



U3V

Matematika

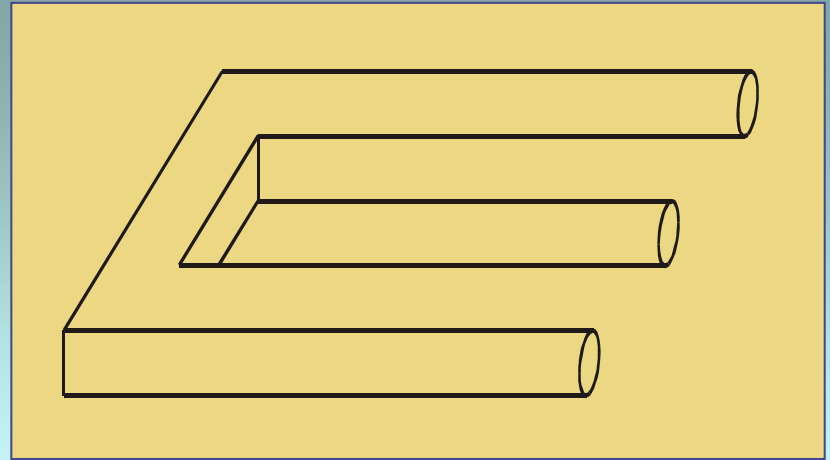
Semestr 1

Přednáška 03

Platónská a archimédovská tělesa

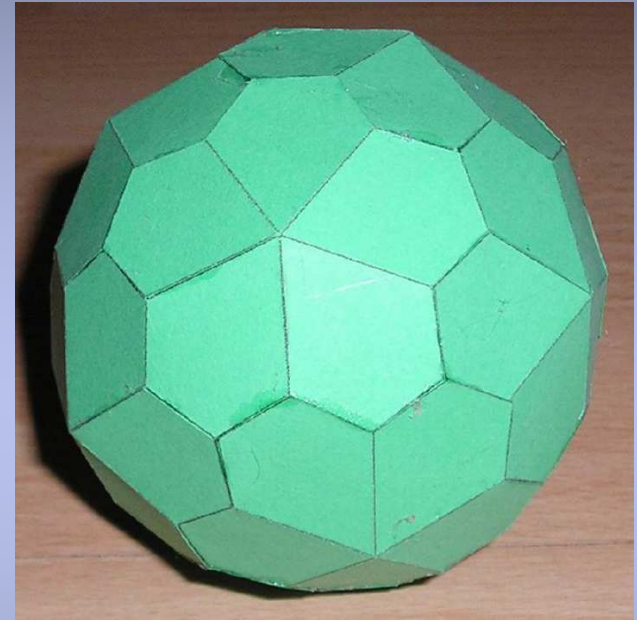
A zase jsme u starých Řeků!

Jaké problémy si vybereme pro tuto přednášku?



- Odvodíme tzv. Eulerovu větu, což je vztah mezi počty vrcholů, stěn a hran jednoduchých těles.
- Pomocí Eulerovy věty se naučíme konstruovat modely pravidelných a „skoropravidelných“ těles.

Co platí o V, S, H?



Vyvození Eulerovy věty

Úvodní experimenty

[hranol.fig](#)

[hranol-n.fig](#)

Představujme si n-boké jehlany a hranoly.

Zjišťujme, kolik mají vrcholů (V), stěn (S) a hran (H).

n	Jehlany			Hranoly		
	V	S	H	V	S	H
3						
4						
5						
6						
n						

Co nám říká Eulerova věta?

Necht' je dáno libovolné jednoduché těleso.

Počet jeho vrcholů označme V ,

počet jeho stěn označme S ,

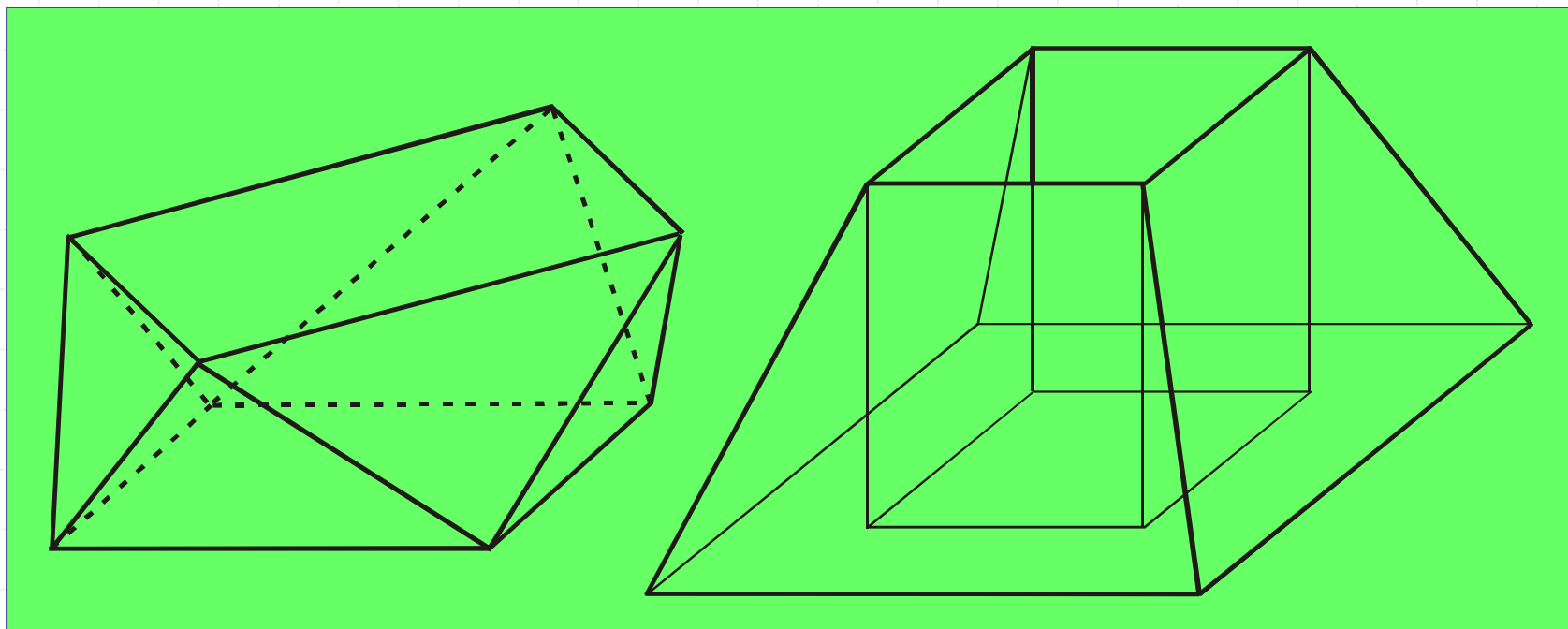
a počet jeho hran označme H .

Tato tři čísla spolu souvisejí vztahem, který se nazývá **Eulerova věta**.

$$V + S = H + 2$$

Další ověřování Eulerovy věty

Tvrzení Eulerovy věty $V + S = H + 2$ můžeme ověřovat i na dalších tělesech (antihranoly, atd.). Podstatné je též ukázat, že u některých těles (třeba těles s „dírou“) Eulerova věta neplatí.

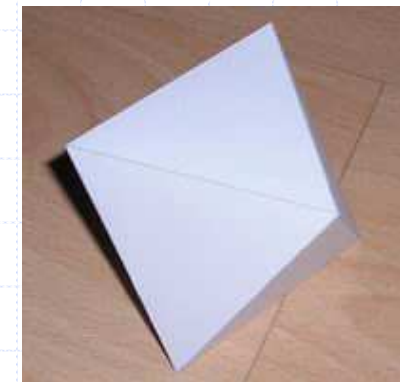
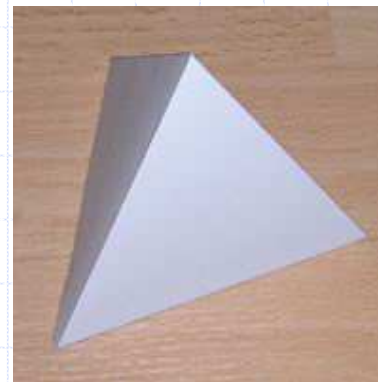
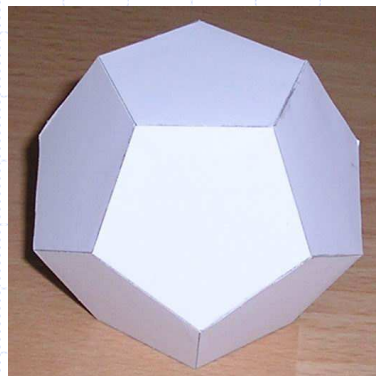
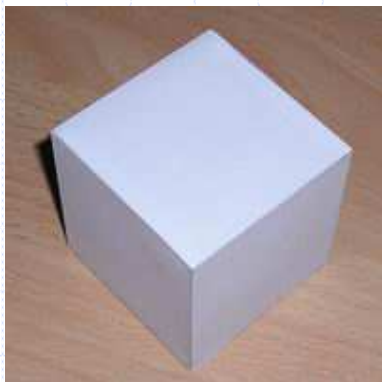
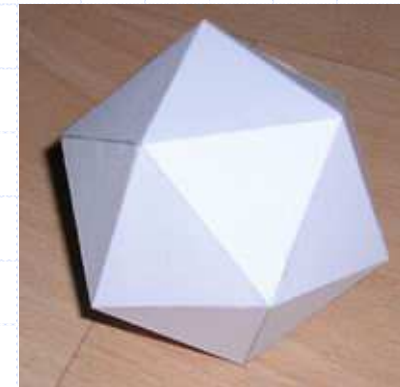


Platónská tělesa

Jaká tělesa budeme nazývat platónská?

Definice:

- Povrch těchto těles se skládá z navzájem shodných pravidelných n -úhelníků.
- V každém vrcholu tělesa se stýká stejný počet těchto n -úhelníků.



Kolik je všech platónských těles?

Jak velké jsou vnitřní úhly v pravidelném n -úhelníku? [mnohoúhelníky.fig](#)

Proč je jen pět platónských těles?

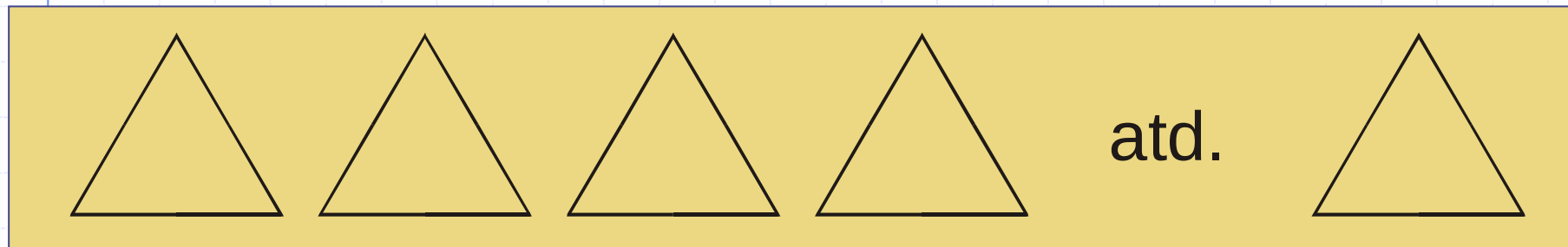
Z velikostí vnitřních úhlů v pravidelných n -úhelnících vyplývá, že v jednom vrcholu se mohou stýkat:

- 3 nebo 4 nebo 5 rovnostranných trojúhelníků,
- 3 čtverce,
- nebo 3 pravidelné pětiúhelníky.

Jak konstruovat platónská tělesa?

Představme si, že stavíme model platónského tělesa, kde se **v každém vrcholu stýká pět rovnostranných trojúhelníků**.

Složíme ho z S „rozpojených“ trojúhelníků (S je neznámé):



Kolik mají tyto trojúhelníky vrcholů?

Kolik vrcholů těchto trojúhelníků se při lepení modelu spojí do jednoho vrcholu tělesa?

Jak vyjádříme počet vrcholů V ?

Kolik mají tyto trojúhelníky stran?

Kolik stran těchto trojúhelníků se při lepení modelu spojí do jedné hrany tělesa?

Jak vyjádříme počet hran H ?

Co dostaneme dosazením do Eulerovy věty?

Počet vrcholů **V** a počet hran **H** jsme vyjádřili těmito vztahy:

$$V = \frac{3S}{5}$$

$$H = \frac{3S}{2}$$

$$V + S = H + 2$$

$$\frac{3S}{5} + S = \frac{3S}{2} + 2$$

$$6.S + 10.S = 15.S + 20$$

$$S = 20$$

$$V = \frac{3.S}{5} = 12$$

$$H = \frac{3.S}{2} = 30$$

Toto těleso se nazývá **pravidelný dvacetistěn**.
Má 20 stěn, 12 vrcholů a 30 hran.



Přehled platónských těles

Název tělesa	V	S	H
pravidelný čtyřstěn	4	4	6
pravidelný šestistěn (krychle)	8	6	12
pravidelný osmistěn	6	8	12
pravidelný dvanáctistěn	20	12	30
pravidelný dvacetistěn	12	20	30

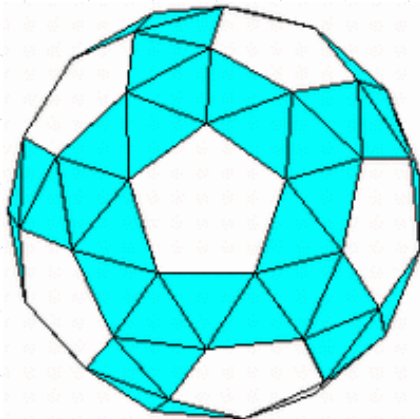
Že existuje pouze pět platónských těles věděl již Eukleides.

Archimédovská tělesa

Jaká tělesa budeme nazývat archimédovská?

Definice:

- Povrch těchto těles se skládá z několika typů pravidelných n -úhelníků.
- V každém vrcholu tělesa se stýká stejná konfigurace těchto n -úhelníků.

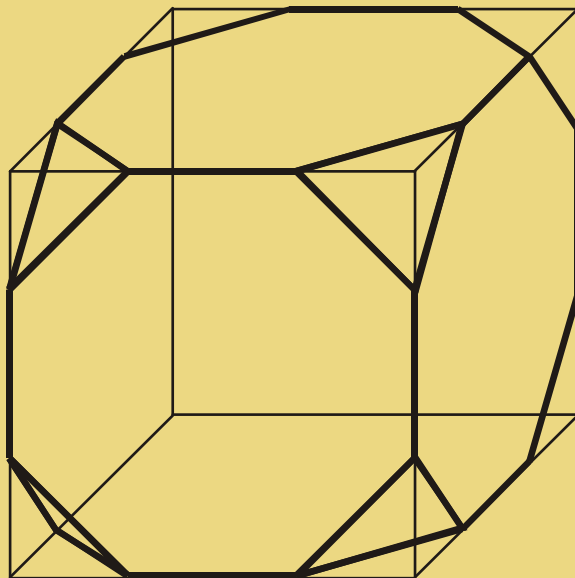


Vznik některých archimédovských těles

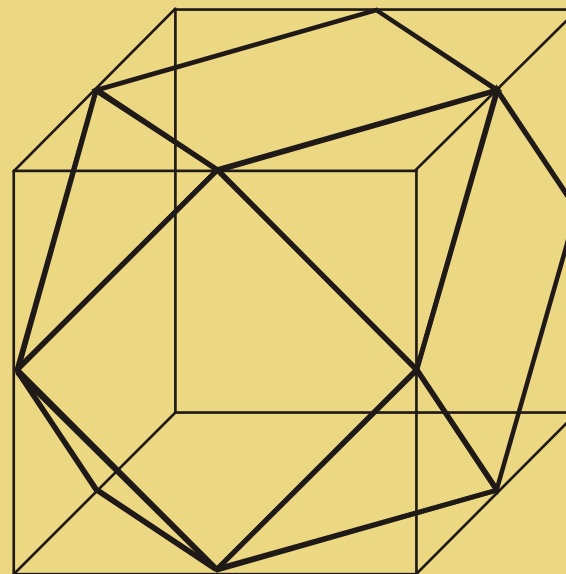
Některá archimédovská tělesa můžeme vytvořit z platónských těles tak, že použijeme metodu „**ořezávání vrcholů**“.

Ukažme si tuto metodu na krychli:

1



2



Co vznikne ořezáním dvacetistěnu?

Jaká ploška vznikne uříznutím každého vrcholu?

(Stýká se tam pět trojúhelníků.)

Jaký mnohoúhelník vznikne z každé trojúhelníkové stěny dvacetistěnu, když uřízneme všechny vrcholy?

Kolik a jakých má vzniklé těleso stěn?

12 pětiúhelníků a 20 šestiúhelníků, celkem 32

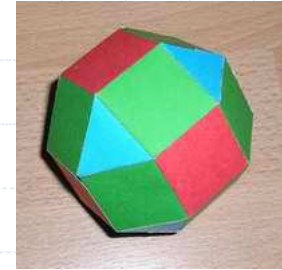
Kolik má nové těleso vrcholů? $12 \cdot 5 = 60$

Kolik má nové těleso hran? $30 + 12 \cdot 5 = 90$

Ověřte správnost výpočtu Eulerovou větou!



Jak „počítat“ archimédovská tělesa?



Vypočítejme, kolik čtverců a kolik rovnostranných trojúhelníků je třeba k výrobě modelu na obrázku.

počet čtverců x

počet trojúhelníků y

Pak platí:

$$V = \frac{4x + 3y}{4}$$

$$S = x + y$$

$$H = \frac{4x + 3y}{2}$$

Dosazením do EV získáme, že $y = 8$.

Pohledem na vrcholy tělesa zjistíme, že vrcholů čtverců je třikrát více než vrcholů trojúhelníků, a tedy $x = 18$.

K výpočtům parametrů archimédovských těles stačí tedy jen umět řešit soustavy rovnic.

Přehled archimédovských těles

		Dva typy mnohoúhelníků			Tři typy
Počet stěn, které se stýkají v jednom vrcholu	3	4 4 n	3 8 8	4 6 6	4 6 8
		3 6 6	3 10 10	5 6 6	4 6 10
	4	3 3 3 n	3 5 3 5		4 3 4 5
		3 4 3 4	3 4 4 4		
	5	3 3 3 3 4			
		3 3 3 3 5			

Děkuji za pozornost

