



**U3V**

**Matematika**

**Semestr 1**

**Přednáška 02**

**Matematika a hudební harmonie**

**Učíme se opět od starých Řeků**

# Jaké problémy z historie matematiky si dnes vybereme?



- Různé průměry a jejich vlastnosti
- Různé posloupnosti čísel
- Exponenciální funkce a nepřímá úměrnost
- Pythagorejská harmonie v dur a moll

# **Chvála průměrnosti**

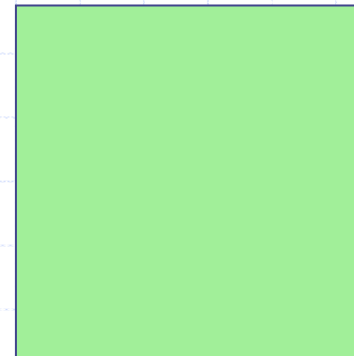
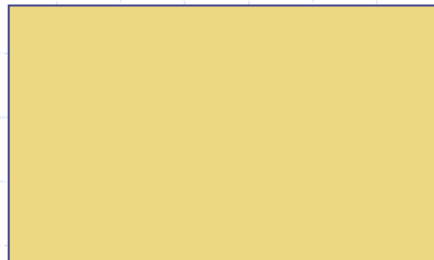
## **Základní potřebná fakta**

# Nejdříve nějaké jednoduché úlohy

Je dán obdélník, jehož strany mají délky **a**, **b**.

Vypočítejte délku strany čtverce, který má:

- stejný **obvod** jako daný obdélník,
- stejný **obsah** jako daný obdélník,
- stejný **poměr obsahu a obvodu** jako daný obdélník.



# Jak se počítají průměry?

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2}$$

aritmetický

$$G(a,b) = \sqrt{a \cdot b}$$

geometrický

$$H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$$

harmonický

Snadno lze dokázat, že platí:

$$0 < a < b \Rightarrow a < H(a,b) < G(a,b) < A(a,b) < b$$

Jak to znázornit geometricky?

[Průměry.fig](#)

# Zajímavé poměry mezi průměry

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2}$$

$$G(a,b) = \sqrt{a \cdot b}$$

$$H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$$

Pohledem na definice zjistíme, že platí:

$$A(a,b) \cdot H(a,b) = G(a,b) \cdot G(a,b) = a \cdot b$$

**Jaké vztahy z toho lze odvodit?**

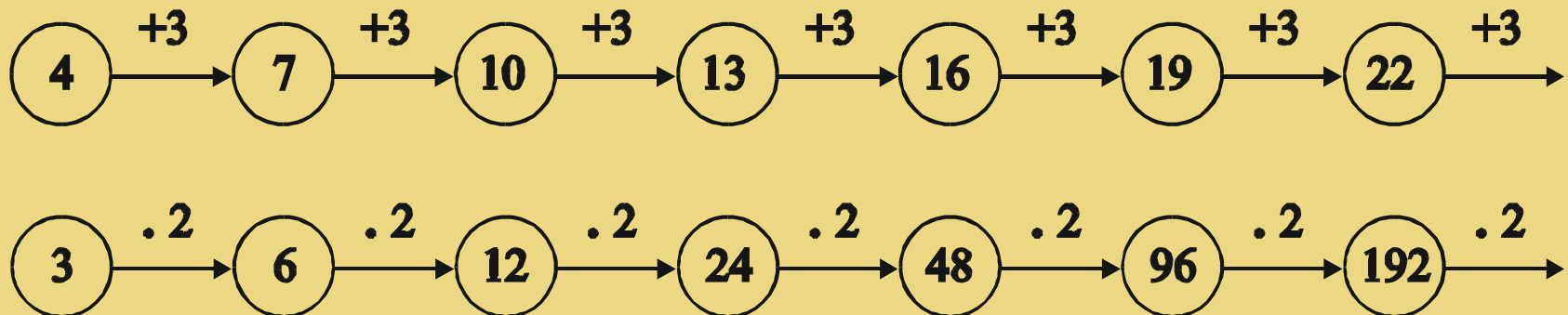
# Aritmetické a geometrické posloupnosti

Jak se vytvářejí tyto posloupnosti?

Stačí znát první člen a „výtvarný zákon“:

u **aritmetické** se neustále **přičítá jisté číslo**,

u **geometrické** se neustále **násobí jistým číslem**.



# Jak souvisí posloupnosti s průměry?

Soustřed'me se na tři po sobě jdoucí členy!  
Jak vypočítat prostřední z nich pomocí obou krajních?

Aritmetická:

$$a - d, a, a + d$$

Geometrická:

$$a / q, a, a \cdot q$$

Posloupnost vytvořená pomocí vztahu  
se nazývá harmonická.

$$y = k / x$$

**Proč asi?**

# Konstrukce zajímavé funkce

Vytvořme funkci, kde hodnoty **nezávisle** proměnné tvoří **aritmetickou** posloupnost a jim odpovídající hodnoty **závisle** proměnné tvoří **geometrickou** posloupnost.

Například:

|   |   |   |   |    |    |    |     |
|---|---|---|---|----|----|----|-----|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | ... |
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | ... |

**Jaké vlastnosti tato funkce má?**

[aritm a geom posl.xls](#)

## Co plyne ze základní vlastnosti této funkce?

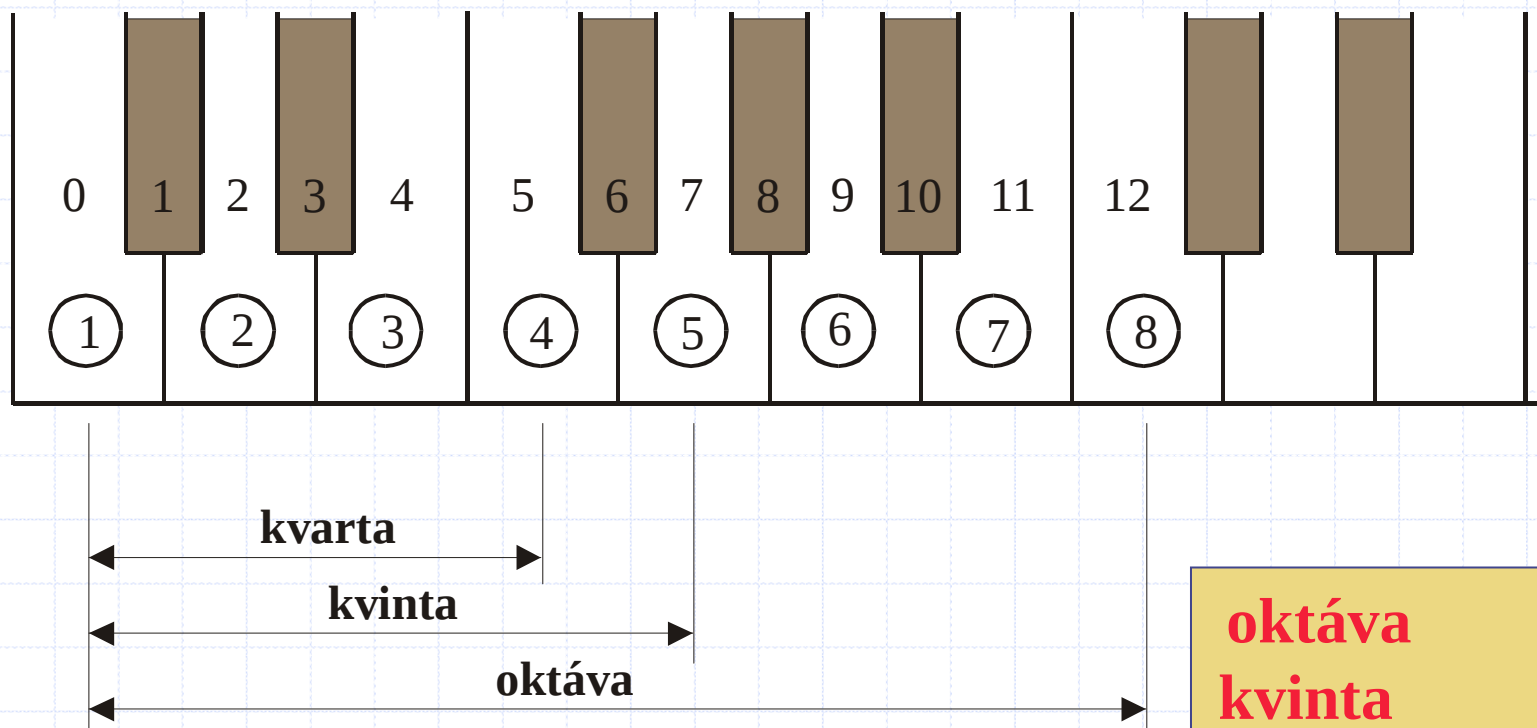
Funkce je popsána rovnicí  $y = 2^x$ , je definovaná na množině všech **reálných čísel** a pro libovolná  $x, y$  platí, že

$$2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y .$$

**Budeme jen usuzovat, co ze základní rovnice plyne, když budeme „šikovně“ volit hodnoty  $x$  a  $y$  !**

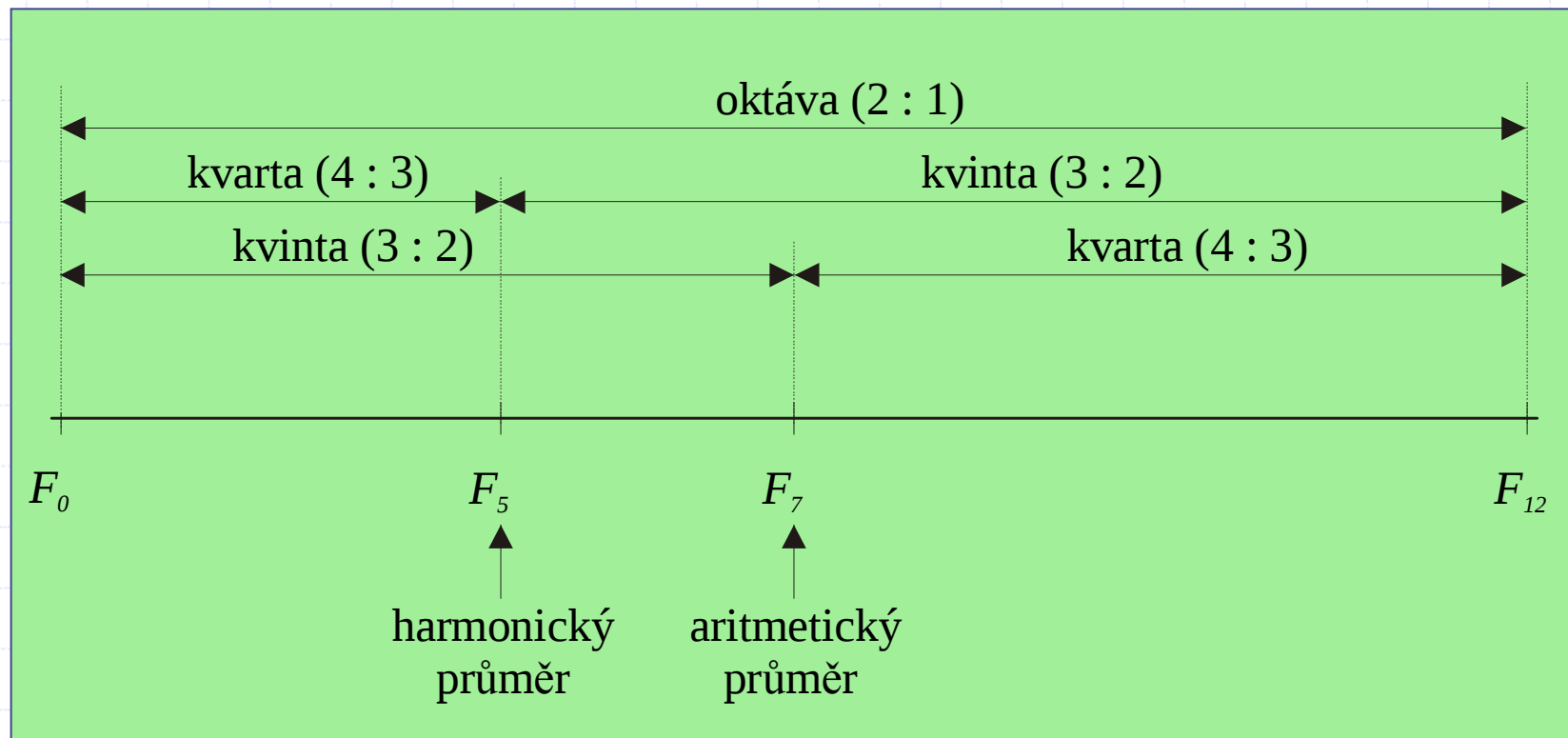
# Počítání harmonie

# Poměry frekvencí tónů stanovené ve starém Řecku:



|                     |              |
|---------------------|--------------|
| <b>oktáva</b>       | <b>2 : 1</b> |
| <b>kvinta</b>       | <b>3 : 2</b> |
| <b>kvarta</b>       | <b>4 : 3</b> |
| <b>velká tercie</b> | <b>5 : 4</b> |
| <b>malá tercie</b>  | <b>6 : 5</b> |

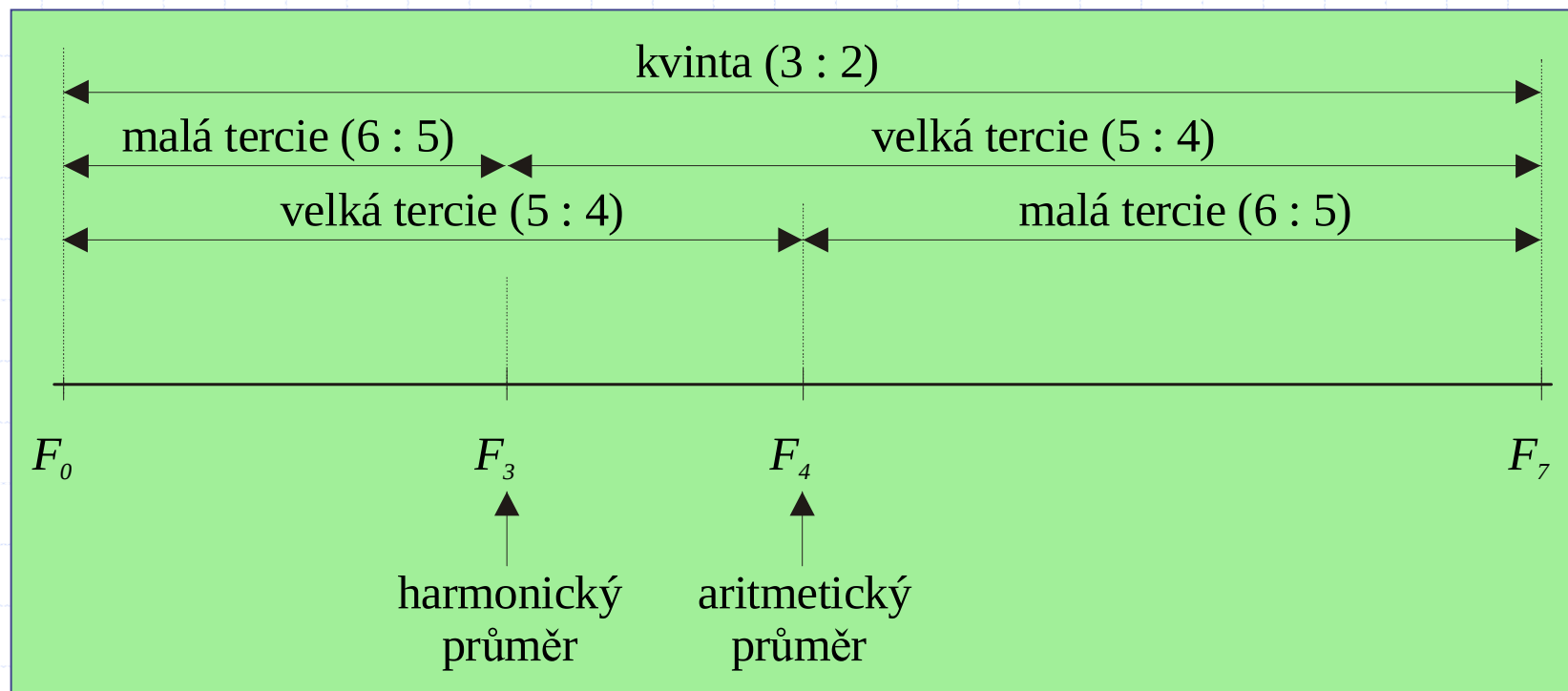
# Jak dělili pythagorejci oktávu?



$$H(1,2) = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{1 + 2} = \frac{4}{3}$$

$$A(1,2) = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2}$$

# Jak dále dělili kvintu?



$$H(1, \frac{3}{2}) = \frac{2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{3}{\frac{5}{2}} = \frac{6}{5}$$

$$A(1, \frac{3}{2}) = \frac{1 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{\frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{4}$$

# Jak počítat durové a mollové kvintakordy?

Kvintakord se skládá se ze tří tónů.

První a třetí tón tvoří kvintu (7 půltónů).

Prostřední druhý tón tvoří s oběma krajními tercie.

Pak jsou dvě možnosti:

***Dur***      velká tercie (4 půltóny) - malá tercie (3 půltóny)

***Moll***     malá tercie (3 půltóny) - velká tercie (4 půltóny)

# Co je to temperované ladění?

Výpočty frekvencí tónů u temperovaného ladění vycházejí z tohoto předpokladu:

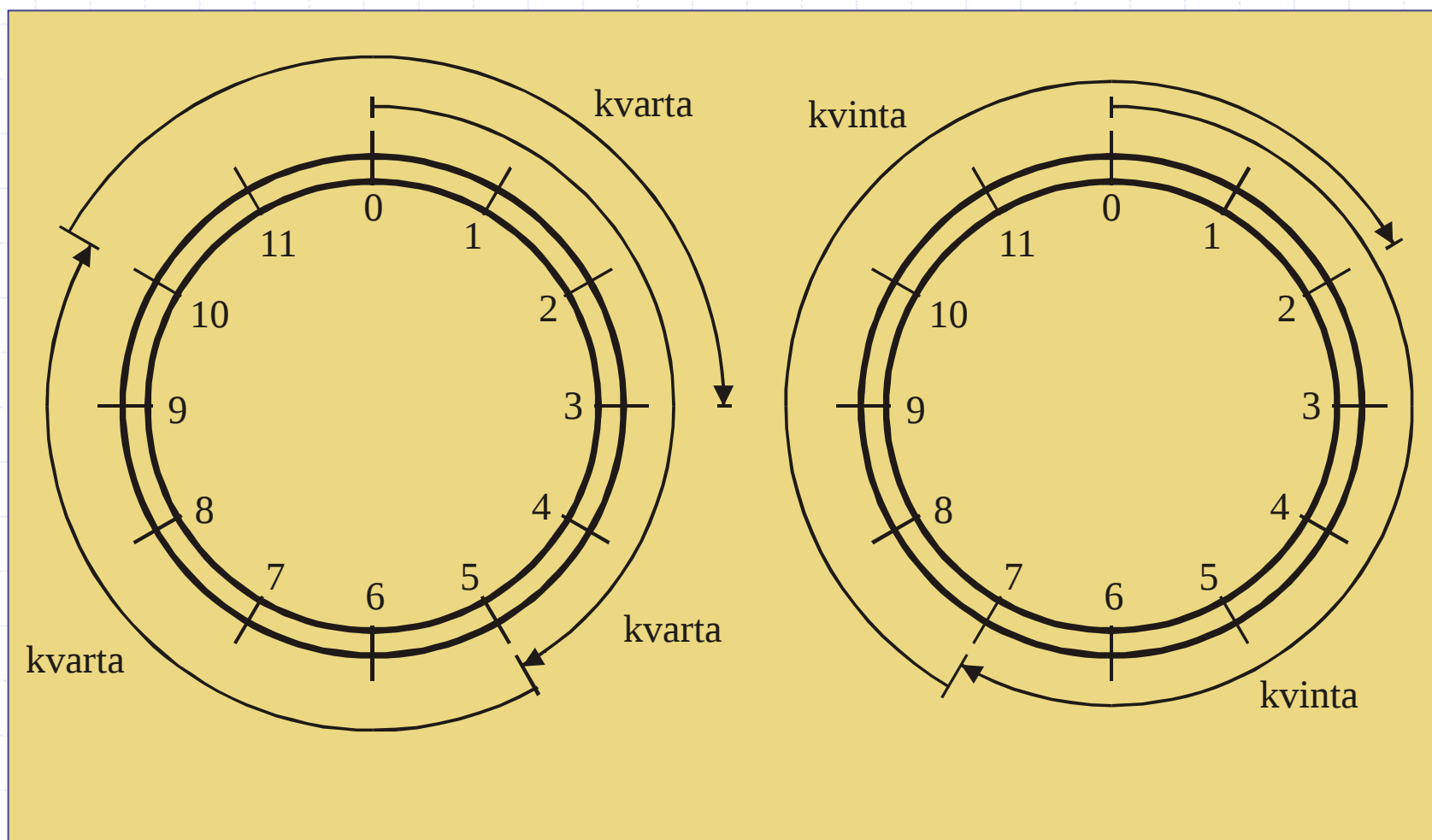
**Frekvence jednotlivých po sobě jdoucích tónů tvoří geometrickou posloupnost.**

[Temperované ladění.xls](#)

[Harmonie.xls](#)

# Řetězce kvart a kvint

# Jak můžeme jinak počítat frekvence?



# Jaké jsou výsledky?

| Počet půltónů | Jméno intervalu | Frekvence z kvart               | Frekvence z kvint               |
|---------------|-----------------|---------------------------------|---------------------------------|
| 0             | prima           | $2^0 : 3^0 = 1,000$             | $3^0 : 2^0 = 1,000$             |
| 1             | malá sekunda    | $2^8 : 3^5 \approx 1,053$       | $3^7 : 2^{11} \approx 1,068$    |
| 2             | velká sekunda   | $2^{16} : 3^{10} \approx 1,110$ | $3^2 : 2^3 \approx 1,125$       |
| 3             | malá tercie     | $2^5 : 3^3 \approx 1,185$       | $3^9 : 2^{14} \approx 1,201$    |
| 4             | velká tercie    | $2^{13} : 3^8 \approx 1,249$    | $3^4 : 2^6 \approx 1,266$       |
| 5             | kvarta          | $2^2 : 3^1 \approx 1,333$       | $3^{11} : 2^{17} \approx 1,352$ |
| 6             | triton          | $2^{10} : 3^6 \approx 1,405$    | $3^6 : 2^9 \approx 1,424$       |
| 7             | kvinta          | $2^{18} : 3^{11} \approx 1,480$ | $3^1 : 2^1 \approx 1,500$       |
| 8             | malá sexta      | $2^7 : 3^4 \approx 1,580$       | $3^8 : 2^{12} \approx 1,602$    |
| 9             | velká sexta     | $2^{15} : 3^9 \approx 1,665$    | $3^3 : 2^4 \approx 1,687$       |
| 10            | malá septima    | $2^4 : 3^2 \approx 1,778$       | $3^{10} : 2^{15} \approx 1,802$ |
| 11            | velká septima   | $2^{12} : 3^7 \approx 1,873$    | $3^5 : 2^7 \approx 1,898$       |
| 12            | oktáva          | $2^{20} : 3^{12} \approx 1,973$ | $3^{12} : 2^{18} \approx 2,027$ |

## Co je to pythagorejské comma, ptolemaiovské comma a schizma?

Vypočítejte poměry frekvencí z kvint a kvart  
pro jednotlivé tóny mimo primy a oktávy!

Jaký výsledek jste obdrželi?

Vypočítejte pro malou tercii poměry tří hodnot,  
které jsme již získali:

$$2^5 : 3^3 \approx 1,185$$

$$6 : 5 \approx 1,200$$

$$3^9 : 2^{14} \approx 1,201$$

# Jak se ladí kytara?

Jednotlivé struny od nejnižší k nejvyšší jsou:

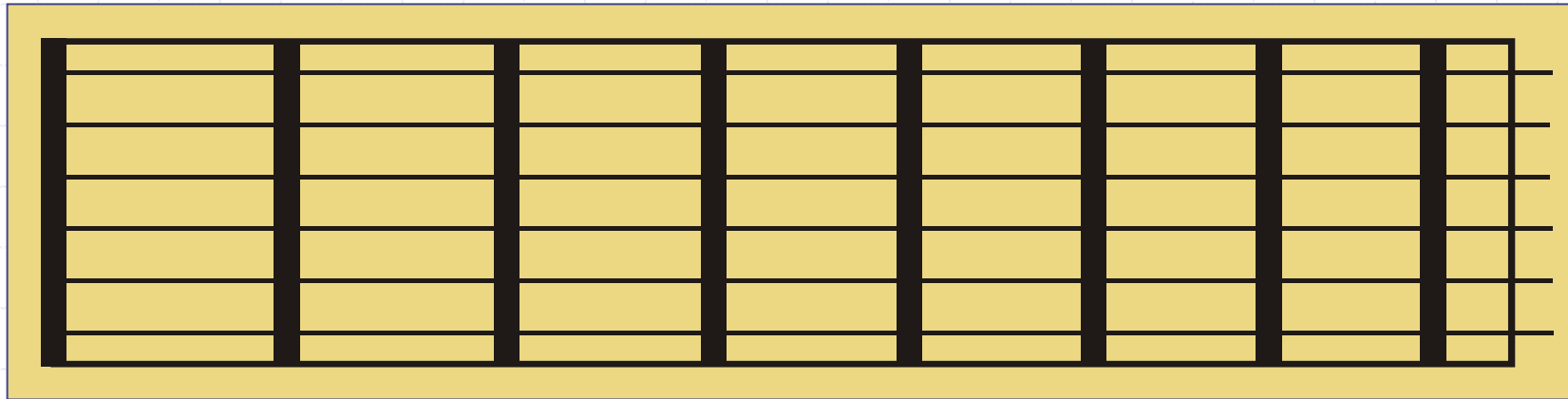
*e , a , d , g , h , e .*

Příslušné intervaly mezi nimi jsou tedy:

**kvarta, kvarta, kvarta, velká tercie, kvarta.**

Jaké chyby při ladění se dopustíme, když budeme ladit čistě?

# Jak dlouhé jsou pražce na kytáře?



Co plyne z faktu, že součin délky struny a frekvence jejího tónu je konstantní?

**Děkuji vám za pozornost.**

