \cup B) \cup C} \cong \overrightarrow{A \cup (B \cup C)}$, a to platí. Proč?

??? $(a \,.\, b) \,.\, c = a \,.\, (b \,.\, c)$

$\mathbf{ord}\,\overrightarrow{C \times (B \times A)} = \mathbf{ord}\,\overrightarrow{(C \times B) \times A}$

$\overrightarrow{C \times (B \times A)} \cong \overrightarrow{(C \times B) \times A}$, a to platí. Proč?

Operace + a . jsou v On asociativní.

Neutrální prvky operací

Nechť $\mathbf{a = ord\ \overrightarrow{A}}$, $\mathbf{0 = ord\ \overrightarrow{\emptyset}}$, $\mathbf{1 = ord\ \overrightarrow{\{\square\}}}$.

??? $\mathbf{a + 0 = 0 + a = a}$

$\mathbf{ord\ \overrightarrow{A \cup \emptyset} = ord\ \overrightarrow{\emptyset \cup A} = ord\ \overrightarrow{A}}$

$\mathbf{\overrightarrow{A \cup \emptyset} \cong \overrightarrow{\emptyset \cup A} \cong \overrightarrow{A}}$, a to platí. Proč?

??? $\mathbf{a \,.\, 1 = 1 \,.\, a = a}$

$\mathbf{ord\ \overrightarrow{\{\square\} \times A} = ord\ \overrightarrow{A \times \{\square\}} = ord\ \overrightarrow{A}}$

$\mathbf{\overrightarrow{\{\square\} \times A} \cong \overrightarrow{A \times \{\square\}} \cong \overrightarrow{A}}$, a to platí. Proč?

Obě operace + a . mají v On neutrální prvek.

Inverzní prvky operací

Formule $(\forall \mathbf{a})(\exists \mathbf{b})\ \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$ **neplatí**, protože pro $\mathbf{A} \neq \emptyset$ je také $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \neq \emptyset$.

Formule $(\forall \mathbf{a})(\exists \mathbf{b})\ \mathbf{a} \,.\, \mathbf{b} = \mathbf{b} \,.\, \mathbf{a} = \mathbf{1}$ také **neplatí**, protože má-li množina **A** alespoň **dva** prvky, pak pro libovolnou množinu **B** není žádná kartézský součin množin $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ jednoprvkový.

Operace + a . nemají v On inverzní prvky.

Distibutivnost operací

Vzhledem k nekomutativnosti operací musíme rozlišovat **distributivitu** násobení vůči sčítání **zprava** a **zleva**.

Platí například $(1 + 1) \cdot \omega = 1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega$?

$(1 + 1) \cdot \omega = 2 \cdot \omega = \omega$

$1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega = \omega + \omega = \omega \cdot 2 \neq \omega$

Ve třídě On tedy operace násobení není zprava distributivní vzhledem k operaci sčítání, lze ale dokázat, že je distributivní zleva.

Děkuji za pozornost