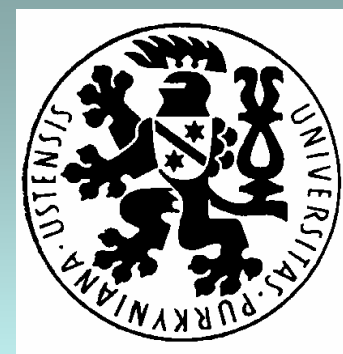




**Katedra matematiky
PF UJEP**



Aritmetika s didaktikou II.

KM1 / 0026

Přednáška 05

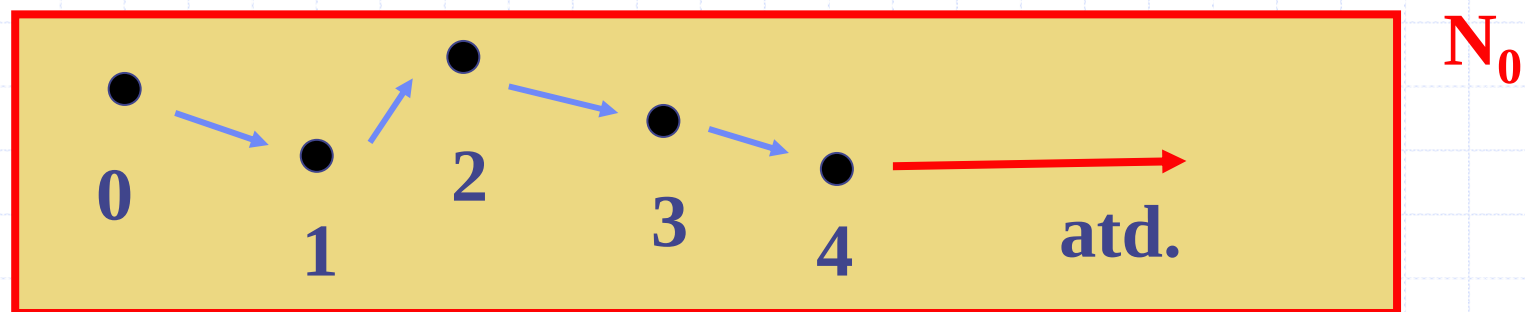
Rozšiřování číselných oborů

O čem budeme hovořit:

- Doposud jsme se zabývali přirozenými čísly (a také kardinálními a ordinálními).
- V dalších přednáškách budeme zavádět čísla celá, desetinná, racionální a reálná.
- Dnes se soustředíme na souvislosti těchto číselných struktur.

Vlastnosti přirozených čísel (opakování)

Co jsme dokázali o přirozených číslech?



Ve struktuře $(N_0, +, \cdot)$ jsou obě operace úplné, komutativní a asociativní a každá má svůj neutrální prvek.

Operace násobení je distributivní vzhledem k operaci sčítání.

Co jsme dále dokázali?

Ve struktuře $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$ ale ani jedna z operací sčítání a násobení **nemá inverzní prvky!**

Struktura $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$ je tedy **komutativní polookruh** s neutrálními prvky.

Tuto strukturu je možné ještě lineárně uspořádat a pak struktura $(\mathbb{N}_0, +, \cdot, <)$ je lineárně uspořádaný komutativní polookruh s neutrálními prvky.

Inverzní operace

Příklad inverzních operací

Děti se učí, že „zkoušku“ u odčítání dělají sčítáním a obráceně.

Také hned v první třídě k určitému početnímu spoji vytvářejí další tři spoje, například:

$$3 + 4 = 7$$

$$4 + 3 = 7$$

$$7 - 4 = 3$$

$$7 - 3 = 4$$

Učí se tedy, že:

$$a - b = c \Leftrightarrow c + b = a$$

Definice inverzních operací

Máme-li strukturu $(M, \cdot)$, pak **inverzní operaci** $\square$ k operaci $\cdot$ definujeme takto:

$$(\forall a, b, c \in M) \quad a \square b = c \Leftrightarrow c \cdot b = a$$

Odčítání je inverzní operace ke sčítání, protože

$$a - b = c \Leftrightarrow c + b = a ,$$

dělení je inverzní operace k násobení, protože

$$a : b = c \Leftrightarrow c \cdot b = a .$$

Souvislost inverzních operací s inverzními prvky

Máme-li komutativní grupu $(M, \bullet)$ s neutrálním prvkem n , pak ke každému jejímu prvku $x \in M$ existuje **inverzní prvek** $x' \in M$ takový, že platí

$$x \bullet x' = n.$$

Pak můžeme k operaci $\bullet$ definovat **úplnou** operaci $\square$ takto:

$$a \square b =_D a \bullet b'$$

Lze dokázat, že takto definovaná operace $\square$ je inverzní operací k původní operaci $\bullet$.

Důkaz

Máme dokázat, že platí

$$\mathbf{a} \sqcap \mathbf{b} = \mathbf{c} \iff \mathbf{c} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{a} .$$

Formuli

$$\mathbf{a} \sqcap \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

upravíme podle definice

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}' = \mathbf{c}$$

invariance rovnosti

$$(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}') \bullet \mathbf{b} = \mathbf{c} \bullet \mathbf{b}$$

asociativity

$$\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b}' \bullet \mathbf{b}) = \mathbf{c} \bullet \mathbf{b}$$

vlastnosti neutrálního prvku

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{n} = \mathbf{c} \bullet \mathbf{b}$$

a získáme

$$\mathbf{a} = \mathbf{c} \bullet \mathbf{b} .$$

Závěr

Protože ve struktuře $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$ ani jedna z operací sčítání a násobení **nemá inverzní prvky**, nejsou příslušné inverzní operace odčítání a dělení **úplné**.

Například: Víme, že $2 + 3 = 5$,
víme, že $2 \cdot 3 = 6$,

ale **v přirozených číslech**

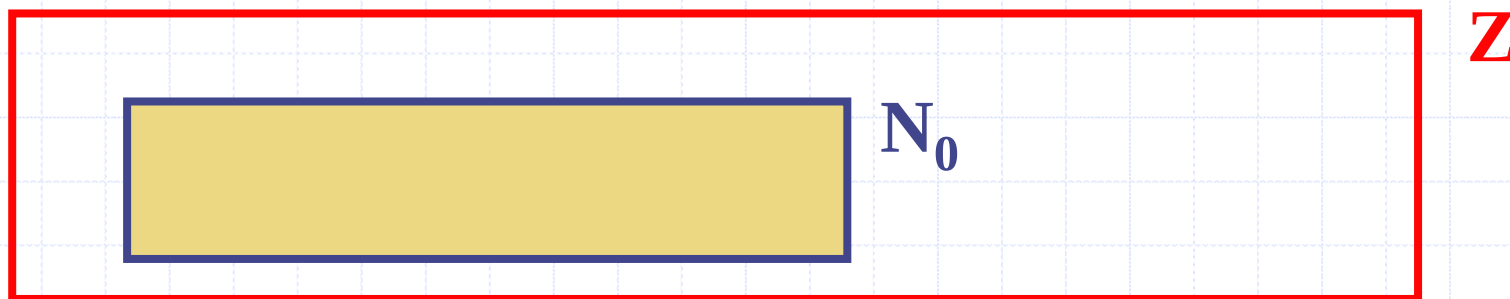
neumíme vypočítat $2 - 3 = ???$,

anebo $2 : 3 = ???$.

A jak tedy dál?

Východisko – 1.etapa

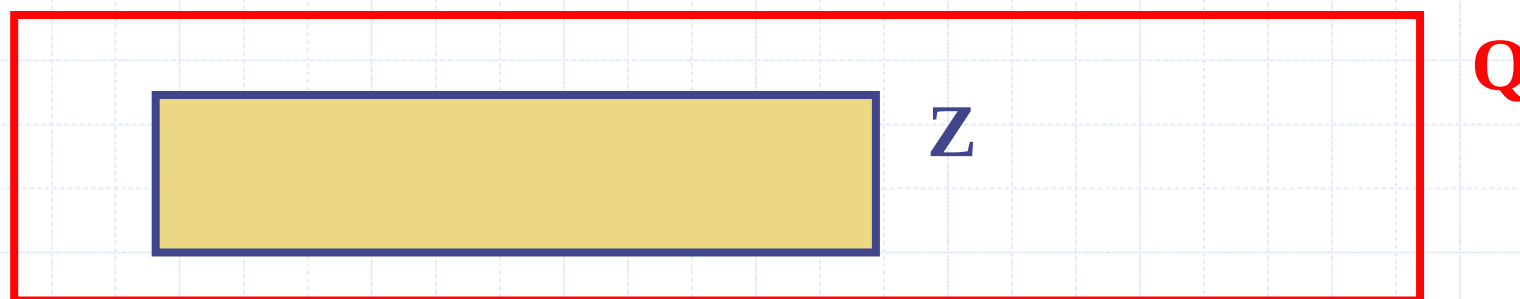
V dalších přednáškách nejdříve rozšíříme strukturu přirozených čísel $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$ na strukturu celých čísel $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ tak, aby sčítací podstruktura $(\mathbb{Z}, +)$ byla komutativní grupa.



V celých číslech bude kromě úplných operací sčítání a násobení **úplná i operace odčítání.**

Východisko – 2.etapa

Pak rozšíříme strukturu celých čísel $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ na strukturu racionálních čísel $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ tak, aby podstruktura $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$ byla komutativní grupa.

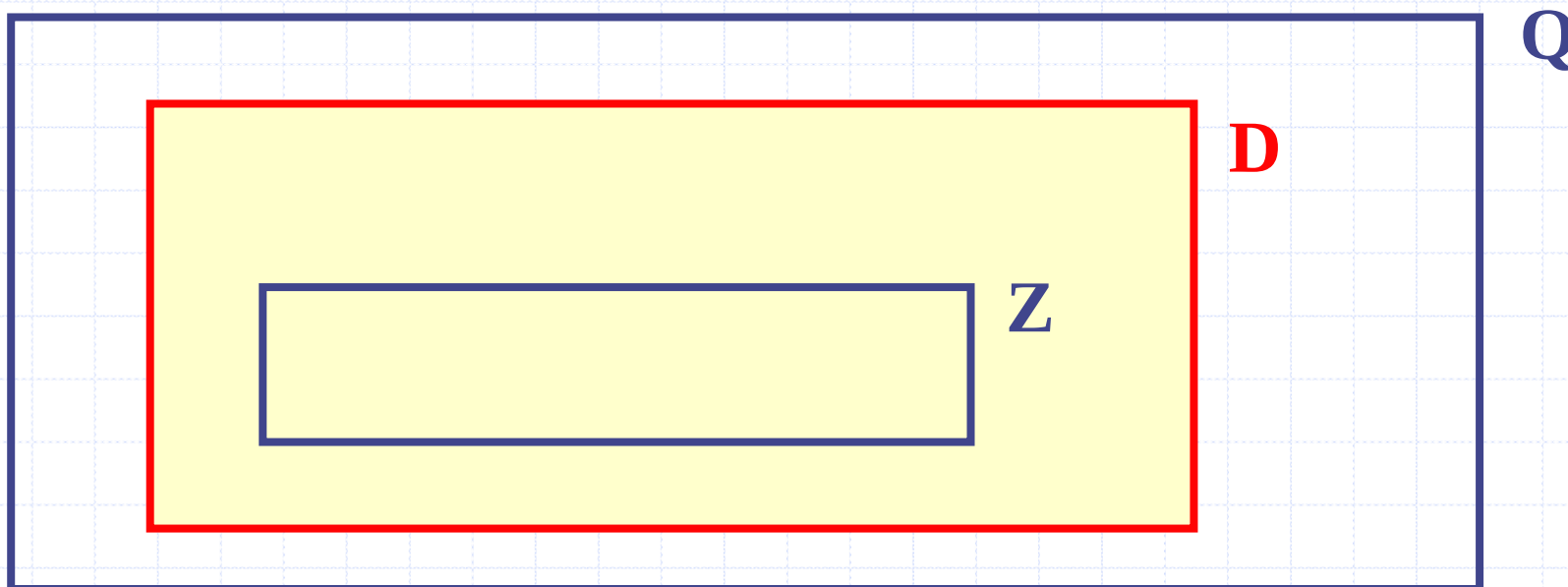


V racionálních číslech bude kromě úplných operací sčítání, násobení a odčítání **úplná i operace dělení (s výjimkou dělení číslem 0).**

Postavení desetinných čísel

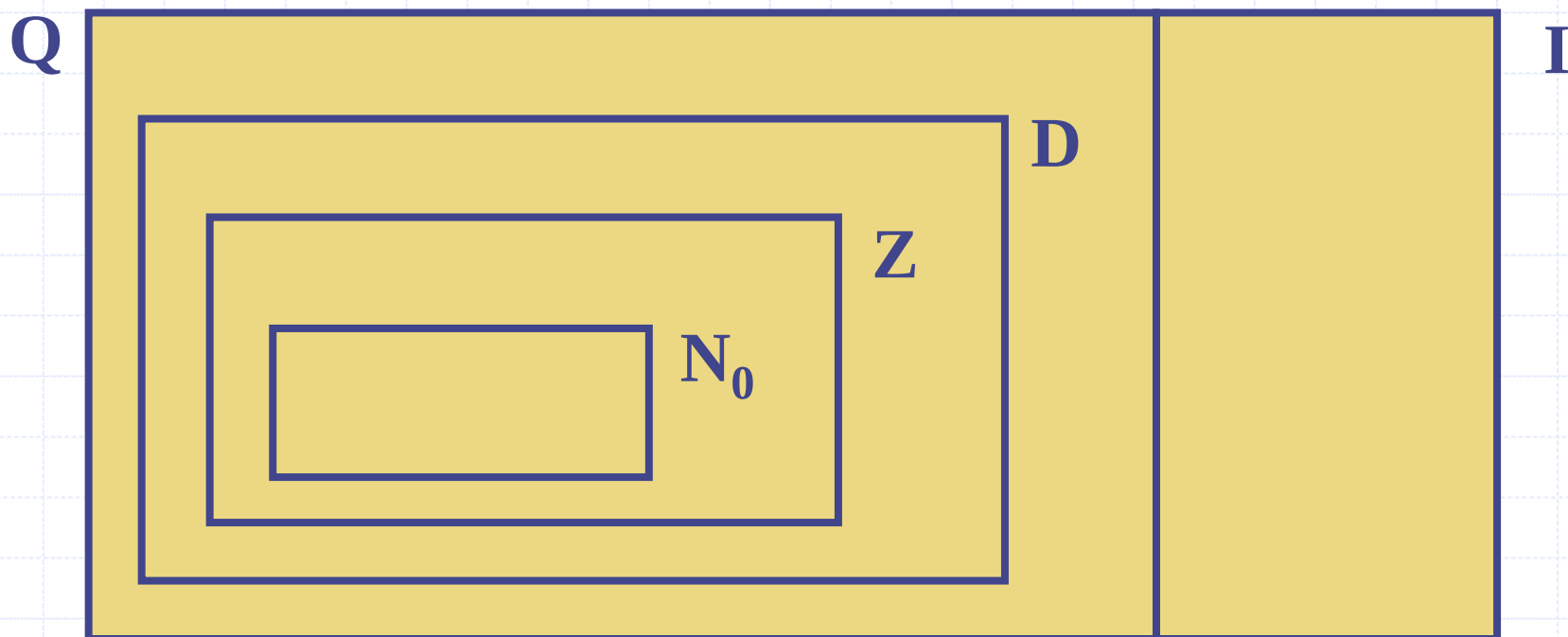
Pak se soustředíme na otázku, která racionální čísla jsou desetinná, a která nejsou.

Prozkoumáme vztah $\mathbf{Z} \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{Q}$ a zjistíme vlastnosti struktury $(\mathbf{D}, +, \cdot)$.



Reálná čísla

Pak zjistíme, že kromě racionálních čísel existují i tzv. **iracionální** čísla, která spolu s racionálními tvoří čísla **reálná**.



Děkuji za pozornost

