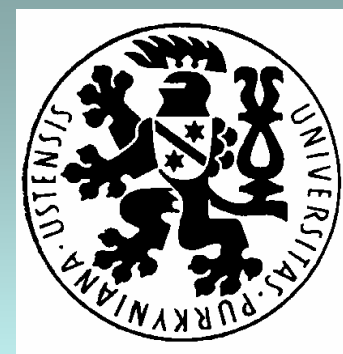




**Katedra matematiky
PF UJEP**



Aritmetika s didaktikou I.

KM1 / 0001

Přednáška 01

Opakování základních pojmů - 1. část

O čem budeme hovořit:

- Logické pojmy
- Množinové pojmy
- Jejich vlastnosti a souvislosti
- Zavedení binárních relací

Logické pojmy a jejich vlastnosti

Výroky a jejich spojování

U každého výroku lze rozhodnout, zda je **pravdivý** anebo **nepravdivý**.

Základní logické spojky jsou v následující tabulce:

Název	Symbolický zápis	Slovní vyjádření
Negace	$\neg A$	Není pravda, že A.
Konjunkce	$A \wedge B$	A a současně B.
Disjunkce	$A \vee B$	A nebo B.
Implikace	$A \Rightarrow B$	Jestliže A, pak B.
Ekvivalence	$A \Leftrightarrow B$	A právě tehdy, když B.

Pravdivostní hodnoty logických spojení

Základní pravidla jsou
v následujících tabulkách:

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Logické věty (tautologie)

Tautologie jsou formule, jejichž **ohodnocení je složeno ze samých jedniček**. Obvykle mají tvar ekvivalence.

Dokazují se „tabulkovou metodou“, například:

A	B	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$			
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1

Když je formule $\varphi \Leftrightarrow \psi$ tautologie, říkáme, že formule φ a ψ jsou **(logicky) ekvivalentní**, a píšeme $\varphi \equiv \psi$.

Důležité tautologie

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A)$$

$$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$$

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge (\neg B)$$

$$\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge B)$$

Výrokové formy

Konstanta označuje jediný objekt,
proměnná je označení pro libovolný objekt.

Nahradíme-li jednu či více konstant ve výroku proměnnými, vznikne **výroková forma**.

Příklad:

Z výroku $2 < 3$ mohou vzniknout např. tyto
výrokové formy:

$$x < 3$$

$$2 < z$$

$$x < y$$

Dosazování a kvantifikování

Do výrokových forem můžeme za některé proměnné **dosazovat** anebo můžeme některé proměnné **kvantifikovat**.

Používáme dva základní kvantifikátory:

$(\forall x)$... „pro každé x “

$(\exists x)$... „existuje alespoň jedno x “

Proměnná, která není kvantifikovaná se nazývá **volná proměnná**.

Ilustrace - příklady

Z výrokové formy $x < y$ můžeme různou kombinací dosazování a kvantifikování získat například tyto výroky (proměnné označují přirozená čísla):

$$2 < 3$$

$$7 < 4$$

$$(\forall x) x < 8$$

$$(\exists y) 5 < y$$

$$(\forall x)(\forall y) x < y$$

$$(\exists y)(\exists x) x < y$$

$$(\forall x)(\exists y) x < y$$

$$(\exists y)(\forall x) x < y$$

Důležité poznatky o kvantifikátorech

U různých kvantifikátorů záleží na pořadí !

Formule $(\forall x)(\exists y) \varphi(x,y)$ a $(\exists y)(\forall x) \varphi(x,y)$ nejsou obecně ekvivalentní.

Negování formulí s kvantifikátory:

$$\neg (\forall x) \varphi(x) \Leftrightarrow (\exists x) \neg \varphi(x,y)$$

$$\neg (\exists x) \varphi(x) \Leftrightarrow (\forall x) \neg \varphi(x,y)$$

Množinové pojmy a jejich vlastnosti

Definování množin

- Výčtem prvků, například: $\{a; b; c; d\}$

Pro často užívané množiny zavádíme speciální znaky, například:

$$\mathbf{N} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots\}$$

$$\emptyset = \{ \}$$

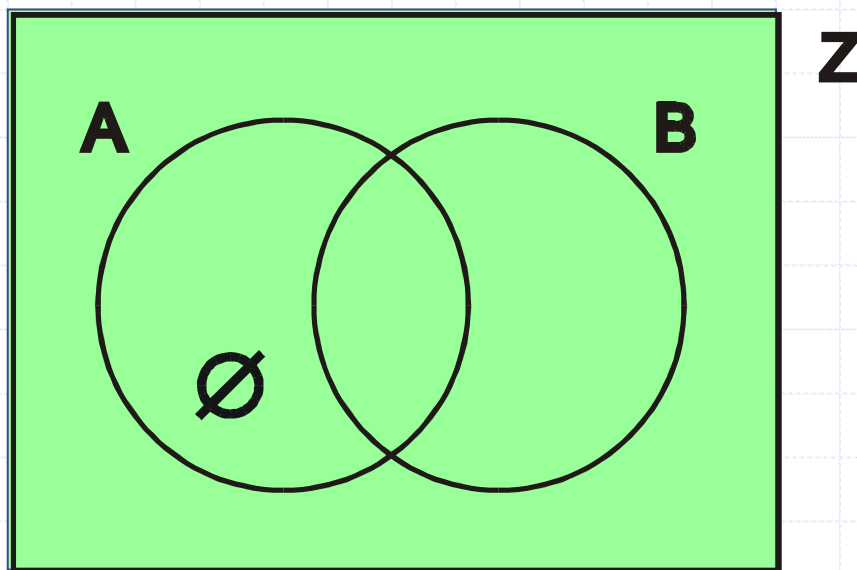
- Charakteristickou vlastností,
například: $\{x \in \mathbf{N} ; x < 4\} = \{1; 2; 3\}$

Vztahy mezi množinami - inkluze

Inkluze („být podmnožinou“):

$$A \subseteq B \Leftrightarrow_D (\forall x \in Z) x \in A \Rightarrow x \in B$$

$$\neg (A \subseteq B) \Leftrightarrow (\exists x \in Z) x \in A \wedge \neg (x \in B)$$

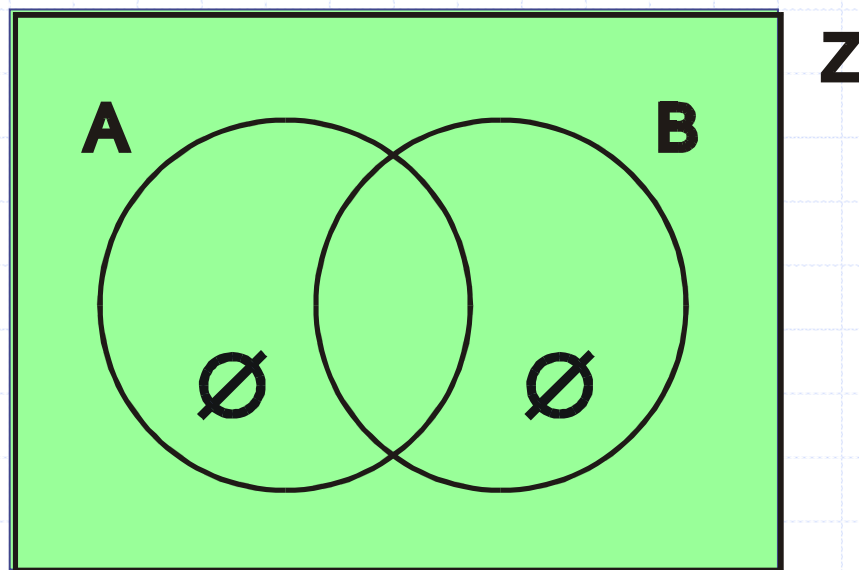


Vztahy mezi množinami - rovnost

Rovnost množin:

$$A = B \Leftrightarrow_D (\forall x \in Z) x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$



Označení pro operace s množinami

Základními operacemi jsou: **doplňěk množiny, průnik, sjednocení a rozdíl množin.**

Značení jsou v následující tabulce:

Název	Symbolický zápis
Doplňěk množiny A	A'
Průnik množin A, B	$A \cap B$
Sjednocení množin A, B	$A \cup B$
Rozdíl množin A, B	$A - B$

Definice operací s množinami - doplněk

Definovat operace můžeme dvojím způsobem:
charakteristickou vlastností
nebo **pomocí ekvivalence výrokových forem.**

$$A' =_D \{x ; x \notin A\}$$
$$x \in A' \Leftrightarrow_D x \notin A$$

Definice dalších operací s množinami

Také další operace můžeme definovat dvojím způsobem:

$$\begin{aligned} \mathbf{A \cap B} &=_{\mathbf{D}} \{ \mathbf{x} ; \mathbf{x \in A \wedge x \in B} \} \\ \mathbf{x \in A \cap B} &\Leftrightarrow_{\mathbf{D}} \mathbf{x \in A \wedge x \in B} \end{aligned}$$

Odtud pak plyne, že:

$$\mathbf{x \notin A \cap B} \Leftrightarrow \mathbf{x \notin A \vee x \notin B}$$

Podobně:

$$\begin{aligned} \mathbf{A \cup B} &=_{\mathbf{D}} \{ \mathbf{x} ; \mathbf{x \in A \vee x \in B} \} \\ \mathbf{A - B} &=_{\mathbf{D}} \{ \mathbf{x} ; \mathbf{x \in A \wedge x \notin B} \} \end{aligned}$$

Vlastnosti operací s množinami (věty)

Vět o množinách je mnoho, dokazují se buď pomocí definic přechodem k tautologiím nebo pomocí tzv. Vennových diagramů.

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A - B)' = A' \cup B$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$$

atd.

Kartézský součin množin

K definici je potřebný pojem **uspořádaná dvojice** – označuje se například $[x ; y]$.

Definice:

$$\mathbf{A \times B = \{ [x ; y] ; x \in A \wedge y \in B \}}$$

Speciálně, jsou-li si obě množiny rovný:

$$\mathbf{M \times M = \{ [x ; y] ; x \in M \wedge y \in M \}}$$

Kartézský součin znázorňujeme kartézským grafem, počet jeho prvků pro konečné množiny získáme násobením.

Další vlastnosti operací s množinami

$$\mathbf{A \times B \neq B \times A}$$

$$\mathbf{(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)}$$

$$\mathbf{(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)}$$

$$\mathbf{(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)}$$

$$\mathbf{(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)}$$

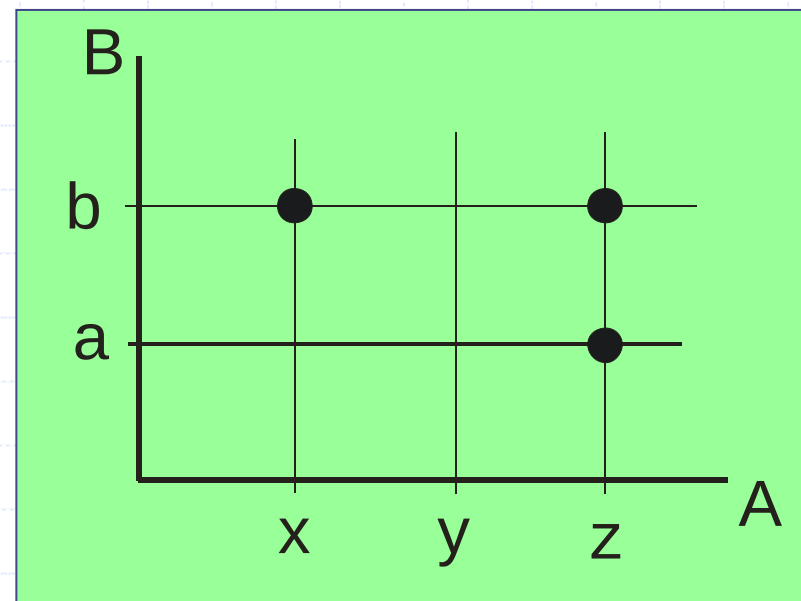
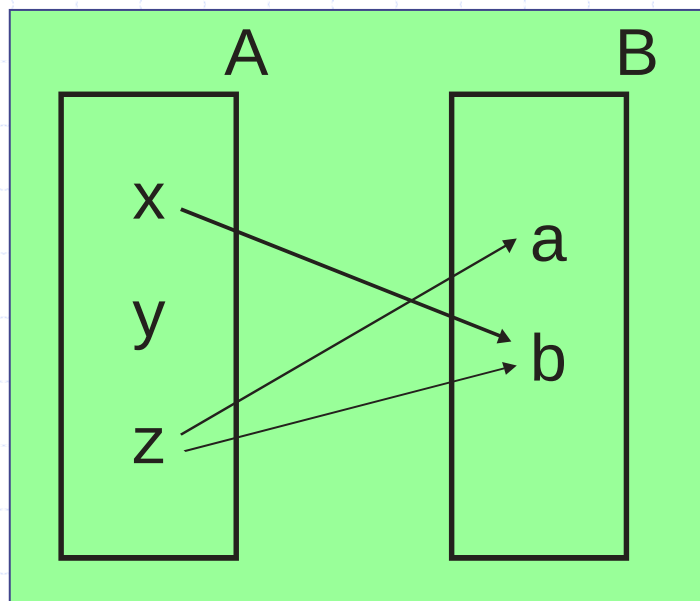
atd.

Binární relace v množinách

Binární relace v množinách A, B

Definice: Množinu R nazýváme binární relací v množinách A, B právě tehdy, když $R \subseteq A \times B$.

Binární relace znázorňujeme spojnicovými nebo kartézskými grafy.



Úmluvy o zápisech

Jestliže platí $x \mathbf{R} y$, zapisujeme to $[x ; y] \in \mathbf{R}$.

Příklady:

Protože platí $2 < 3$, zapisujeme to $[2 ; 3] \in <$.

Protože platí $5 \leq 5$, zapisujeme to $[5 ; 5] \in \leq$.

Protože platí $3 \mid 9$, zapisujeme to $[3 ; 9] \in \mid$.

Protože neplatí $8 < 3$, zapisujeme to $[8 ; 3] \notin <$.

Protože neplatí $4 \mid 7$, zapisujeme to $[4 ; 7] \notin \mid$.

První a druhý obor relace R

Definice: Necht' je dána relace $R \subseteq A \times B$.

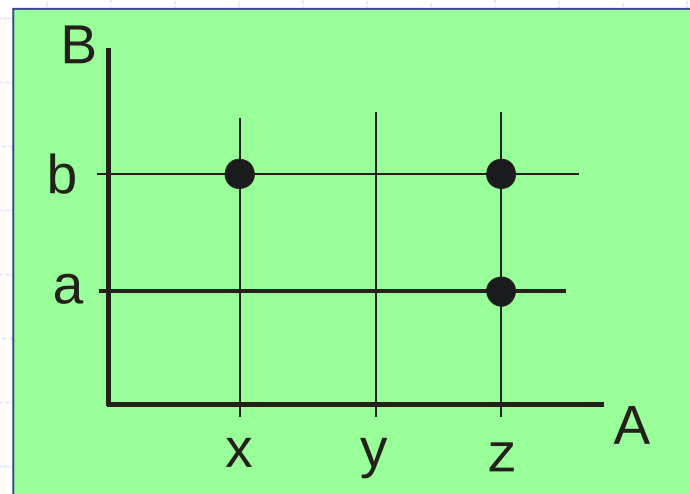
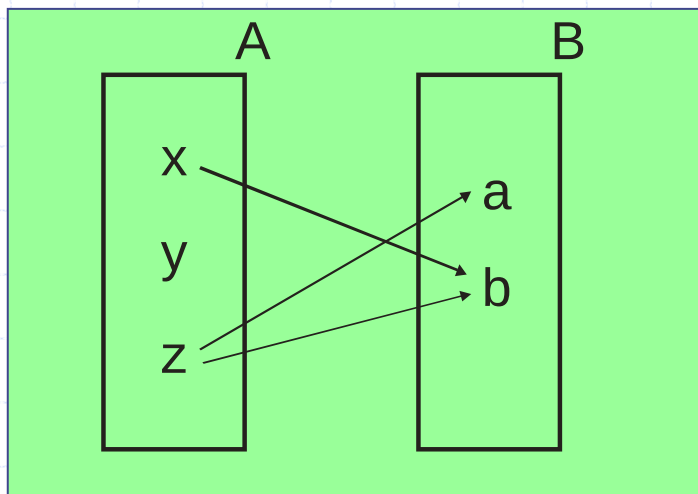
Prvním oborem relace R nazýváme množinu

$$O_1(R) = \{x \in A ; (\exists y \in B) x R y\} ,$$

druhým oborem relace R nazýváme množinu

$$O_2(R) = \{y \in B ; (\exists x \in A) x R y\} .$$

Jak určíme oba obory z grafů relace R ?



Děkuji za pozornost

