



**Katedra matematiky
PF UJEP**



Aritmetika s didaktikou II.

KM1 / 0026

Přednáška 11

Iracionální a reálná čísla

O čem budeme hovořit:

- Existence čísel, která nejsou racionální
- Vlastnosti iracionálních a reálných čísel

Hierarchie číselných struktur

Reálná čísla ($\mathbb{R}$, + , .)

Racionální čísla ($\mathbb{Q}$, + , .)

Desetinná čísla ($\mathbb{D}$, + , .)

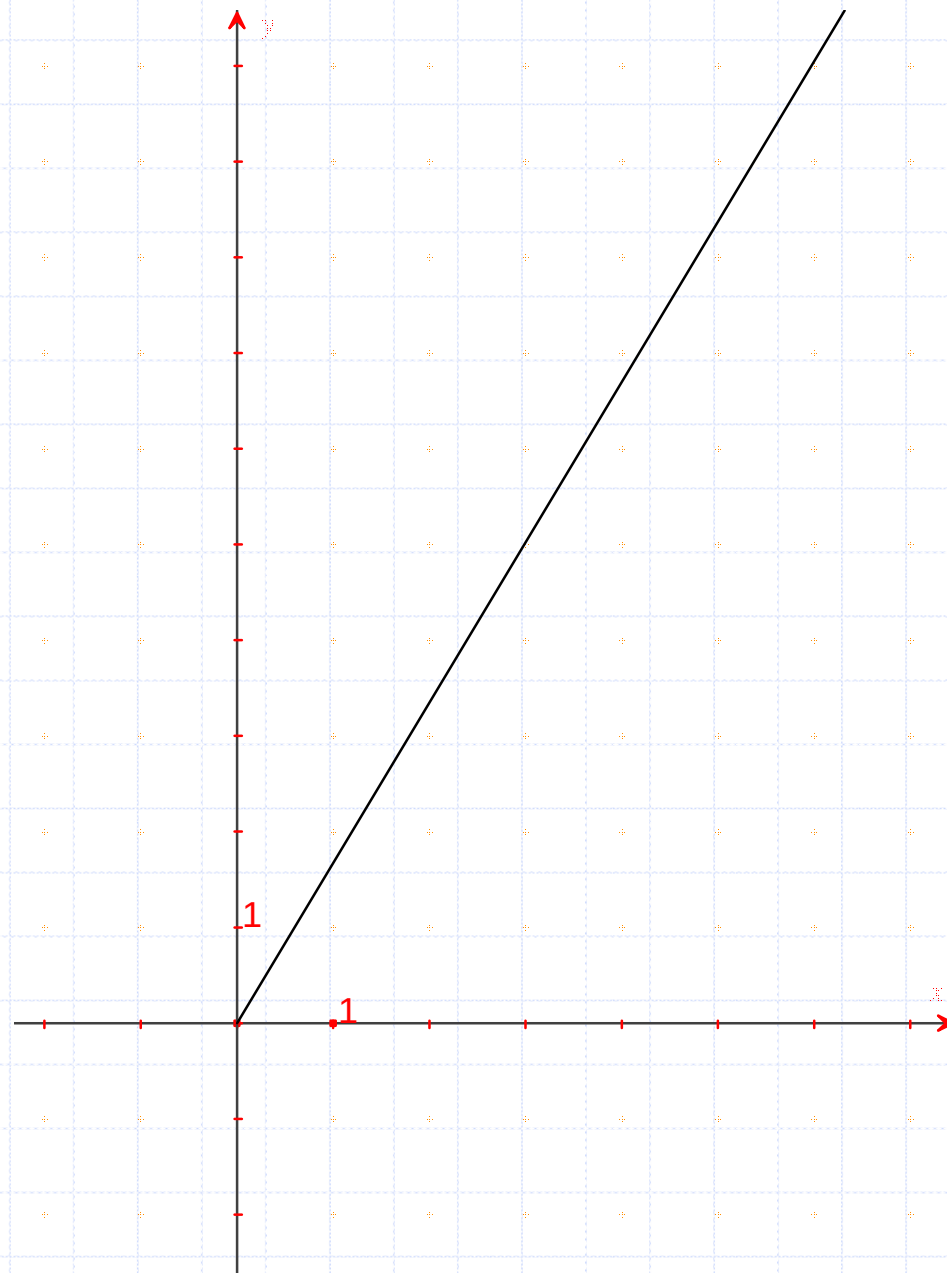
Celá čísla ($\mathbb{Z}$, + , .)

Přirozená čísla ($\mathbb{N}_0$, + , .)

Příklady iracionálních čísel

Problém

Existuje nějaká
přímka, která
prochází počátkem
souřadnic, ale
kromě něj již
žádným dalším
mřížovým bodem?



Podívejme se na to názorně !

Iracionalita odmocniny z pěti.fig

Dokažme, že uvažovaná polopřímka
neprochází kromě počátku již žádným
mřížovým bodem !

Budeme potřebovat jen větu, že každé
přirozené číslo větší než 1 lze jednoznačně
rozložit na součin prvočísel.

Příklad iracionálního čísla, tedy takového čísla, které není racionální

Předpokládejme, že platí: $\sqrt{5} = \frac{p}{q} \wedge D(a,b)=1$

Pak postupně získáme: $p^2 = 5 \cdot q^2$

$$p = 5 \cdot k$$

Dosazením máme: $25 \cdot k^2 = 5 \cdot q^2$

$$q^2 = 5 \cdot k^2$$

$$q = 5 \cdot l$$

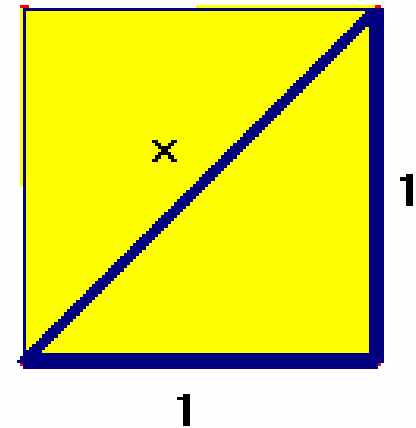
To je ale spor s tím, že čísla p, q jsou nesoudělná!

Závěr: odmocnina z pěti není racionální číslo!

Úhlopříčka ve čtverci

Označíme-li velikost strany čtverce 1 a velikost jeho úhlopříčky x , pak platí $1^2 + 1^2 = x^2$, tedy

$$x = \sqrt{2}$$



O tomto čísle lze zcela analogicky dokázat, že není racionálním číslem!

Tento fakt byl znám již pythagorejčům a dokonce z něj učinili „státní tajemství“!

Zkoumejme funkci $y = 2^x$

Hodnoty této funkce můžeme tabelovat:

x	0	1	2	3	4	5	
y	1	2	4	8	16	32	...

Pro hodnoty platí tento vzorec:

$$2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b$$

Rozšířme platnost tohoto vzorce na všechna čísla ze **Z** !

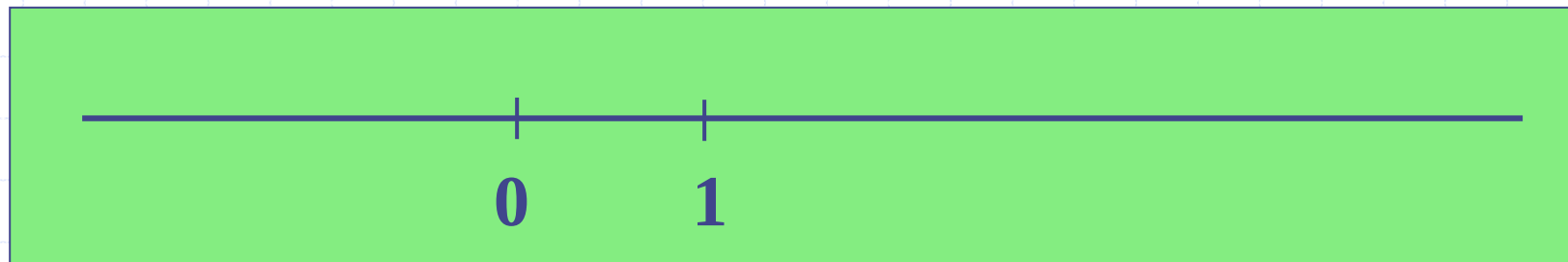
Co pak platí?

Rozšířme platnost tohoto vzorce na všechna čísla z **Q** !

Co pak například platí?

Vlastnosti iracionálních a reálných čísel

Číselná osa a její struktura



Jaká je naše představa **přirozených** čísel?

Jaká je naše představa **celých** čísel?

Jaká je naše představa **racionálních** čísel?

Co znamená, že **uspořádání $\mathbb{Q}$ je husté**?

Kromě bodů, které odpovídají racionálním číslům, jsou na ose ještě body odpovídající **iracionálním** číslům.

Každý bod číselné osy odpovídá reálnému číslu.

Řezy v množině racionálních čísel

Každý bod X číselné osy, který neodpovídá žádnému racionálnímu číslu, rozdělí množinu Q na dvě disjunktní části:
na množinu čísel menších (vlevo od X)
a na množinu čísel větších (vpravo od X).

Takovým dvěma číselným podmnožinám Q se říká **řez**.

Příklad: $A = \{x \in Q ; x^2 < 5\}$

$B = \{x \in Q ; x^2 > 5\}$

Dvojice množin $(A ; B)$ tvoří řez v Q .

Teorie iracionálních čísel se buduje jako teorie řezů.

Nejmenší a největší číslo množiny (říká se jim též minimum a maximum)

Jaké je nejmenší a největší číslo $\mathbb{N}_0$?

Minimum je číslo 0 a maximum neexistuje.

Jaké je nejmenší a největší číslo $\mathbb{Z}$?

Minimum ani maximum neexistuje.

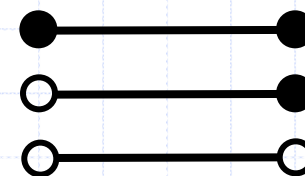
Jaké je nejmenší a největší číslo $\mathbb{Q}$?

Minimum ani maximum neexistuje.

Má množina kladných racionálních čísel nejmenší a největší číslo ?

Ani minimum ani maximum neexistuje.

Infimum a supremum množiny



Obsah těchto pojmů objasníme na příkladech:

$$\min [0;1] = 0$$

$$\max [0;1] = 1$$

$$\inf [0;1] = 0$$

$$\sup [0;1] = 1$$

$\min (0;1]$ neexistuje

$$\max (0;1] = 1$$

$$\inf (0;1] = 0$$

$$\sup (0;1] = 1$$

$\min (0;1)$ neexistuje

$\max (0;1)$ neexistuje

$$\inf (0;1) = 0$$

$$\sup (0;1) = 1$$

Každá neprázdná a omezená množina reálných čísel má infimum a supremum.

Úplnost operací sčítání a násobení na množinách racionálních a iracionálních čísel

Součet i součin dvou čísel z $\mathbf{Q}$ je číslo z $\mathbf{Q}$.

Jaký je součet (součin) racionálního a iracionálního čísla?
 $\mathbf{r + i = ? \quad r \cdot i = ?}$

Výsledky nemohou být racionální. Proč?

Je tu ale jedna výjimka. Která?

Součet čísla z $\mathbf{Q}$ a čísla z $\mathbf{I}$ je číslo z $\mathbf{I}$.

Součin nenulového čísla z $\mathbf{Q}$ a čísla z $\mathbf{I}$ je číslo z $\mathbf{I}$.

Součet i součin dvou čísel z $\mathbf{I}$ může být jak číslo z $\mathbf{Q}$, tak číslo z $\mathbf{I}$. Vymyslete vhodné příklady!

Algebraické vlastnosti struktury $(R, +, \cdot)$

- Obě operace jsou úplné, komutativní, asociativní a mají neutrální prvky v R .
- Operace sčítání má inverzní prvky v R , operace násobení má (s výjimkou nuly) inverzní prvky v R .
- Operace násobení je distributivní vzhledem ke sčítání v R .

Struktura $(R, +, \cdot)$ je komutativní těleso.

Kardinalita iracionálních a reálných čísel

Již víme, že platí:

$$\text{card } \mathbf{N}_0 = \text{card } \mathbf{Z} = \text{card } \mathbf{Q} = \aleph_0$$

$$\text{card } \mathbf{R} = \aleph_1$$

Z faktu $\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset \wedge \mathbf{Q} \cup \mathbf{I} = \mathbf{R}$ plyne,

že $\text{card } \mathbf{Q} + \text{card } \mathbf{I} = \text{card } \mathbf{R},$

tedy $\aleph_0 + \text{card } \mathbf{I} = \aleph_1.$

Odtud plyne, že musí být

$$\text{card } \mathbf{I} = \aleph_1.$$

Desetinné rozvoje reálných čísel

Desetinné rozvoje reálných čísel jsou trojího druhu:

ukončené (0,125)

– to jsou desetinná čísla,

nekonečné periodické (0,25731731731.....)

– to jsou racionální nedesetinná čísla,

nekonečné neperiodické (3,1415926.....)

– to jsou iracionální čísla.

Aproximace reálných čísel

Hodnotu každého reálného čísla můžeme přibližně vyjádřit (s libovolnou přesností) racionálním číslem, resp. i desetinným číslem.

Příklad:

$$3,1 < \pi < 3,2$$

$$3,14 < \pi < 3,15$$

$$3,141 < \pi < 3,142$$

$$3,1415 < \pi < 3,1416$$

$$3,14159 < \pi < 3,14160$$

atd.

Děkuji za pozornost

