



**Katedra matematiky
PF UJEP**



Aritmetika s didaktikou II.

KM1 / 0026

Přednáška 10

Desetinná čísla

O čem budeme hovořit:

- Budeme definovat desetinná čísla jako speciální racionální čísla.
- Naučíme se poznávat různé druhy desetinných rozvoju čísel.
- Vyšetříme vlastnosti struktury desetinných čísel $(D, +, \cdot)$.

Na začátek jedno „kouzlo“

Úloha z rekreační matematiky:

Násobte „kouzelné číslo“ 142 857 postupně čísla jedna, dvě, tři, atd. Co objevíte zajímavého?

$$142\,857 \times 1 = 142\,857$$

$$142\,857 \times 2 = 285\,714$$

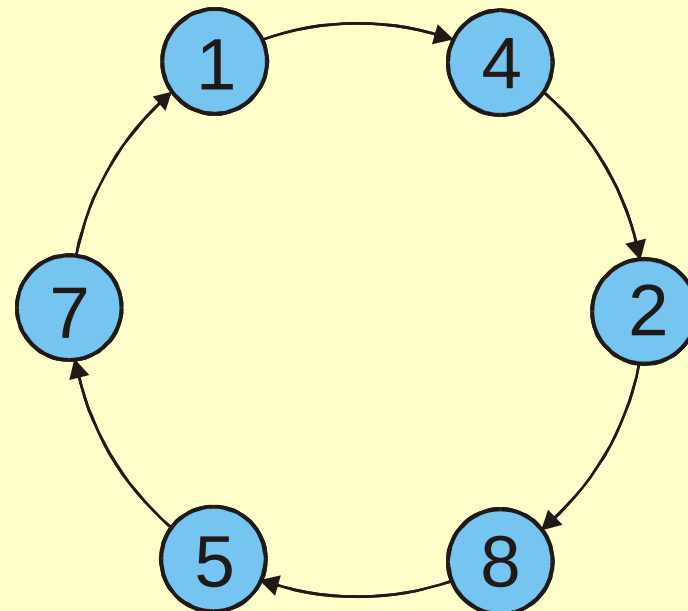
$$142\,857 \times 3 = 428\,571$$

$$142\,857 \times 4 = 571\,428$$

$$142\,857 \times 5 = 714\,285$$

$$142\,857 \times 6 = 857\,142$$

$$142\,857 \times 7 = 999\,999$$



Definice desetinných čísel

Která čísla jsou desetinná?

Racionální čísla jsou taková, která lze zapsat ve tvaru zlomku, kde čítec i jmenovatel jsou libovolná celá čísla a jmenovatel je různý od nuly.

Desetinná čísla jsou taková, která lze zapsat ve tvaru **desetinného zlomku**, který má tvar:

$$\frac{p}{10^n}, \quad p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0$$

Každé desetinné číslo je racionální.

Příklady racionálních čísel, která jsou desetinnými čísly

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{5}{10^1}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{2.2.2} = \frac{3.5.5.5}{2.2.2.5.5.5} = \frac{375}{10^3}$$

$$\frac{31}{40} = \frac{31}{2.2.2.5} = \frac{31.5.5}{2.2.2.5.5.5} = \frac{775}{10^3}$$

atd.

Příklad racionálního čísla, které není desetinné

Předpokládejme, že platí:

$$\frac{1}{3} = \frac{p}{10^n}$$

Co by z toho vyplývalo? $10^n = 3 \cdot p$

$$2^n \cdot 5^n = 3 \cdot p$$

Na levé i pravé straně rovnosti je stejné číslo.
Levá strana říká, že v jeho rozkladu na
prvočísla jsou jen dvojky a pětky, ale pravá
strana říká, že je tam trojka. **To není možné!**

Jak poznáme kdy je zlomek zápisem desetinného čísla a kdy není?

Zlomek nejprve co nejvíce zkrátíme tak, aby čitatel a jmenovatel byla již nesoudělná čísla. Pak rozložíme jmenovatele na součin prvočísel. Pak jsou jen dvě možnosti:

**rozklad obsahuje jen prvočísla 2 nebo 5
(číslo je desetinné),**

**rozklad obsahuje jiné prvočíslo než 2 nebo 5
(číslo není desetinné).**

Desetinné rozvoje

Desetinné rozvoje čísel $1/n$:

Podívejte se na hodnoty v tabulce a uvědomte si, jak desetinné rozvoje pokračují:

2	0,5000000000	8	0,1250000000	14	0,071428571
3	0,3333333333	9	0,1111111111	15	0,0666666667
4	0,2500000000	10	0,1000000000	16	0,0625000000
5	0,2000000000	11	0,090909091	17	0,058823529
6	0,1666666667	12	0,0833333333	18	0,0555555556
7	0,142857143	13	0,076923077	19	0,052631579

Desetinné rozvoje racionálních čísel

Desetinné rozvoje racionálních čísel jsou dvojího druhu:

**ukončené – to jsou desetinná čísla,
nekonečné periodické – to jsou racionální čísla,
která nejsou desetinná**

Jak ale dokázat, že když zlomek nemá ukončený desetinný rozvoj, pak je jeho rozvoj periodický?

Stačí provést písemné dělení:

Například:

$$1 : 7 = 0,142857....$$

10

30

20

60

40

50

10

$$2 : 7 = 0,285714....$$

20

60

40

50

10

30

20

Rozhodující jsou zbytky při dělení

Když zlomek nejdříve co nejvíce zkrátíme a pak dělíme čitatele jmenovatelem, mohou nastat jen dva případy:

**bud' bude některý zbytek 0 a pak je desetinný rozvoj ukončený a číslo je desetinné,
anebo se žádný zbytek nerovná nule a pak se někdy musí vyskytnout stejný zbytek, číslice desetinného rozvoje se začnou opakovat a číslo není desetinné.**

Jak nalézt obráceně k periodickému desetinnému rozvoji příslušný zlomek?

Potřebujeme součet tzv. „geometrické řady“:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = s$$

Jak ho vypočítáme?

$$q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots = q.s$$

$$1 = s - q.s$$

Závěrem obdržíme:

$$\text{pro } 0 < q < 1 \text{ platí : } 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q}$$

Příklady

$$\begin{aligned}0,777\dots &= \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \dots = \\&= \frac{7}{10} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots\right) = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1,5232323\dots &= \frac{3}{2} + \frac{23}{1000} + \frac{23}{100000} + \dots = \\&= \frac{3}{2} + \frac{23}{1000} \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \dots\right) = \frac{3}{2} + \frac{23}{1000} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}}\end{aligned}$$

Jak určit délku periody?

Opřeme se o tento fakt:

$$1 = 0,\overline{9} = 0,9999999999 \dots$$

Pak můžeme usuzovat z těchto příkladů:

$$1 = 3 \cdot \frac{1}{3} = 0,9999999999 \dots \Rightarrow \frac{1}{3} = 0,3333333333 \dots$$

$$1 = 11 \cdot \frac{1}{11} = 0,9999999999 \dots \Rightarrow \frac{1}{11} = 0,0909090909 \dots$$

$$1 = 7 \cdot \frac{1}{7} = 0,9999999999 \dots \Rightarrow \frac{1}{7} = 0,142857142857 \dots$$

Pro stanovení délky „krátkých period“
je vhodná tato tabulka:

$9 = 3 \cdot 3$
$99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$
$999 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$
$9999 = 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 101$
$99999 = 3 \cdot 3 \cdot 41 \cdot 271$
$999999 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$
$9999999 = 3 \cdot 3 \cdot 239 \cdot 4649$
$99999999 = 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137$

Je-li n prvočíslo různé od čísel 2 a 5,
je délka periody čísla $1/n$ dělitelem čísla $n - 1$.

Jak určovat dlouhé periody?

Využije se toho, že číslice v periodách čísel k/n pro $k = 1, 2, 3$, atd. jsou vůči sobě cyklicky posunuty.

Například:

$$1/7 = 0,142857.....$$

$$2/7 = 0,285714.....$$

$$3/7 = 0,428571.....$$

atd.

[Dlouhé periody.xls](#)

Něco o cyklických číslech

- Jsou generována zlomky $1/n$, kde n jsou prvočísla 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, atd.
- U této posloupnosti generátorů není znám vzorec pro stanovení jejích členů (stejně jako u posloupnosti prvočísel) – je to zatím nevyřešený problém.

Druhy desetinných rozvoju čísel $1/n$:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

	ukončený rozvoj
	periodický rozvoj (prvočíslo)
	periodický rozvoj
	periodický rozvoj + předperioda

Struktura $(D, +, \cdot)$

Hierarchie číselných struktur

Reálná čísla ($\mathbb{R}$, + , .)

Racionální čísla ($\mathbb{Q}$, + , .)

Desetinná čísla ($\mathbb{D}$, + , .)

Celá čísla ($\mathbb{Z}$, + , .)

Přirozená čísla ($\mathbb{N}$, + , .)

Vlastnosti struktury desetinných čísel

- Obě operace jsou úplné, komutativní, asociativní a mají neutrální prvky v $\mathbf{D}$.
- Operace sčítání má inverzní prvky, existují však čísla, která nemají v $\mathbf{D}$ inverzní prvek vzhledem k násobení.
- Operace násobení je distributivní vzhledem ke sčítání a v $\mathbf{D}$ neexistují dělitelé nuly.

Struktura $(\mathbf{D}, +, \cdot)$ je obor integrity.

Děkuji za pozornost

