



**Katedra matematiky
PF UJEP**



Aritmetika s didaktikou II.

KM1 / 0026

Přednáška 09

Vlastnosti racionálních čísel

O čem budeme hovořit:

- Zopakujeme si definice operací sčítání a násobení tříd.
- Postupně zjistíme, jaké vlastnosti tyto operace mají.
- Definujeme strukturu racionálních čísel $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ a vyšetříme její vztah ke struktuře $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Základní fakta

Rovnost tříd

Rovnost tříd je zavedena takto:

$$T[a;b] = T[c;d] \Leftrightarrow [a;b] \sim [c;d]$$

přičemž ekvivalence dvojic je definována takto:

$$[a;b] \sim [c;d] \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Sčítání a násobení tříd

Definice součtu tříd:

$$T[a;b] + T[c;d] =_D T[a.d + b.c ; b.d]$$

Definice součinu tříd:

$$T[a;b] \cdot T[c;d] =_D T[a.c ; b.d]$$

Při odvozování vlastností těchto operací budeme využívat fakt, že struktura $(\mathbb{Z}, +, \cdot, <)$ je lineárně uspořádaný komutativní obor integrity s jednotkovým prvkem.

Vlastnosti operací

Úplnost operací sčítání a násobení tříd

$$T[a;b] + T[c;d] =_D T[a.d + b.c ; b.d]$$

$$T[a;b] \cdot T[c;d] =_D T[a.c ; b.d]$$

Vzhledem k tomu, že sčítání a násobení jsou ve struktuře $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ úplné, existují pro libovolná **a, b, c, d** i celá čísla, která jsou v definicích na pravých stranách tedy čísla **a.d + b.c**, **b.d**, **a.c**, **b.d**, a tedy existují i výsledné třídy.

Komutativita sčítání tříd

Máme dokázat, že platí:

$$T[a;b] + T[c;d] = T[c;d] + T[a;b] ,$$

tj. $T[a.d + b.c ; b.d] = T[c.b + d.a ; d.b] .$

Vzhledem ke komutativitě sčítání a násobení **celých čísel** je na levé i pravé straně tatáž třída (je určena toutéž uspořádanou dvojicí).

Komutativita násobení tříd

Máme dokázat, že platí:

$$T[a;b] \cdot T[c;d] = T[c;d] \cdot T[a;b] ,$$

tj. $T[a.c ; b.d] = T[c.a ; d.b] .$

Vzhledem ke komutativitě násobení **celých čísel** je na levé i pravé straně tatáž třída (je určena toutéž uspořádanou dvojicí).

Asociativita sčítání tříd

Máme dokázat, že platí:

$$\begin{aligned} (T[a;b] + T[c;d]) + T[e;f] &= \\ &= T[a;b] + (T[c;d] + T[e;f]), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tj. } T[a \cdot d + b \cdot c; b \cdot d] + T[e;f] &= \\ &= T[a;b] + T[c \cdot f + d \cdot e; d \cdot f], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tj. } T[(a \cdot d + b \cdot c) \cdot f + (b \cdot d) \cdot e; (b \cdot d) \cdot f] &= \\ &= T[a \cdot (d \cdot f) + b \cdot (c \cdot f + d \cdot e); b \cdot (d \cdot f)]. \end{aligned}$$

To však jistě platí vzhledem k distributivitě a asociativitě sčítání a násobení **celých čísel**.

Asociativita násobení tříd

Máme dokázat, že platí:

$$\begin{aligned} (T[a;b] \cdot T[c;d]) \cdot T[e;f] &= \\ &= T[a;b] \cdot (T[c;d] \cdot T[e;f]) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tedy } T[a.c ; b.d] \cdot T[e;f] &= \\ &= T[a;b] \cdot T[c.e ; d.f] \end{aligned}$$

$$\text{tedy } T[(a.c).e ; (b.d).f] = T[a.(c.e) ; b.(d.f)]$$

Užije se pouze asociativita násobení.

Distributivita násobení vůči sčítání

Máme dokázat, že platí:

$$\begin{aligned} (T[a;b] + T[c;d]) \cdot T[e;f] &= \\ &= T[a;b] \cdot T[e;f] + T[c;d] \cdot T[e;f], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tedy } T[a \cdot d + b \cdot c; b \cdot d] \cdot T[e;f] &= \\ &= T[a \cdot e; b \cdot f] + T[c \cdot e; d \cdot f]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tedy } T[(a \cdot d + b \cdot c) \cdot e; (b \cdot d) \cdot f] &= \\ &= T[(a \cdot e) \cdot (d \cdot f) + (b \cdot f) \cdot (c \cdot e); (b \cdot f) \cdot (d \cdot f)]. \end{aligned}$$

Užije se pak distributivita, komutativita a asociativita násobení. **Musíme též užít rovnost tříd!**

Neutrální prvek sčítání tříd

Hledáme takovou třídu $T[x;y]$, aby platilo:

$$T[a;b] + T[x;y] = T[a;b] ,$$

tj. $T[a.y+b.x ; b.y] = T[a;b] .$

Snadno nahlédneme, že vzhledem k vlastnostem čísel **0** a **1** u sčítání a násobení **celých čísel** je možné volit **$x = 0$ a $y = 1$.**

Neutrálním prvkem u sčítání je třída $T[0;1]$.

Neutrální prvek násobení tříd

Hledáme takovou třídu $T[x;y]$, aby platilo:

$$T[a;b] \cdot T[x;y] = T[a;b] ,$$

tj. $T[ax ; by] = T[a;b] .$

Snadno nahlédneme, že vzhledem k neutralitě čísla 1 u násobení **celých čísel** je možné volit

$$x = y = 1 .$$

Neutrálním prvkem u násobení je třída $T[1;1]$.

Inverzní prvky u sčítání tříd

K dané třídě $T[a;b]$ hledáme takovou třídu $T[x;y]$, aby platilo:

$$T[a;b] + T[x;y] = T[0;1],$$

tedy

$$T[a.y+b.x ; b.y] = T[0;1],$$

$$[a.y+b.x ; b.y] \sim [0;1]$$

$$(a.y+b.x).1 = (b.y).0$$

Snadno nahlédneme, že je možné volit

$$x = -a \quad a \quad y = b.$$

Inverzním prvkem ke třídě $T[a;b]$ je třída $T[-a;b]$.

Inverzní prvky u násobení tříd

K dané třídě $T[a;b]$ hledáme takovou třídu $T[x;y]$, aby platilo:

$$T[a;b] \cdot T[x;y] = T[1;1],$$

tedy

$$T[a \cdot x ; b \cdot y] = T[1;1],$$

$$[a \cdot x ; b \cdot y] \sim [1;1]$$

$$(a \cdot x) \cdot 1 = (b \cdot y) \cdot 1$$

Je možné volit $x = b$ a $y = a$ (komutativita násobení).

**Inverzním prvkem ke třídě $T[a;b]$ je třída $T[b;a]$.
To ovšem má smysl jen pro třídy $T[a;b] \neq T[0;1]$!!!**

Vizuální představy

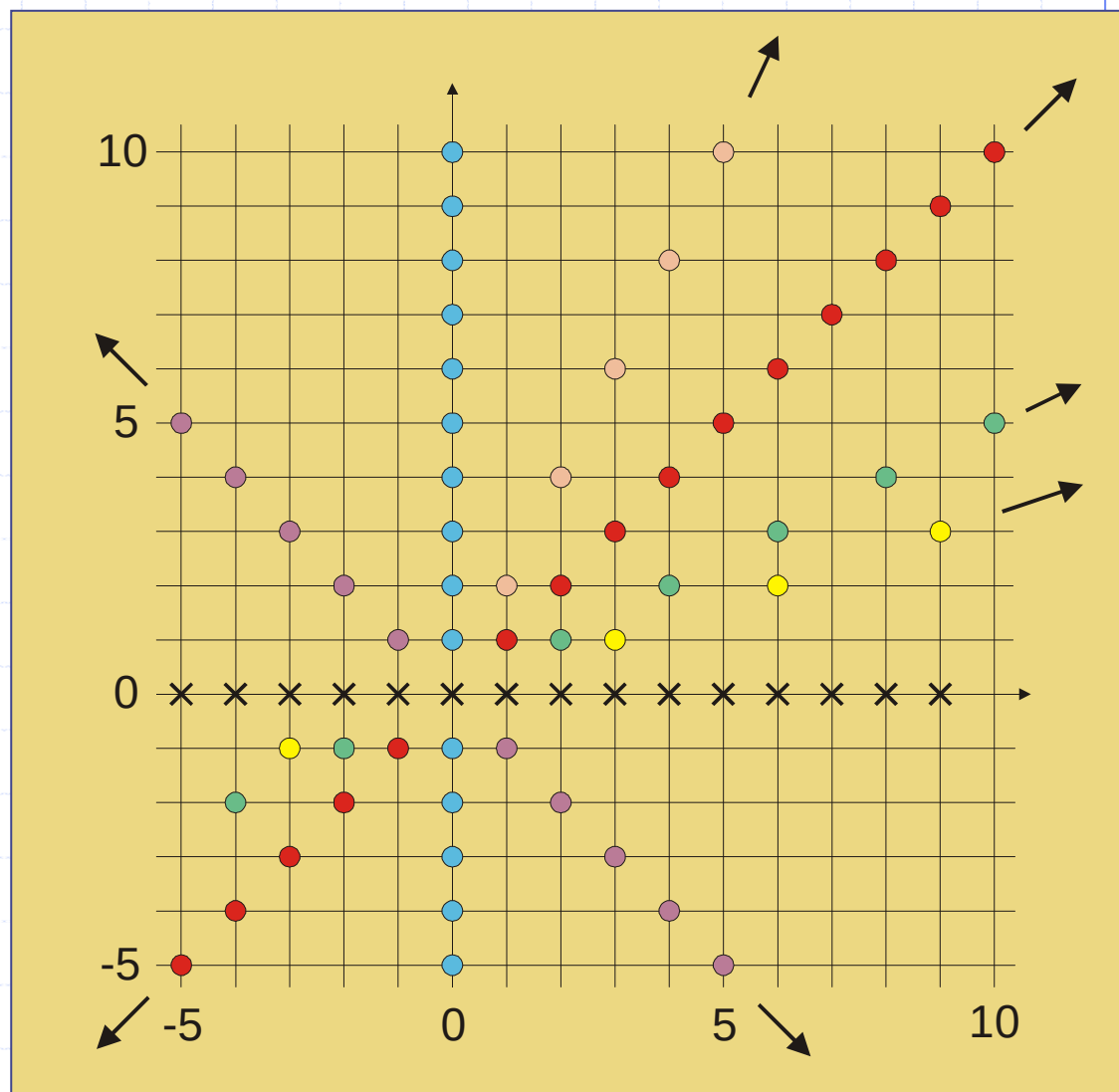
Neutrální prvek
sčítání je $T[0;1]$.

Neutrální prvek
násobení je $T[1;1]$.

K prvku $T[a;b]$ je
inverzní

u sčítání $T[-a;b]$,
u násobení $T[b;a]$.

$T[0;1]$ nemá
inverzní prvek u
násobení .



Vztah struktur celých a racionálních čísel

Definice: Třídy $T[a;b]$ budeme nazývat **racionálními čísly**, množinu všech racionálních čísel budeme označovat Q .

Ukažme, že s třídami $T[a;1]$ se počítá jako s čísly ze Z :

$$T[a;1] + T[b;1] = T[a.1+1.b ; 1.1] = T[a+b ; 1]$$

$$T[a;1] \cdot T[b;1] = T[a.b ; 1.1] = T[a.b ; 1]$$

Ztotožníme tedy $T[a;1] = a$ a máme $Z \subseteq Q$.

Označování racionálních čísel

Úmluva:

Libovolné racionální číslo $T[a;b]$ můžeme zapsat pomocí dvojice $[a;b]$, přičemž celému číslu a budeme říkat **čitatel** a celému **nenulovému** číslu b budeme říkat **jmenovatel**.

Dvojici čísel pak budeme psát ve tvaru zlomku:

$$\frac{a}{b}$$

Racionální číslo tedy můžeme zapisovat **různými** zlomky, které jsou **ekvivalentní**.

Ve škole však budeme místo symbolu $\sim$ psát symbol $=$, a říkat, že **zlomky jsou si rovny**.

Uspořádání racionálních čísel

Protože platí, že $T[a;b] = T[-a;-b]$, je každá třída reprezentovatelná dvojicí (zlomkem) s kladným jmenovatelem.

Pak je možné definovat uspořádání na třídách takto:

$$\text{pro } b > 0, d > 0 : T[a;b] < T[c;d] \Leftrightarrow_D a \cdot d < b \cdot c ,$$

a dokázat, že relace $<$ je ostré lineární uspořádání.

Lze též dokázat invariance uspořádání ve tvaru:

$$(\forall x, y, z) \quad x < y \Rightarrow x + z < y + z$$

$$(\forall x, y, z) \quad x < y \wedge 0 < z \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z$$

Děkuji za pozornost

