



**Katedra matematiky
PF UJEP**



Aritmetika s didaktikou II.

KM1 / 0026

Přednáška 08

Zavedení racionálních čísel

O čem budeme hovořit:

- Zopakujeme vlastnosti struktury $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, z níž bude konstrukce vycházet.
- Na kartézském součinu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}$ (jeho prvky představují zlomky) definujeme ekvivalenci, která jej rozloží na třídy.
- Na těchto třídách (budoucích racionálních číslech) definujeme operace sčítání a násobení.

**Základní fakta,
cíl a idea konstrukce**

Vlastnosti celých čísel

Již jsme dokázali, že:

- struktura $(\mathbb{Z}, +, \cdot, <)$ je lineárně uspořádaný komutativní obor integrity s jednotkovým prvkem,
- operace násobení nemá v $\mathbb{Z}$ inverzní prvky.

Cílem je ke struktuře $(\mathbb{Z}, +, \cdot, <)$ sestrojit lineárně uspořádané nadtěleso $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ racionálních čísel.

Pozadí našeho postupu

Abychom mohli celá čísla neomezeně dělit (samozřejmě s výjimkou nuly), musí být každé uspořádané dvojici **[a;b]** přiřazen výsledek **a / b**.

V některých případech získáme celé číslo, v jiných získáme „nové“ racionální číslo.

Ke každé zvolené dvojici (zlomku), například **[3;2]**, existuje nekonečně mnoho dalších dvojic, které dělením svých členů dají stejný výsledek, například **[6;4]**, **[9;6]**, atd. (Rozšiřování a krácení zlomků.)

V dalším budeme takovéto dvojice nazývat „ekvivalentní“.

Teoretická konstrukce

Definice relace $\sim$

Definujme na množině $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} - \{0\}$ binární relaci $\sim$:

$$[a;b] \sim [c;d] \iff_D a \cdot d = b \cdot c$$

Příklady:

$$[3;2] \sim [9;6] \iff 3 \cdot 6 = 2 \cdot 9$$

$$[1;1] \sim [6;6] \iff 1 \cdot 6 = 1 \cdot 6$$

$$[-6;3] \sim [8;-4] \iff (-6) \cdot (-4) = 3 \cdot 8$$

$$[0;-3] \sim [0;7] \iff 0 \cdot 7 = (-3) \cdot 0$$

Relace $\sim$ je ekvivalence

Reflexivita:

$$(\forall a,b) [a;b] \sim [a;b] \Leftrightarrow a.b = b.a$$

Symetrie:

$$\begin{aligned} (\forall a,b,c,d) [a;b] \sim [c;d] &\Rightarrow a.d = b.c \Rightarrow \\ &\Rightarrow c.b = d.a \Rightarrow [c;d] \sim [a;b] \end{aligned}$$

Tranzitivita: (pozor na nenulová čísla)

$$\begin{aligned} (\forall a,b,c,d,e,f) [a;b] \sim [c;d] \wedge [c;d] \sim [e;f] &\Rightarrow \\ \Rightarrow a.d = b.c \wedge c.f = d.e &\Rightarrow a.d.f = b.c.f \wedge b.c.f = b.d.e \\ \Rightarrow a.d.f = b.d.e &\Rightarrow a.f = b.e \Rightarrow [a;b] \sim [e;f] \end{aligned}$$

Třídy rozkladu podle ekvivalence $\sim$

Každá **relace ekvivalence** indukuje **rozklad** množiny či třídy, na níž je definována.

Ekvivalence $\sim$ tedy indukuje rozklad množiny $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}$ všech uspořádaných dvojic celých čísel (druhé nenulové).

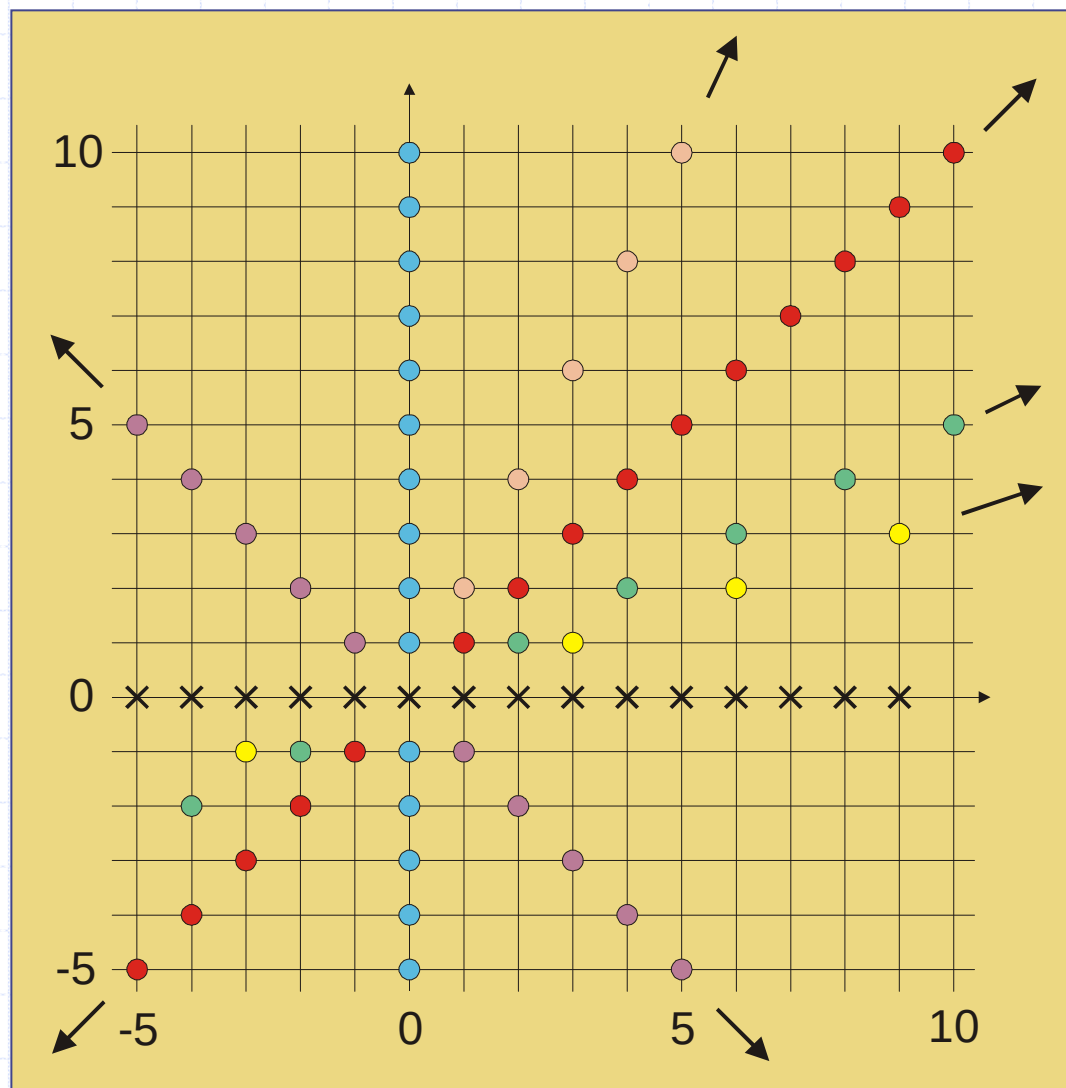
V každé třídě rozkladu leží všechny navzájem ekvivalentní dvojice a každá uspořádaná dvojice je prvkem právě jedné třídy rozkladu.

Vizuální představa tříd rozkladu

Využijeme toho,
že pro $k \neq 0$ platí:

$$[a;b] \sim [k.a;k.b]$$

**Racionální čísla
budeme definovat
jako tyto třídy
rozkladu!**



Poznámka o rovnosti tříd

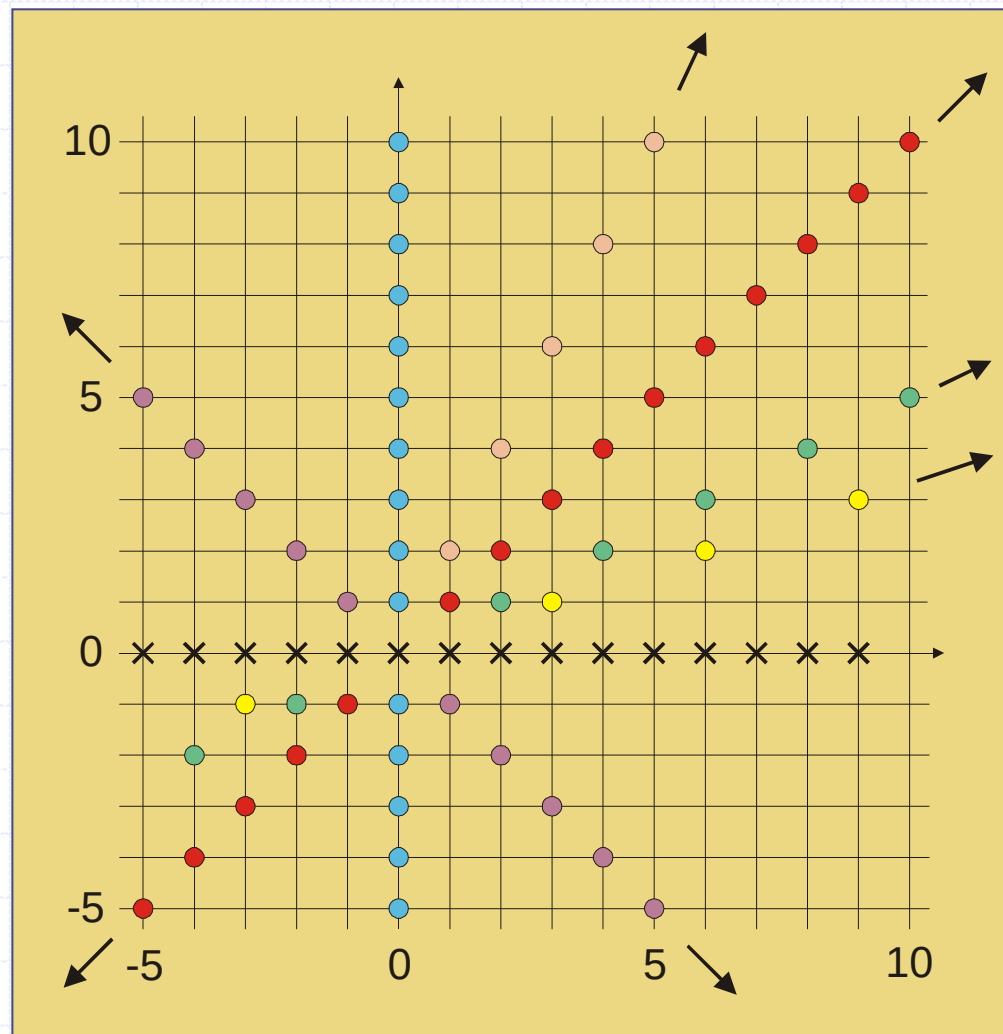
Označení:

Třidu, jejímž prvkem je dvojice $[a;b]$, budeme označovat $T[a;b]$.

„Žlutá“ třída tedy může být označena jako $T[-3;-1]$ nebo $T[9;3]$ nebo $T[6;2]$.

Zřejmě platí:

$$T[a;b] = T[c;d] \Leftrightarrow [a;b] \sim [c;d]$$



A jak dál?
Jak definovat operace na třídách?

Motivace tvaru definic sčítání a násobení

Máme představu, že třída $T[a;b]$ představuje „budoucí“ podíl a / b .

Součet tříd $T[a;b] + T[c;d]$ musí tedy být taková třída $T[e;f]$, aby platilo:

$$a / b + c / d = e / f ,$$

tedy

$$a.d + b.c / b.d = e / f .$$

Součin tříd $T[a;b] . T[c;d]$ musí tedy být taková třída $T[g;h]$, aby platilo:

$$(a / b) . (c / d) = (g / h) ,$$

tedy

$$a.c / b.d = g / h .$$

Definice sčítání a násobení

Definice součtu tříd:

$$T[a;b] + T[c;d] =_D T[a.d + b.c ; b.d]$$

Definice součinu tříd:

$$T[a;b] \cdot T[c;d] =_D T[a.c ; b.d]$$

Příklady:

$$T[3;2] + T[-2;4] = T[3.4 + 2.(-2) ; 2.4] = T[8;8]$$

$$T[3;2] \cdot T[-2;4] = T[3.(-2) ; 2.4] = T[-6;8]$$

Korektnost definic sčítání a násobení

Ekvivalentní dvojice určují tutéž třídu.

Musíme ukázat, výsledek sčítání či násobení není ovlivněn tím, jaké reprezentanty ve třídách vybereme.

Dokážeme tedy toto:

Jestliže $T[a;b] = T[a';b']$ a $T[c;d] = T[c';d']$,
pak platí:

$$T[a;b] + T[c;d] = T[a';b'] + T[c';d']$$

$$\text{a } T[a;b] \cdot T[c;d] = T[a';b'] \cdot T[c';d']$$

Jak?

Děkuji za pozornost

