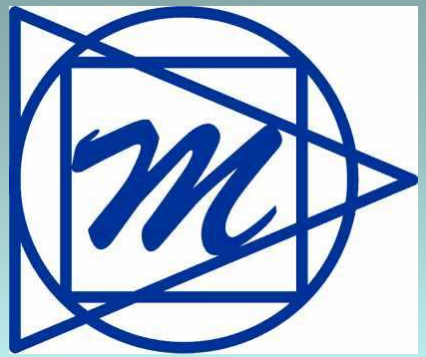
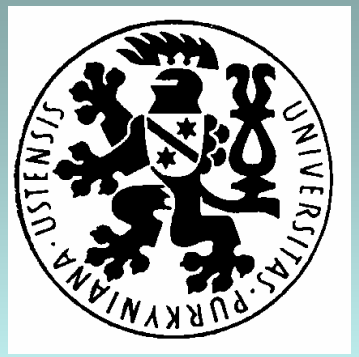


Katedra matematiky
PF UJEP



Aritmetika s didaktikou II.

KM1 / 0026

Přednáška 07

Vlastnosti celých čísel

O čem budeme hovořit:

- Zopakujeme si definice operací sčítání a násobení tříd.
- Postupně zjistíme, jaké vlastnosti tyto operace mají.
- Definujeme strukturu celých čísel (Z, +, .) a vyšetříme její vztah ke struktuře (N_0 , +, .) .

Základní fakta

Rovnost tříd

Rovnost tříd je zavedena takto:

$$T[a;b] = T[c;d] \Leftrightarrow [a;b] \sim [c;d]$$

přičemž ekvivalence dvojic je definována takto:

$$[a;b] \sim [c;d] \Leftrightarrow a + d = b + c$$

Sčítání a násobení tříd

Definice součtu tříd:

$$T[a;b] + T[c;d] =_D T[\, a + c \,;\, b + d \,]$$

Definice součinu tříd:

$$T[a;b] \,.\, T[c;d] =_D T[\, a.c + b.d \,;\, a.d + b.c \,]$$

Při odvozování vlastností těchto operací budeme využívat fakt, že struktura $(N_0, +, ., <)$ je lineárně uspořádaný komutativní polookruh s neutrálními prvky.

Vlastnosti operací

Úplnost operací sčítání a násobení tříd

$$T[a;b] + T[c;d] =_D T[\, a + c \,;\, b + d \,]$$

$$T[a;b] \,.\, T[c;d] =_D T[\, a.c + b.d \,;\, a.d + b.c \,]$$

Vzhledem k tomu, že sčítání a násobení jsou ve struktuře $(N_0, +, .)$ úplné, existují pro libovolná **a, b, c, d** i přirozená čísla, která jsou v definicích na pravých stranách tedy čísla **a + c , b + d , a.c + b.d , a.d + b.c** , a tedy existují i výsledné třídy.

Komutativita sčítání tříd

Máme dokázat, že platí:

$$T[a;b] + T[c;d] = T[c;d] + T[a;b] ,$$

tj. $T[\, a + c \,;\, b + d \,] = T[\, c + a \,;\, d + b \,] .$

Vzhledem ke komutativitě sčítání **přirozených čísel** je na levé i pravé straně tatáž třída (je určena toutéž uspořádanou dvojicí).

Komutativita násobení tříd

Máme dokázat, že platí:

$$\mathbf{T[a;b] \,.\, T[c;d] \;=\; T[c;d] \,.\, T[a;b]\,,}$$

tj. $\mathbf{T[\,a.c + b.d\,;\,a.d + b.c\,] = T[\,c.a + d.b\,;\,c.b + d.a\,]\,.}$

Vzhledem ke komutativitě násobení a komutativitě sčítání **přirozených čísel** je na levé i pravé straně tatáž třída (je určena toutéž uspořádanou dvojicí).

Asociativita sčítání tříd

Máme dokázat, že platí:

$$(T[a;b] + T[c;d]) + T[e;f] = T[a;b] + (T[c;d] + T[e;f]),$$

tj. $T[a+c\,;\,b+d] + T[e;f] = T[a;b] + T[c+e\,;\,d+f]$,

tj. $T[(a+c)+e\,;\,(b+d)+f] = T[a+(c+e)\,;\,b+(d+f)]$.

To však jistě platí vzhledem k asociativitě sčítání **přirozených čísel** .

Asociativita násobení tříd

Máme dokázat, že platí:

$$(\,T[a;b]\,.\,T[c;d]\,)\,.\,T[e;f] = T[a;b]\,.\,(\,T[c;d]\,.\,T[e;f]\,)\,,$$

tedy $T[a.c + b.d\,;\, a.d + b.c\,]\,.\,T[e;f] = T[a;b]\,.\,T[c.e + d.f\,;\, c.f + d.e\,]$

Levou i pravou stranu bychom opět upravili podle definice násobení, atd.

Užije se pak distributivita, komutativita a asociativita sčítání a asociativita násobení.

Je zajímavé, že nemusíme použít komutativitu násobení.

Distributivita násobení vůči sčítání

Máme dokázat, že platí:

$$(T[a;b] + T[c;d]) \,.\, T[e;f] = T[a;b] \,.\, T[e;f] + T[c;d] \,.\, T[e;f] ,$$

tedy $T[a+c ; b+d] \,.\, T[e;f] =$

$$= T[ae + bf ; af + be] + T[ce + df ; cf + de] \,.$$

Levou i pravou stranu bychom opět upravili podle definice násobení, pravou podle definice sčítání, atd.

Užije se pak distributivita a komutativita a asociativita sčítání.

Neužijeme ani komutativitu ani asociativitu násobení.

Neutrální prvek sčítání tříd

Hledáme takovou třídu **T[x;y]** , aby platilo:

$$T[a;b] + T[x;y] = T[a;b] ,$$

tj. $T[a+x ; b+y] = T[a;b] .$

Snadno nahlédneme, že vzhledem k neutralitě nuly u sčítání **přirozených čísel** je možné volit $x = y = 0 .$

Neutrálním prvkem u sčítání je třída T[0;0] .

Neutrální prvek násobení tříd

Hledáme takovou třídu **T[x;y]** , aby platilo:

$$T[a;b] \cdot T[x;y] = T[a;b] ,$$

tj. **T[ax+by ; ay+bx] = T[a;b] .**

Snadno nahlédneme, že vzhledem k neutralitě čísla 1 a agresivitě čísla 0 u násobení **přirozených čísel** je možné volit **x = 1** a **y = 0 .**

Neutrálním prvkem u násobení je třída T[1;0] .

Inverzní prvky u sčítání tříd

K dané třídě **T[a;b]** hledáme takovou třídu **T[x;y]** , aby platilo:

$$T[a;b] + T[x;y] = T[0;0] ,$$

tedy

$$T[a+x ; b+y] = T[0;0] ,$$

$$[a+x ; b+y] \sim [0;0]$$

$$a+x + 0 = b+y + 0$$

Snadno nahlédneme, že vzhledem k neutralitě nuly a komutativitě sčítání **přirozených čísel** je možné volit **x = b** a **y = a .**

Inverzním prvkem ke třídě T[a;b] je třída T[b;a] .

Inverzní prvky u násobení tříd

K dané třídě **T[a;b]** hledáme takovou třídu **T[x;y]** , aby platilo:

$$T[a;b] \,.\, T[x;y] \;=\; T[1;0] \,,$$

tedy $T[ax+by \,;\, ay+bx] = T[1;0] \,,$

$$[ax+by \,;\, ay+bx] \sim [1;0]$$

$$ax+by + 0 = ay+bx + 1$$

Volíme-li například **a = 3** a **b = 1**, máme **2x = 2y + 1**, ale vzhledem k paritě taková čísla **x, y neexistují**.

Inverzní prvky u násobení tedy obecně neexistují .

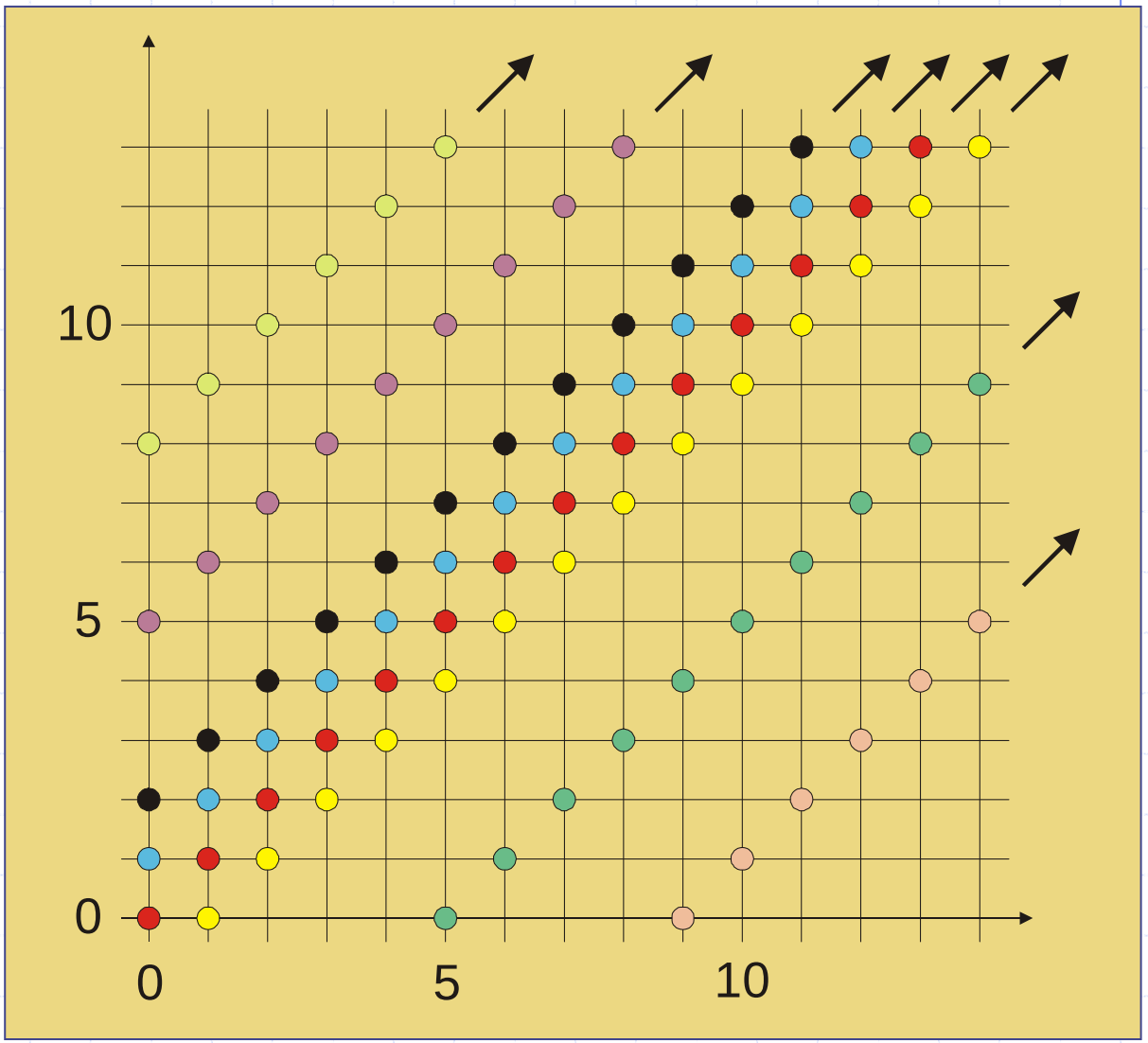
Vizuální představy

Neutrální prvek sčítání je **T[0;0] .**

Neutrální prvek násobení je **T[1;0] .**

Inverzní prvky u sčítání existují:

k prvku **T[a;b]** je inverzní **T[b;a] .**



Označování tříd – celá čísla

Definice: $T[a;0] =_D (+a)$, $T[0;a] =_D (-a)$

Třídy (+a) , (–a) budeme nazývat **celými čísly**, množinu všech celých čísel budeme označovat **Z**.

Ukažme, že s třídami **(+a)** se počítá jako s čísly z $\mathbf{N_0}$:

$$(+a) + (+b) = T[a;0] + T[b;0] =$$
$$= T[a+b\ ;\ 0+0] = +(a+b)$$
$$(+a) \,.\, (+b) = T[a;0] \,.T[b;0] =$$
$$= T[a.b+0.0\ ;\ a.0+0.b] = +(a.b)$$

Ztotožníme tedy $T[a;0] = (+a) = a$ a máme $N_0 \subseteq Z$.

Další dokazatelná tvrzení

Je možné definovat uspořádání na třídách takto:

$$T[a;b] < T[c;d] \Leftrightarrow_D a + d < b + c$$

a dokázat, že relace $<$ je ostré lineární uspořádání.

Lze definovat kladná a záporná celá čísla a platí invariance uspořádání ve tvaru:

$$(\forall x,y,z)\ \ x < y \ \Rightarrow x + z < y + z$$

$$(\forall x,y,z)\ \ x < y \wedge\ 0 < z \ \Rightarrow x \,.\, z < y \,.\, z$$

Platí též, že v Z neexistují dělitelé nuly, tedy

$$(\forall x,y,z)\ \ x \,.\, y = \ 0 \ \ \Rightarrow \ x = 0 \ \vee \ y = 0 \,.$$

Děkuji za pozornost