



**Katedra matematiky
PF UJEP**



Aritmetika s didaktikou I.

KM1 / 0001

Přednáška 02

Opakování základních pojmů - 2. část

O čem budeme hovořit:

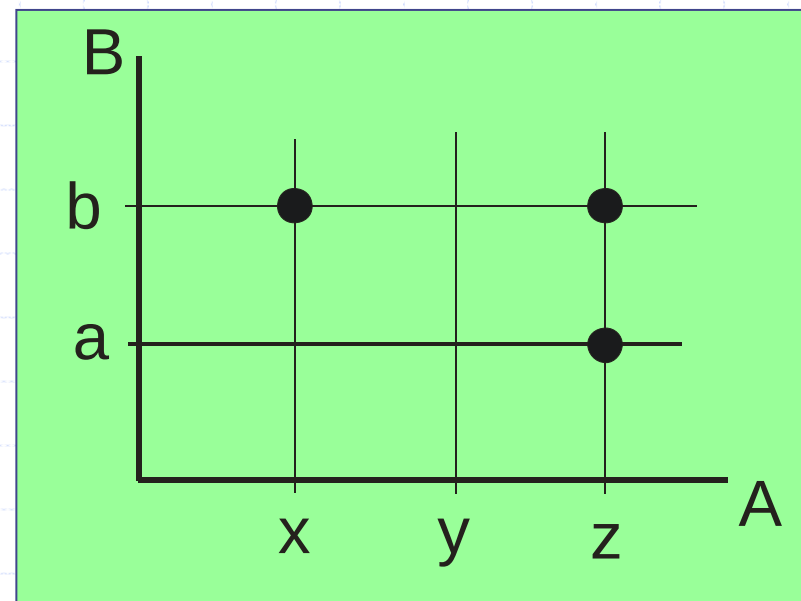
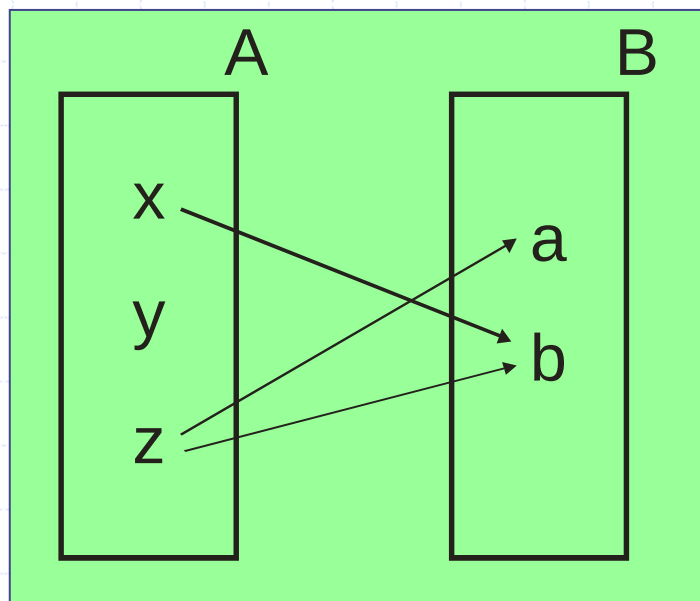
- Binární relace a jejich vlastnosti
- Speciální typy binárních relací
(ekvivalence, uspořádání, zobrazení)

Binární relace v množinách

Binární relace v množinách A, B

Definice:

Množinu R nazýváme binární relací v množinách A, B právě tehdy, když $R \subseteq A \times B$.



Inverzní relace R^{-1} k relaci R

Definice:

Formule $x R^{-1} y$ platí právě tehdy, když $y R x$.

Tedy $[x ; y] \in R^{-1}$ právě tehdy, když $[y ; x] \in R$.

Z toho plyne, že je-li $R \subseteq A \times B$, pak $R^{-1} \subseteq B \times A$.

Příklady:

Binární relace $>$ je inverzní k binární relaci $<$.

Binární relace „být dělitelem“ je inverzní k binární relaci „být násobkem“.

Jak vypadají grafy inverzní relace?

Doplňková relace R' k relaci R

Definice:

Formule $x R' y$ platí právě tehdy, když neplatí $x R y$.

Tedy $[x ; y] \in R'$ právě tehdy, když $[x ; y] \notin R$.

Příklad:

Binární relace $\leq$ je doplňková k binární relaci $>$.

Jak vypadají grafy doplňkové relace?

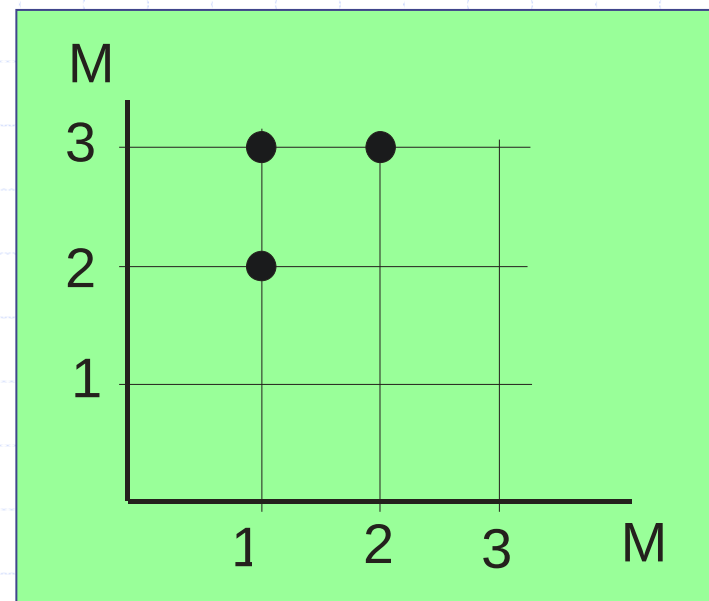
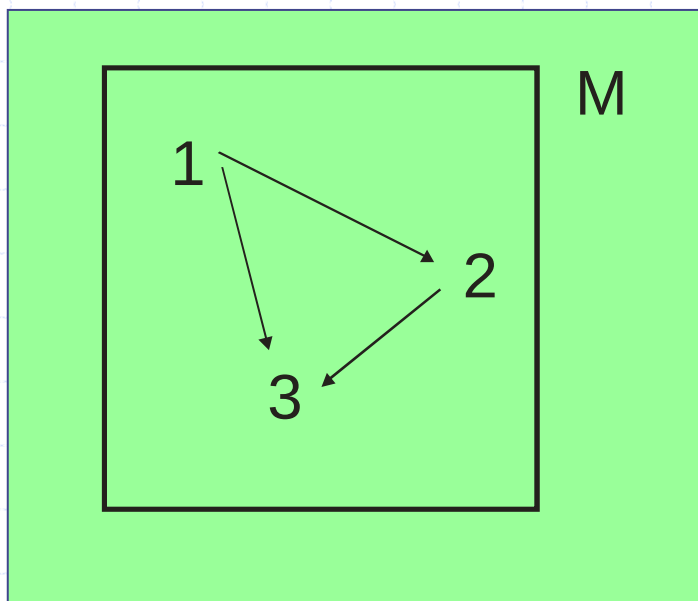
Binární relace v množině

Vlastnosti binárních relací

Binární relace v množině M

Definice: Množinu R nazýváme binární relací v množině M právě tehdy, když $R \subseteq M \times M$.

Příklad: Uvažujme množinu $M = \{1; 2; 3\}$ a relaci $<$ v M .
Pak $< = \{ [1;2], [1;3], [2;3] \}$



Reflexivnost binární relace v množině M

Definice: Binární relace R v množině M se nazývá **reflexivní** právě tehdy, když platí $(\forall x \in M) x R x$.

Příklady: $=$ je reflexivní v $\mathbf{N}$, $|$ je reflexivní v $\mathbf{N}$

- Co znamená, že relace není reflexivní?
- Jak se projeví reflexivita relace v jejích grafech?
- Co můžeme říci o prvním i druhém oboru reflexivní relace?

Antireflexivnost binární relace v množině M

Definice: Binární relace **R** v množině M se nazývá **antireflexivní** právě tehdy, když platí $(\forall x \in M) \neg x R x$.

Příklad: $<$ je antireflexivní v $\mathbb{N}$

- Co znamená, že relace není antireflexivní?
- Jak se projeví antireflexivita relace v grafech?
- Co můžeme říci o doplňkové relaci reflexivní relace?
- Existují relace, které nejsou ani reflexivní ani antireflexivní?

Symetričnost binární relace v množině M

Definice: Binární relace R v množině M se nazývá **symetrická** právě tehdy, když platí
 $(\forall x, y \in M) \ x R y \Rightarrow y R x$.

Příklady: $=$ je symetrická v N , $|$ není symetrická v N

- Co znamená, že relace není symetrická?
- Jak se projeví symetričnost relace v jejích grafech?
- Co můžeme říci o doplňkové relaci symetrické relace?

Antisymetričnost binární relace v množině M

Definice: Binární relace **R** v množině M se nazývá **antisymetrická** právě tehdy, když platí
$$(\forall x, y \in M) \quad x \neq y \wedge x R y \Rightarrow \neg y R x .$$

Příklady: $|$ je antisymetrická v $\mathbb{N}$

- Co znamená, že relace není antisymetrická?
- Jak se projeví antisymetričnost relace v jejích grafech?
- Existuje relace, která je symetrická a současně i antisymetrická?

Tranzitivnost binární relace v množině M

Definice: Binární relace R v množině M se nazývá **tranzitivní** právě tehdy, když platí
$$(\forall x, y, z \in M) \quad x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z .$$

Příklady: $=$ je tranzitivní v N , $<$ je tranzitivní v N ,
 $|$ je tranzitivní v N , $\neq$ není tranzitivní v N

- Co znamená, že relace není tranzitivní?
- Jak se projeví tranzitivnost relace v jejím spojnicovém grafu?
- Jsou relace $R = \emptyset$ a $R = M \times M$ tranzitivní v M ?

Konektivnost binární relace v množině M

Definice: Binární relace R v množině M se nazývá **konektivní** právě tehdy, když platí
 $(\forall x, y \in M) \ x \neq y \Rightarrow x R y \vee y R x$.

Příklady: $<$ je konektivní v $\mathbb{N}$, $|$ není konektivní v $\mathbb{N}$

- Co znamená, že relace není konektivní?
- Jak se projeví konektivnost relace v jejích grafech?
- Existuje relace, která je reflexivní a současně není konektivní?

Ekvivalence na množině a odpovídající rozklad množiny

Ekvivalence v množině M

Definice: Relace R v množině M se nazývá ekvivalence právě tehdy, když je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Příklad:

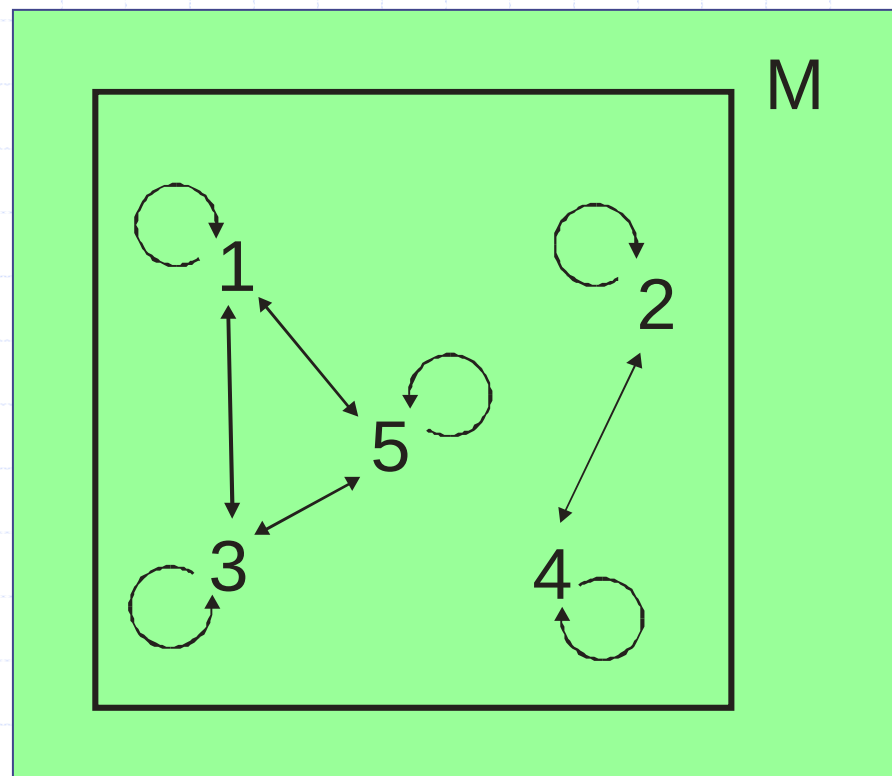
Uvažujme množinu

$$M = \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

a relaci R v množině M definovanou takto:

$$x R y \Leftrightarrow$$

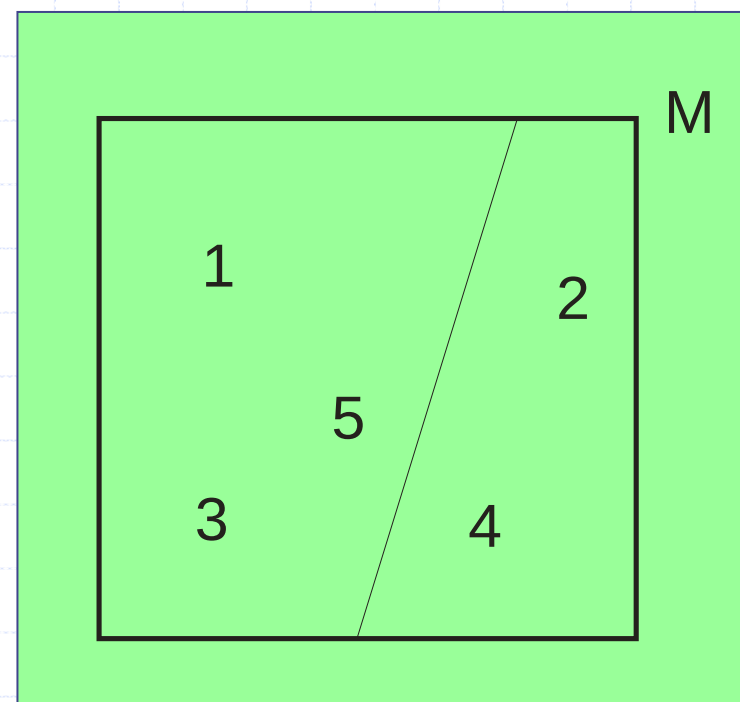
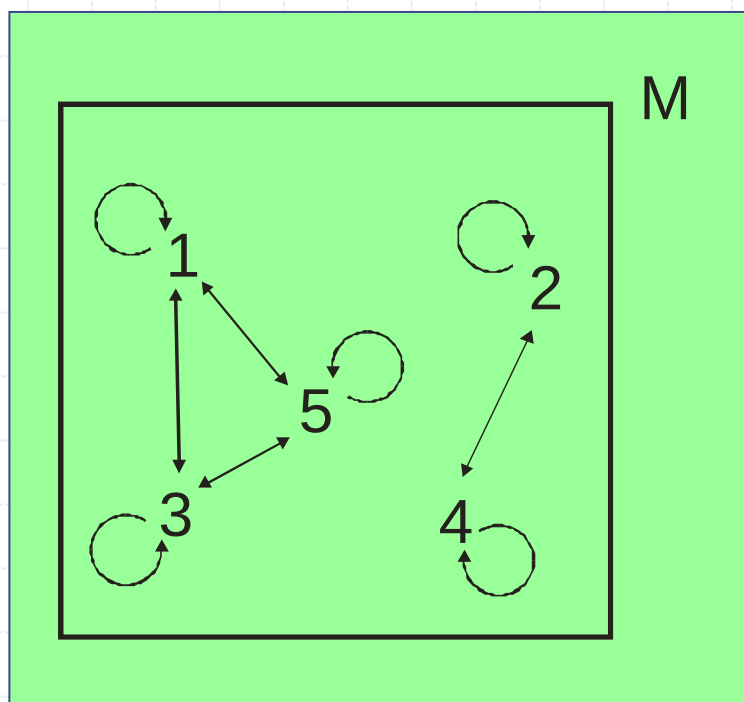
čísla x a y mají stejnou paritu



Souvislost ekvivalence v množině M a rozkladu množiny M

Každá ekvivalence v množině M indukuje určitý rozklad množiny M a naopak každý rozklad množiny M indukuje určitou ekvivalenci.

Třídy rozkladu obsahují navzájem ekvivalentní prvky.



Uspořádání a jeho druhy

Uspořádání v množině M

Definice:

Relace R v množině M se nazývá **uspořádání** právě tehdy, když je **antisymetrická a tranzitivní**.

Uspořádání se nazývá **neostré** právě tehdy, když je **reflexivní**.

Uspořádání se nazývá **ostré** právě tehdy, když je **antireflexivní**.

Uspořádání se nazývá **lineární** právě tehdy, když je **konektivní**.

Uspořádání se nazývá **nelineární** právě tehdy, když **není konektivní**.

Uspořádání v množině M - příklad

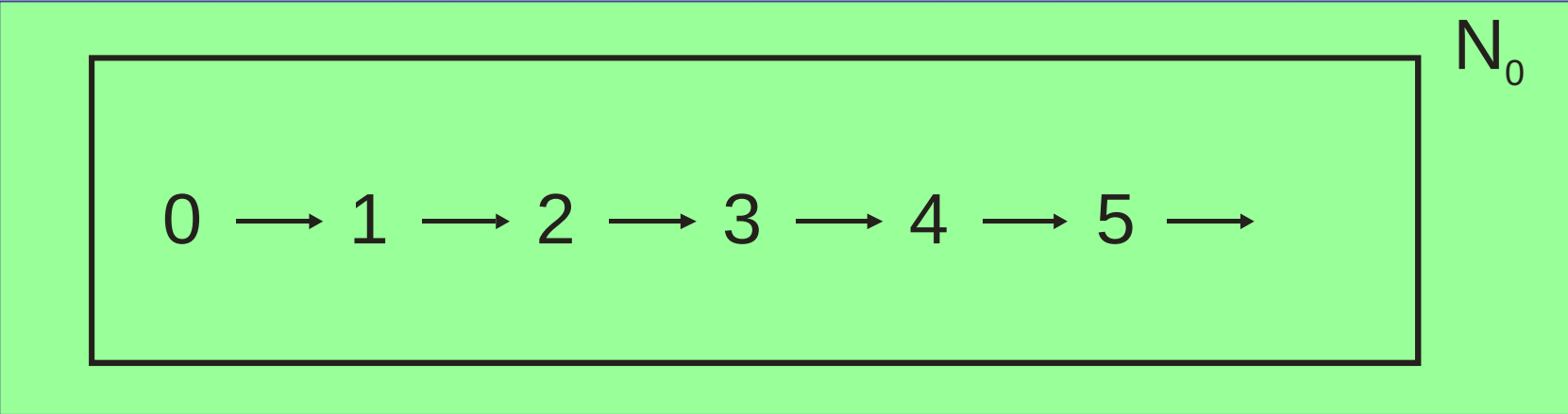
Relace $<$ v množině N_0 je **ostré lineární uspořádání**, protože platí:

antisymetrie – $(\forall x, y \in N_0) \ x \neq y \wedge x < y \Rightarrow \neg y < x$

tranzitivnost – $(\forall x, y, z \in N_0) \ x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$

antireflexivnost – $(\forall x \in N_0) \ \neg x < x$

konektivita – $(\forall x, y \in N_0) \ x \neq y \Rightarrow x < y \vee y < x$



$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow$

N_0

Uspořádání v množině M - příklad

Relace $\subseteq$ je **neostré nelineární uspořádání** ve třídě všech množin, protože tato relace:

je antisymetrická – $(\forall X, Y) \quad X \neq Y \wedge X \subseteq Y \Rightarrow \neg Y \subseteq X$

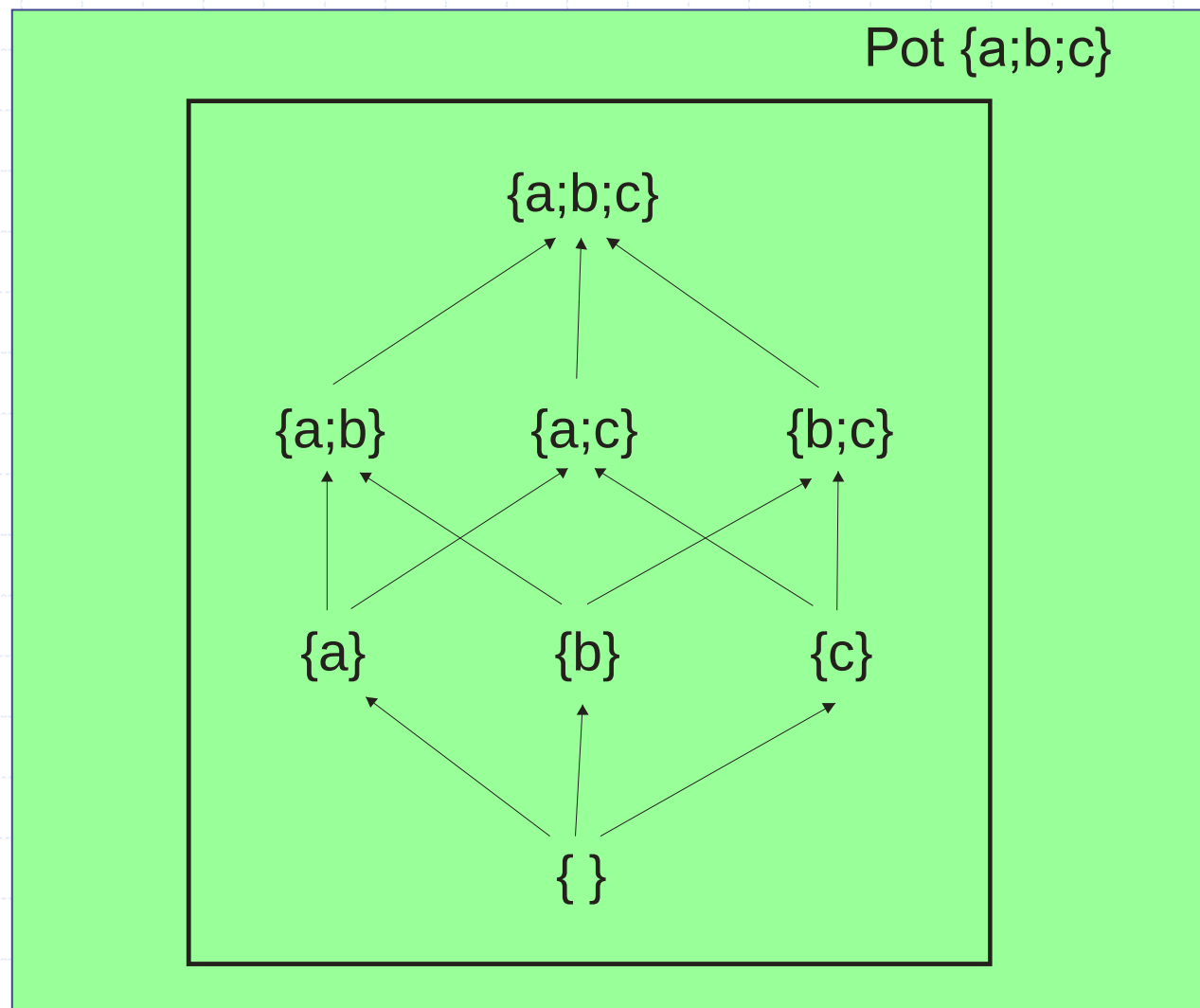
je tranzitivní – $(\forall X, Y, Z) \quad X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z$

je reflexivní – $(\forall X) \quad X \subseteq X$

ale není konektivní – $(\exists X, Y) \quad X \neq Y \wedge \neg (X \subseteq Y) \wedge \neg (Y \subseteq X)$

Názorný je Hasseův diagram tohoto uspořádání:

Hasseův diagram inkluze



Zobrazení a jeho druhy

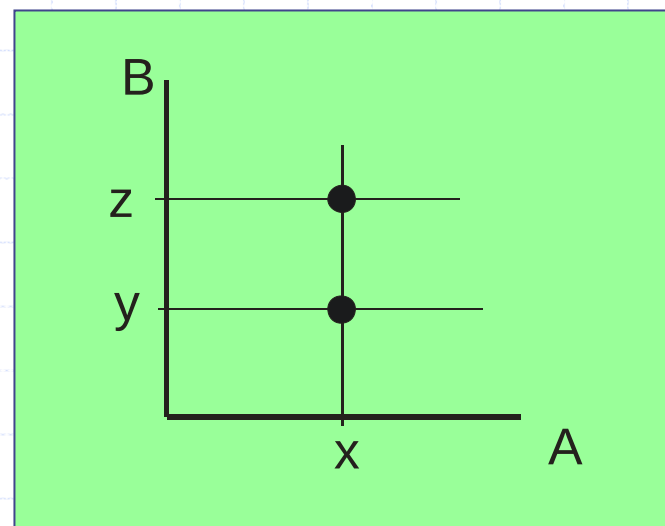
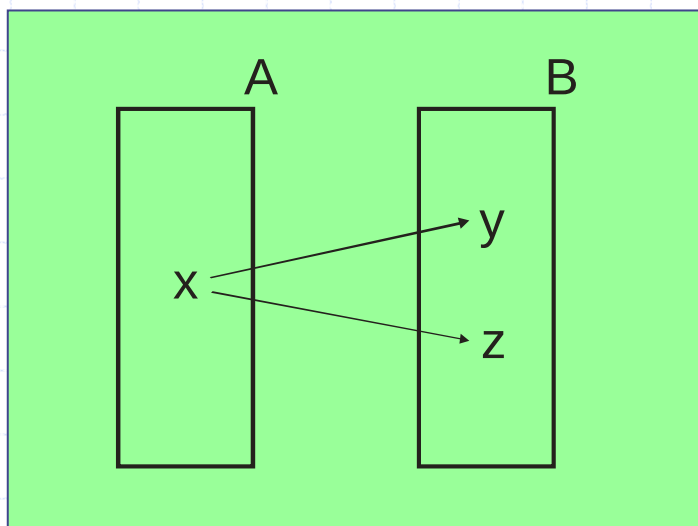
Zobrazení mezi množinami A, B

Definice: Binární relaci $F \subseteq A \times B$ nazýváme zobrazením právě tehdy, když

$$\neg (\exists x \in A) (\exists y, z \in B) x F y \wedge x F z \wedge y \neq z,$$

$$\text{tj. } (\forall x \in A) (\forall y, z \in B) x F y \wedge x F z \Rightarrow y = z.$$

U zobrazení jsou tedy **zakázány** tyto konfigurace:



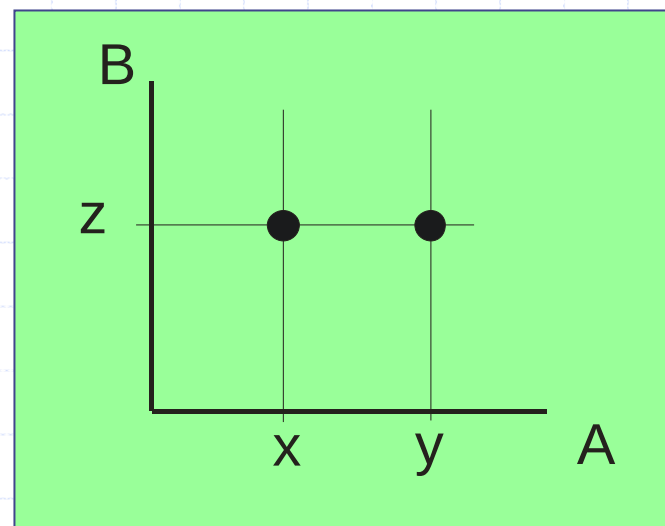
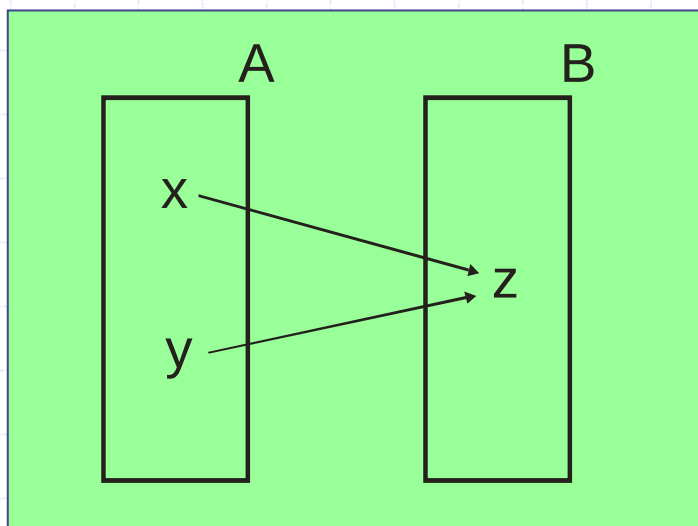
Prosté zobrazení mezi množinami A, B

Definice: Zobrazení $F \subseteq A \times B$ nazýváme prosté právě tehdy, když

$$\neg (\exists x, y \in A) (\exists z \in B) x F z \wedge y F z \wedge x \neq y ,$$

$$\text{tj. } (\forall x, y \in A) (\forall z \in B) x F z \wedge y F z \Rightarrow x = y .$$

U prostých zobrazení jsou **zakázány** tyto konfigurace:



Druhy zobrazení mezi množinami A, B

Je-li dáno zobrazení $F \subseteq A \times B$, pak jeho první i druhý obor jsou podmnožinami množin A, B, tedy platí **$O_1(F) \subseteq A \wedge O_2(F) \subseteq B$** .

V tomto obecném případě nazýváme zobrazení F zobrazením z množiny A do množiny B.

Mohou však nastat případy, kdy platí, že

$O_1(F) = A$, resp. **$O_2(F) = B$** , resp. obojí.

V těchto případech užíváme pro zobrazení speciální názvy:

Druhy zobrazení mezi množinami A, B

Nechť je dáno zobrazení $F \subseteq A \times B$.

Jestliže platí $O_1(F) = A \wedge O_2(F) \subseteq B$, pak F nazýváme **zobrazením množiny A do množiny B**.

Jestliže platí $O_1(F) \subseteq A \wedge O_2(F) = B$, pak F nazýváme **zobrazením z množiny A na množinu B**.

Jestliže platí $O_1(F) = A \wedge O_2(F) = B$, pak F nazýváme **zobrazením množiny A na množinu B**.

Děkuji za pozornost

