



U3V

Matematika

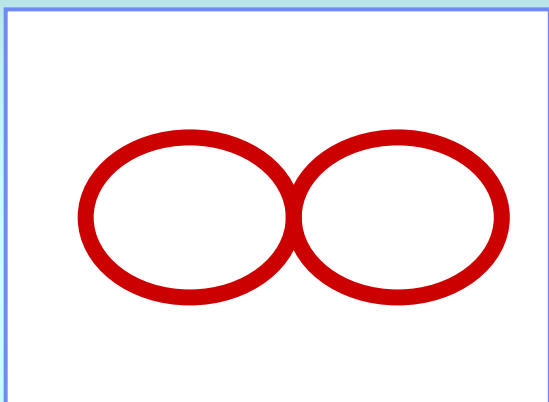
Semestr 1

Přednáška 04

Trápení s nekonečnem

Vyjdeme od starých Řeků,
ale půjdeme až do dvacátého století!

Jakými problémy se dnes budeme zabývat?



*Motto:
Pojem **nekonečno**
je jedním z
nejtajemnějších
pojmu matematiky
a je velkým
dobrodružstvím
sledovat, jak byl
v průběhu lidského
poznání zdoláván.*

- Achilles a želva a číselné řady
- Je celek (podle Eukleida) vždy větší než jeho část?
- Kolik je vůbec nekonečen a lze s ním „počítat“?
- Množinové strašidlo. Atd.

Achilles a želva



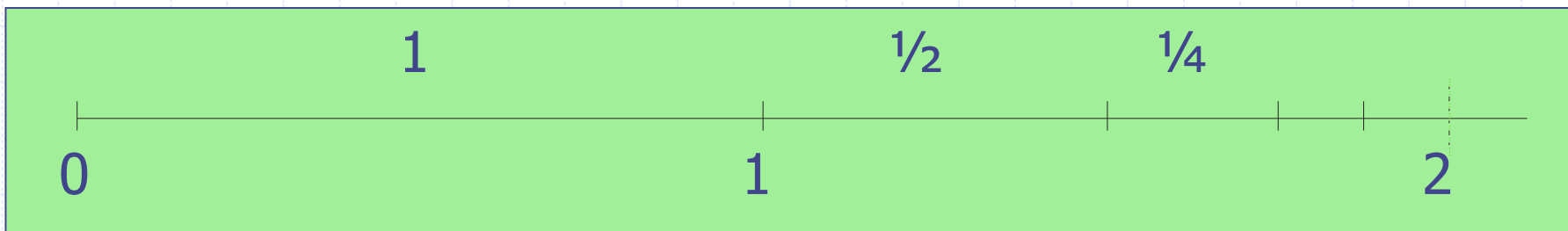
Zajímavosti o číselných řadách

Dohoní Achilles želvu?

Představme si, že Achilles (startující z bodu 0) závodí s želvou (startující z bodu 1), a přitom předpokládejme, že želva běží poloviční rychlostí, než bájný hrdina.

Je nesporné, že:

- Než Achilles doběhne do bodu 1, želva získá náskok a bude v bodě $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
- Než Achilles doběhne do bodu $\frac{3}{2}$, želva získá náskok a bude v bodě $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$.



**Zdá se tedy, že ať dělá Achilles co dělá,
nikdy želvu nedohoní. Je tomu tak doopravdy?**

Potřebujeme zřejmě sečíst nekonečně mnoho čísel:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = s$$

To půjde snadno: násobením získáme

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{1}{2}s$$

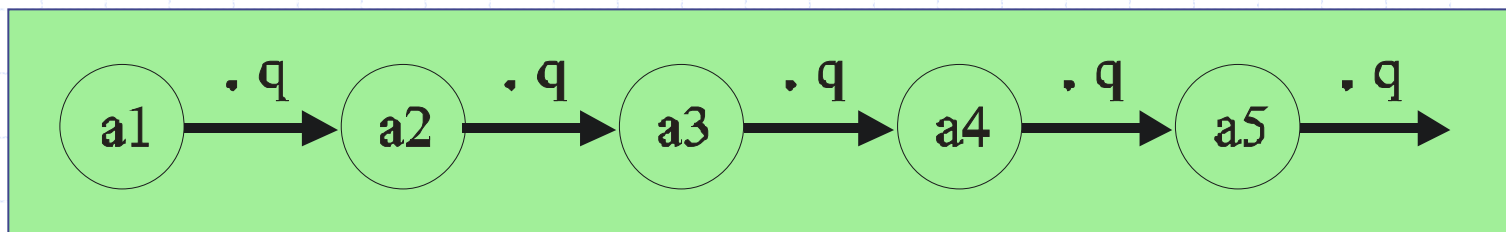
a odečtením obou vztahů pak $1 = \frac{1}{2}s$

Tedy:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 2$$

Jak sčítat nekonečnou geometrickou řadu?

Čísla geometrické posloupnosti vznikají takto:



Sečtením členů geometrické posloupnosti vznikne tzv. **geometrická řada**:

$$a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^4 + \dots = s$$

Snadno odvodíme, že platí:

$$s = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{pro } q \in (-1; 1)$$

Jaká je hodnota čísla 0,9999999... ?

Uvažujme o tomto čísle:

- Může být větší než číslo 1 ?
- Může být menší než číslo 1 ?
- Co z toho vyplývá ?

Potvrdí to výpočet:

$$0,\overline{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \dots = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

Jaký je součet harmonické řady ?

Uvažujme o tomto
nekonečném součtu:

$$s = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

$$\frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

Co z toho vyplývá?

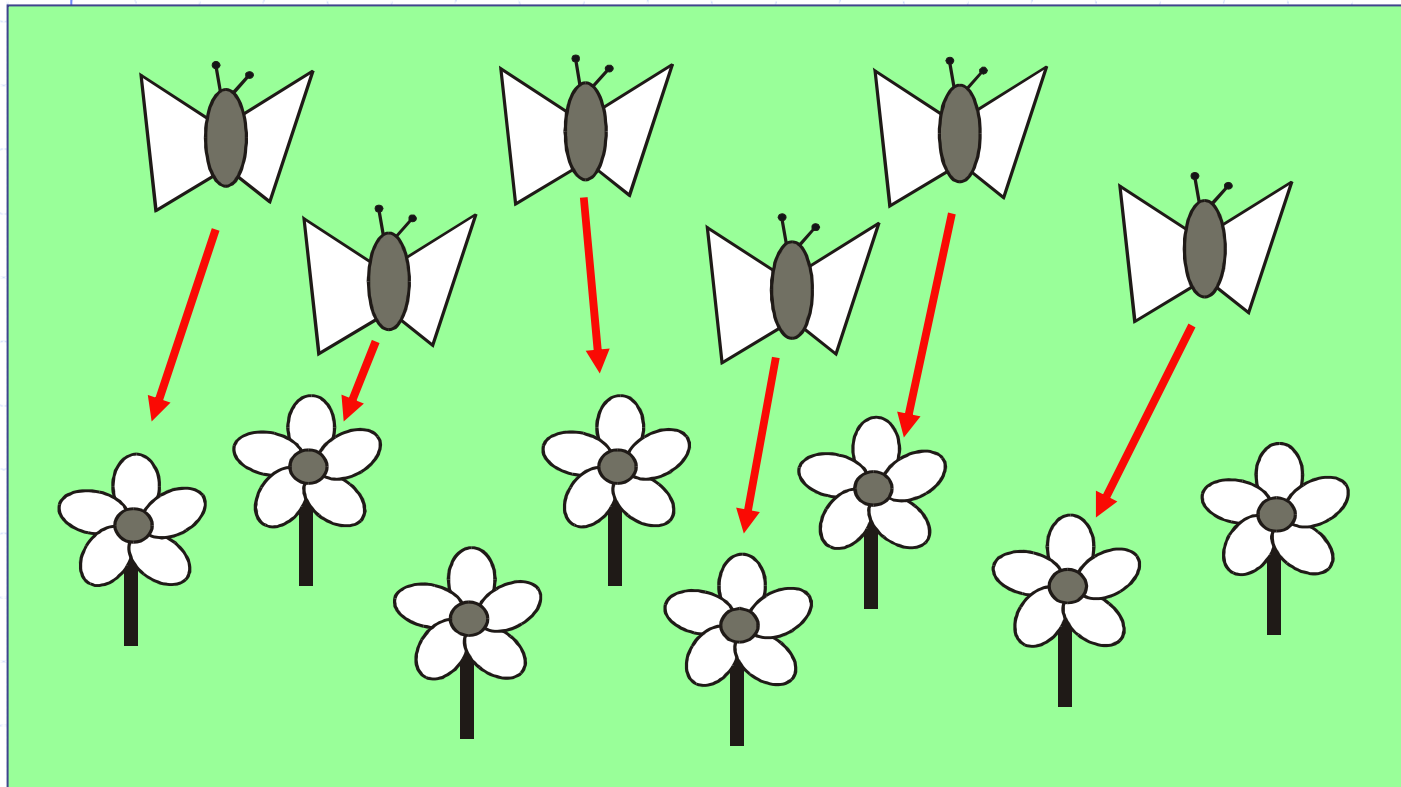
**Kolik je
nekonečen?**

Kardinální čísla



Úloha pro děti

Mohou malé děti, které ještě neumějí počítat, zjistit, zda je na obrázku více motýlků nebo více květinek nebo je jich stejně?



A jak?

Úloha pro tanečního mistra

Taneční mistr pravděpodobně umí počítat, ale vzhledem k počtu mladých slečen a pánů v sále mu to je málo platné.

Může přesto snadno zjistit, zda je v sále více slečen nebo více pánů nebo je jich stejně?

A jak?

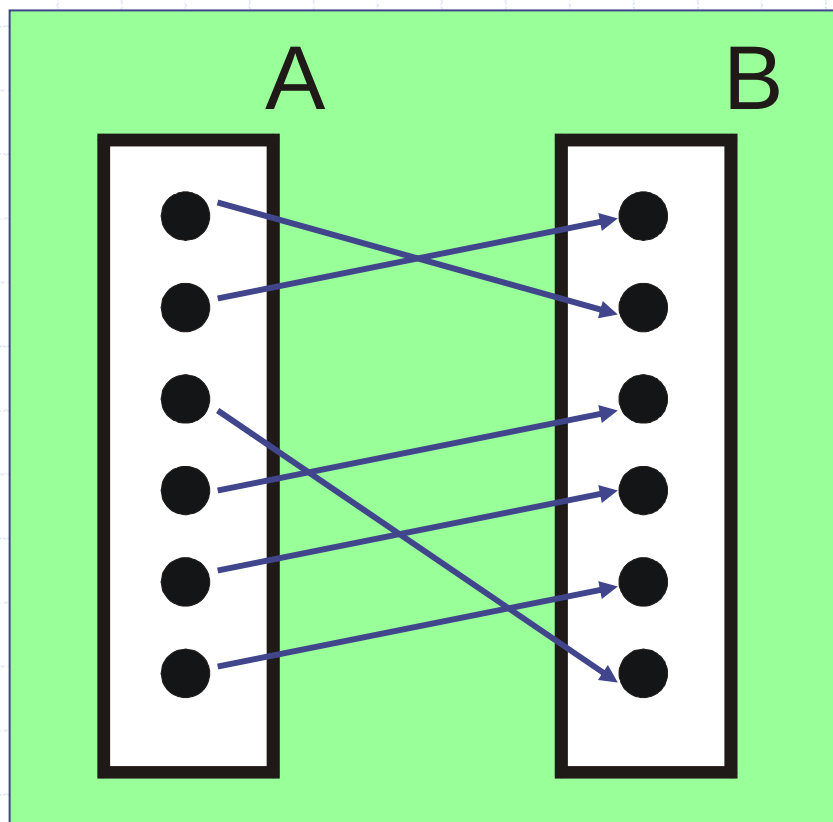


Jak poznat čeho je více a čeho méně

Množina **A** je **ekvivalentní** s množinou **B**,

když platí, že

„jejich prvky
jde spárovat“.



Takovéto množiny
mají stejné
kardinální číslo.

Příklady ekvivalentních množin

1) Ekvivalence množin $\mathbb{N}_0$ a $\mathbb{S}$:

0	1	2	3	4	5	6	...
0	2	4	6	8	10	12	...

2) Ekvivalence množin $(0,1 ; 0,2)$ a $(1 ; 2)$:

Párování provedeme takto: $x \rightarrow 10.x$

Znáte pohádku o nekonečném hotelu?

Příklady ekvivalentních množin

Následující geometrické útvary jsou **ekvivalentní** množiny bodů:

- libovolné dvě úsečky (obecně nestejně dlouhé),
- libovolné dvě polopřímky,
- libovolné dvě přímky,
- libovolné dvě kružnice,
- libovolná úsečka a libovolná přímka,
- atd.

[Ekvivalence.fig](#)

Představa kardinálních čísel

Třídy tohoto
rozkladu
budeme
nazývat
kardinálními
čísky.

...

$\aleph_1$

$\aleph_0$

...

3

2

1

0

U (univerzum, tj. třída všech množin)

Atd.

R

{1; 2; 3; 4; 5; 6; ...} , S, L ,

Atd.

{a; b; c} , {10; 2; #} ,

{a; b} , {3; 7} , { #; □ } ,

{a} , {0} , {#} , {□} ,

∅

Symbolické zápisy

Kardinální číslo množiny A budeme označovat symbolem $\text{card } A$.

Například:

$$\text{card } \{10; 2; \#\} = \text{card } \{0; 1; 2\} = 3$$

$$\text{card } \{a\} = \text{card } \{0\} = \text{card } \{\#\} = 1$$

$$\text{card } \{\} = 0$$

$$\text{card } \mathbb{N} = \aleph_0$$

U nekonečných množin může být část ekvivalentní celku !!!

Snadno dokážeme, že platí:

$$\text{card } \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} = \aleph_0$$

$$\text{card } \{3, 4, 5, \dots\} = \aleph_0$$

$$\text{card } \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\} = \aleph_0$$

Podobně v geometrii:

úsečka je ekvivalentní s přímkou, atd.

$$\aleph_0 + 100 = ???$$

$$\aleph_1 + \aleph_3 = ???$$

$$5 \cdot \aleph_1 = ???$$

$$\aleph_0 \cdot \aleph_1 = ???$$

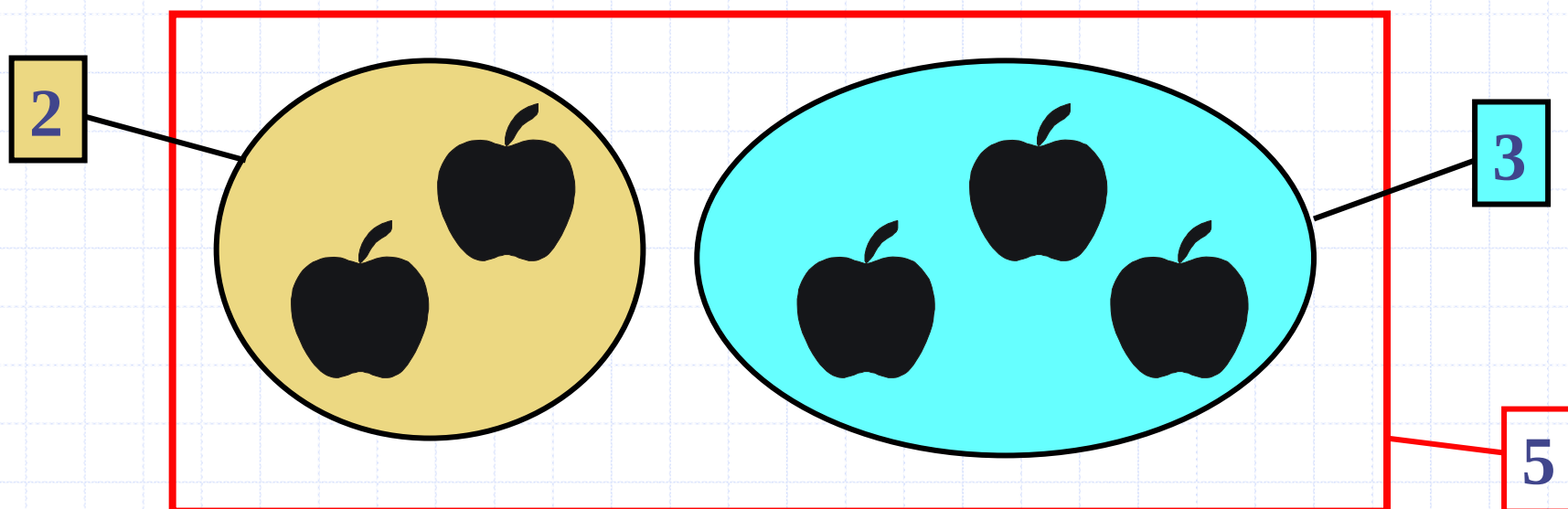
**Můžeme s nekonečny počítat
jako s „normálními“ čísly?**

Jak učíme děti počítat?

Představa počítání čísel se u dětí vytváří tak, že se „nějaké věci dávají dohromady“.

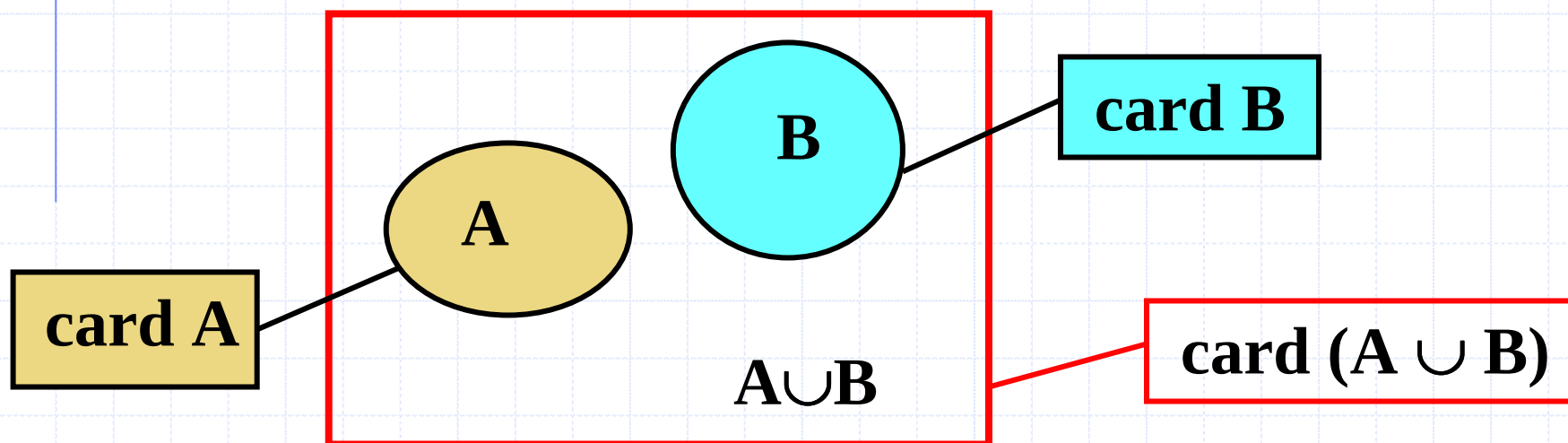
Například: Petr má dvě jablka a Pavel tři jablka.

Kolik jablek mají oba dohromady?



Definice sčítání kardinálních čísel

Definice sčítání kardinálních čísel vychází z této představy:



$$\text{card } A + \text{card } B =_D \text{card } (A \cup B)$$

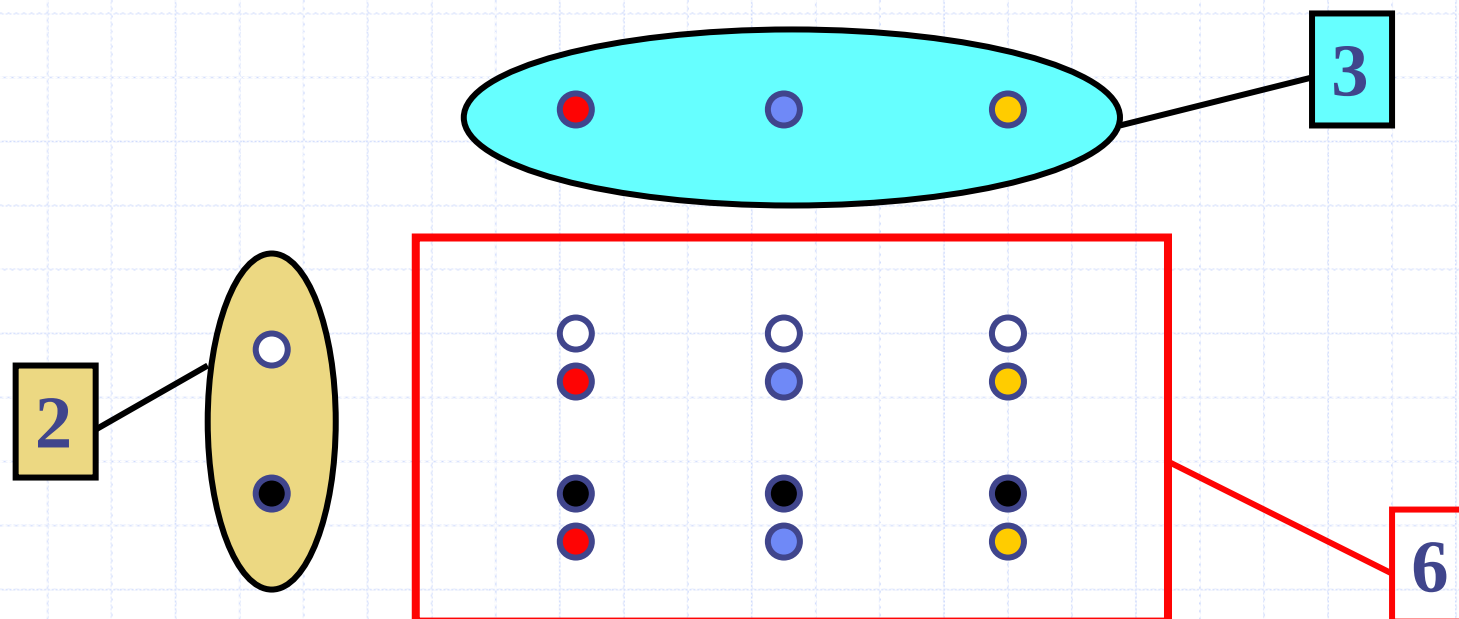
Množiny A, B musí být disjunktní !!! Proč?

Jak učíme děti násobit?

Představa násobení čísel se u dětí vytváří tak, že se „nějaké věci navzájem kombinují“.

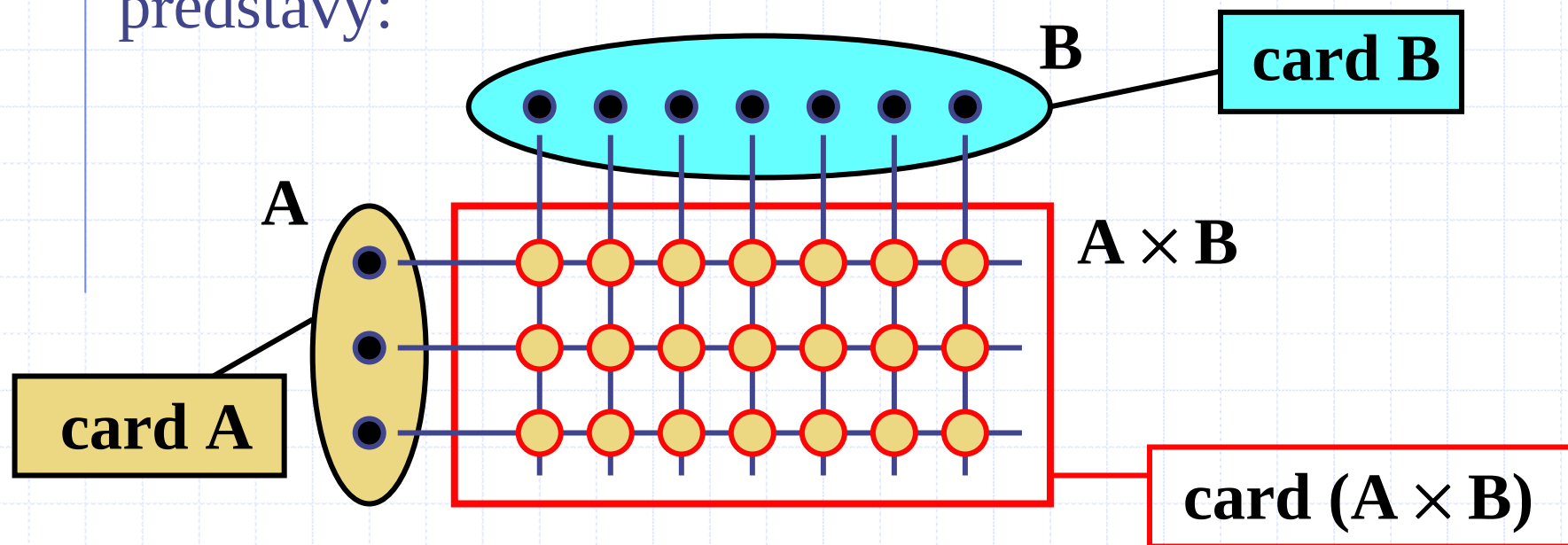
Například: Petr má dvě trička a troje trenýrky.

Kolik různých dresů si může obléci?



Definice násobení kardinálních čísel

Definice násobení kardinálních čísel vychází z této představy:



$$\text{card } A \cdot \text{card } B =_D \text{card } (A \times B)$$

Jednoduché vzorce

Necht' $\aleph_\alpha = \text{card } A$, $\aleph_\beta = \text{card } B$.

Necht' $n = \text{card } C$, kde C je konečná množina,
tedy n je přirozené číslo.

Pak platí:

$$\aleph_\alpha + n = \aleph_\alpha$$

$$\aleph_\alpha \cdot 0 = 0$$

$$n > 0 \Rightarrow \aleph_\alpha \cdot n = \aleph_\alpha$$

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta =$$

$$= \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta =$$

$$= \aleph_{\max(\alpha, \beta)}$$

Kolik je kardinálních čísel?

Označme množinu všech přirozených čísel symbolem N .
Označme množinu všech reálných čísel symbolem R .

Lze dokázat, že platí:

$$\text{card } N = \aleph_0$$

$$\text{card } \text{Pot } (N) = \text{card } R = \aleph_1$$

Platí toto tvrzení (zobecněná hypotéza kontinua):

$$\text{card } A = \aleph_\alpha \Rightarrow \text{card } \text{Pot } (A) = \aleph_{\alpha+1}$$

„Alefů“ je tedy nekonečně mnoho:

$$0, 1, 2, 3, 4, \dots, \aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \dots$$

Množinové strašidlo

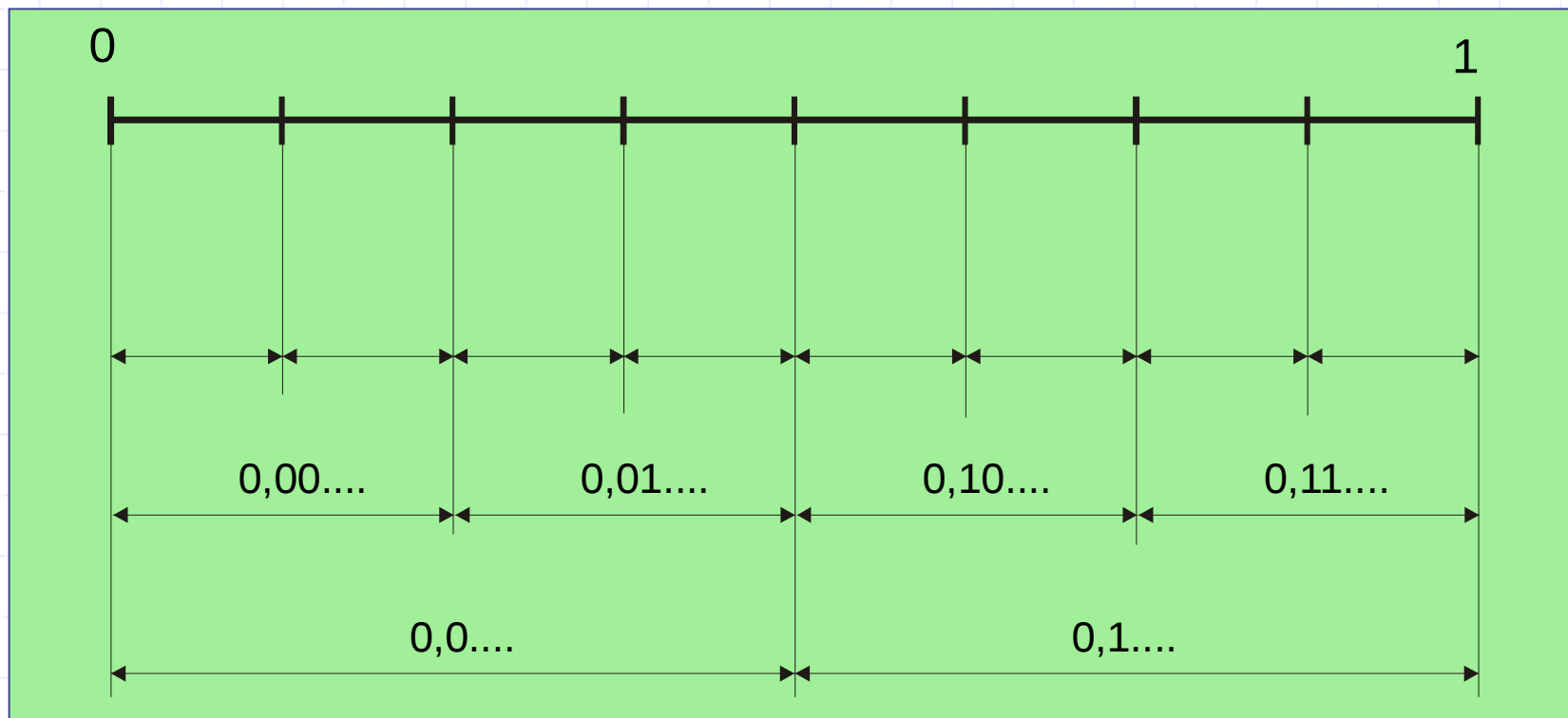
Cantorovo diskontinuum



Zápisy čísel ve dvojkové soustavě

$$(0,307)_{10} = \frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{7}{1000}$$

$$(0,1101)_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0}{8} + \frac{1}{16}$$



Zápisy čísel ve trojkové soustavě

$$(0,1202)_3 = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{0}{27} + \frac{2}{81} = \frac{27+18+0+2}{81} = \frac{47}{81}$$

$$(0,201111\dots)_3 = \frac{2}{3} + \frac{0}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{81} + \dots = \frac{2}{3} + \frac{\frac{1}{27}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{7}{9}$$



Vznik diskontinua

1.krok



2.krok



3.krok



Atd.

Proč je to „strašidelná“ množina?

Vypočítejme, jak dlouhé úsečky jsme vyřadili:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \dots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

A co v Cantorově diskontinuu zůstalo?

Stačí si uvědomit toto párování:

$$(0,22002022202\dots)_3 \longrightarrow (0,11001011101\dots)_2$$

Děkuji vám za pozornost

