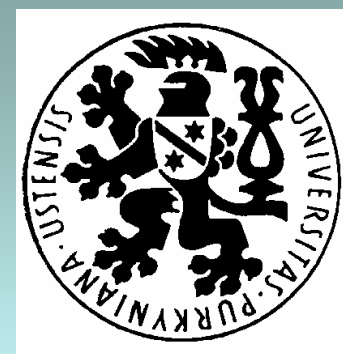




**Katedra matematiky
PF UJEP**



Aritmetika s didaktikou II.

KM1 / 0026

Přednáška 06

Zavedení celých čísel

O čem budeme hovořit:

- Zopakujeme vlastnosti struktury $(N_0, +, \cdot)$, z níž bude konstrukce vycházet.
- Na kartézském součinu $N_0 \times N_0$ definujeme ekvivalenci, která jej rozloží na třídy.
- Na těchto třídách (budoucích celých číslech) definujeme operace sčítání a násobení.

**Základní fakta,
cíl a idea konstrukce**

Vlastnosti přirozených čísel

Již jsme dokázali, že:

- struktura $(\mathbb{N}_0, +, \cdot, <)$ je lineárně uspořádaný komutativní polookruh s neutrálními prvky,
- ani jedna z operací sčítání a násobení nemá v $\mathbb{N}_0$ inverzní prvky.

Cílem je ke struktuře $(\mathbb{N}_0, +, \cdot, <)$ sestrojit lineárně uspořádaný nadokruh $(\mathbb{Z}, +, \cdot, <)$ celých čísel.

Pozadí našeho postupu

Abychom mohli přirozená čísla neomezeně odčítat, musí být každé uspořádané dvojici **[a;b]** přiřazen výsledek **a - b**.

V některých případech získáme přirozené číslo, v jiných získáme „nové“ celé číslo.

Ke každé zvolené dvojici, například **[7;3]**, existuje nekonečně mnoho dalších dvojic, které odečtením členů dají stejný výsledek, například **[8;4]**, **[4;0]**, atd.

V dalším budeme takovéto dvojice nazývat „ekvivalentní“.

Teoretická konstrukce

Definice relace $\sim$

Definujme na množině $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ binární relaci $\sim$:

$$[a;b] \sim [c;d] \iff_D a + d = b + c$$

Příklady:

$$[7;3] \sim [8;4] \iff 7 + 4 = 3 + 8$$

$$[3;5] \sim [0;2] \iff 3 + 2 = 5 + 0$$

$$[1;1] \sim [6;6] \iff 1 + 6 = 1 + 6$$

$$[0;3] \sim [5;8] \iff 0 + 8 = 3 + 5$$

Relace $\sim$ je ekvivalence

Reflexivita:

$$(\forall a,b) [a;b] \sim [a;b] \Leftrightarrow a+b = b+a$$

Symetrie:

$$\begin{aligned} (\forall a,b,c,d) [a;b] \sim [c;d] &\Rightarrow a+d = b+c \Rightarrow \\ &\Rightarrow c+b = d+a \Rightarrow [c;d] \sim [a;b] \end{aligned}$$

Tranzitivita:

$$\begin{aligned} (\forall a,b,c,d,e,f) [a;b] \sim [c;d] \wedge [c;d] \sim [e;f] &\Rightarrow \\ \Rightarrow a+d = b+c \wedge c+f = d+e &\Rightarrow a+d+c+f = b+c+d+e \Rightarrow \\ &\Rightarrow a+f = b+e \Rightarrow [a;b] \sim [e;f] \end{aligned}$$

Třídy rozkladu podle ekvivalence $\sim$

Každá **relace ekvivalence** indukuje **rozklad** množiny či třídy, na níž je definována.

V každé třídě rozkladu přitom leží všechny navzájem ekvivalentní prvky a každý prvek leží v právě jedné třídě rozkladu.

Ekvivalence $\sim$ indukuje rozklad množiny $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ všech uspořádaných dvojic přirozených čísel.

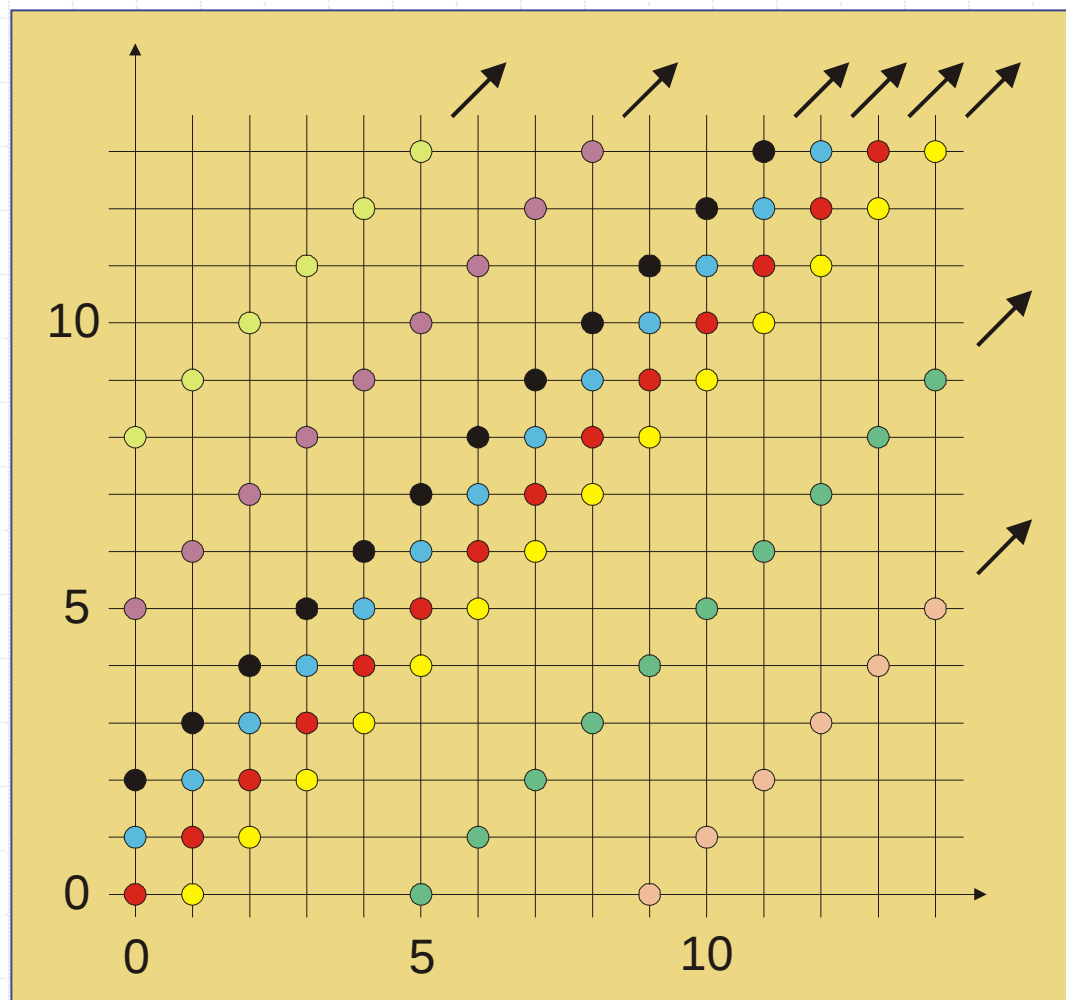
V každé třídě rozkladu leží všechny navzájem ekvivalentní dvojice a každá uspořádaná dvojice je prvkem právě jedné třídy rozkladu.

Vizuální představa tříd rozkladu

Využijeme toho,
že platí:

$$[a;b] \sim [a+1;b+1]$$

**Celá čísla budeme
definovat jako tyto
třídy rozkladu!**

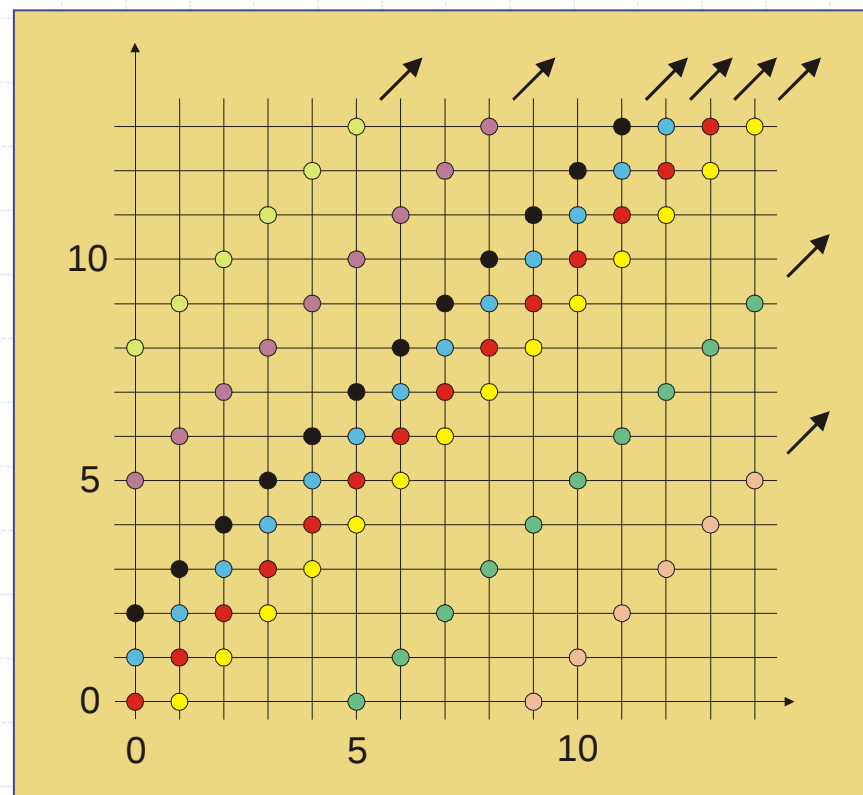


Poznámka o rovnosti tříd

Označení:

Třidu, jejímž prvkem je dvojice $[a;b]$, budeme označovat $T[a;b]$.

„Modrá“ třída tedy může být označena jako $T[0;1]$ nebo $T[1;2]$ nebo $T[5;6]$ nebo $T[20;21]$, atd.



Zřejmě platí:

$$T[a;b] = T[c;d] \Leftrightarrow [a;b] \sim [c;d]$$

A jak dál?
Jak definovat operace na třídách?

Motivace tvaru definic sčítání a násobení

Máme představu, že třída $T[a;b]$ představuje „budoucí“ rozdíl $a - b$.

Součet tříd $T[a;b] + T[c;d]$ musí tedy být taková třída $T[e;f]$, aby platilo:

$$(a - b) + (c - d) = (e - f),$$

tedy $(a + c) - (b + d) = e - f$.

Součin tříd $T[a;b] \cdot T[c;d]$ musí tedy být taková třída $T[g;h]$, aby platilo:

$$(a - b) \cdot (c - d) = (g - h),$$

tedy $(a \cdot c + b \cdot d) - (a \cdot d + b \cdot c) = g - h$.

Definice sčítání a násobení

Definice součtu tříd:

$$T[a;b] + T[c;d] =_D T[a + c ; b + d]$$

Definice součinu tříd:

$$T[a;b] \cdot T[c;d] =_D T[a.c + b.d ; a.d + b.c]$$

Příklady:

$$T[5;1] + T[2;4] = T[5+2 ; 1+4] = T[7;5]$$

$$T[5;1] \cdot T[2;4] = T[5.2+1.4 ; 5.4+1.2] = T[14;22]$$

Korektnost definic sčítání a násobení

Ekvivalentní dvojice určují tutéž třídu.

Musíme ukázat, výsledek sčítání či násobení není ovlivněn tím, jaké reprezentanty ve třídách vybereme.

Dokážeme tedy toto:

Jestliže $T[a;b] = T[a';b']$ a $T[c;d] = T[c';d']$,
pak platí:

$$T[a;b] + T[c;d] = T[a';b'] + T[c';d']$$

$$\text{a } T[a;b] \cdot T[c;d] = T[a';b'] \cdot T[c';d']$$

Jak?

Děkuji za pozornost

