



**Katedra matematiky  
PF UJEP**



# **Aritmetika s didaktikou I.**

**KM1 / 0001**

**Přednáška 03**

**Operace v množině, vlastnosti binárních operací**

# O čem budeme hovořit:

- zavedení pojmu operace
- binární, unární a další operace
- vlastnosti binárních operací

# **Zavedení pojmu operace**

# Příklad binární operace - sčítání

Při sčítání přirozených čísel je ke dvojici libovolně zvolených čísel (tzv. sčítanců) jednoznačně přiřazen výsledek (tzv. součet).

Například:

$$2 + 3 = 5 \quad \text{.....} \quad [2 ; 3] \rightarrow 5$$

$$4 + 2 = 6 \quad \text{.....} \quad [4 ; 2] \rightarrow 6$$

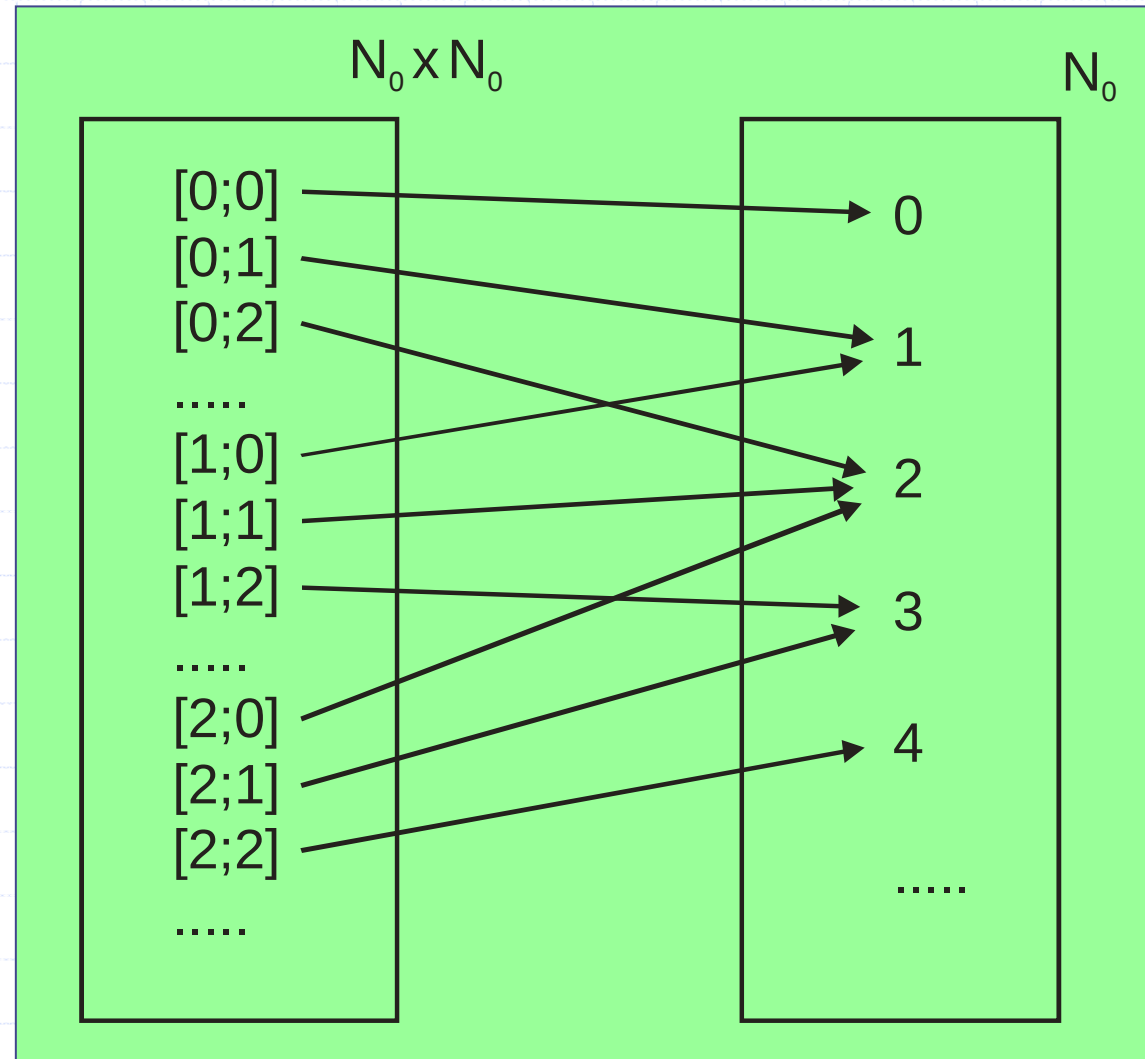
$$9 + 0 = 9 \quad \text{.....} \quad [9 ; 0] \rightarrow 9$$

$$12 + 9 = 21 \quad \text{.....} \quad [12 ; 9] \rightarrow 21$$

atd.

# Příklad binární operace - sčítání

Operaci sčítání  
přirozených čísel  
tedy můžeme  
chápat jako  
určité zobrazení  
kartézského  
součinu  $N_0 \times N_0$   
na množinu  $N_0$ .



# Definice binární operace

**Binární operací v množině  $M$  nazýváme zobrazení z kartézského součinu  $M \times M$  do množiny  $M$ .**

Příklady:

Binární operace násobení přirozených čísel je zobrazení množiny  $N_0 \times N_0$  na množinu  $N_0$ .

Binární operace odčítání přirozených čísel je zobrazení z množiny  $N_0 \times N_0$  na množinu  $N_0$ .

Binární operace dělení přirozených čísel je zobrazení z množiny  $N_0 \times N_0$  na množinu  $N_0$ .

# Další binární operace

## Příklady:

- konjunkce (disjunkce, implikace, ekvivalence) dvou výroků
  - průnik (sjednocení, rozdíl) dvou množin
  - střed dvojice bodů
  - největší společný dělitel dvou přirozených čísel
  - umocňování přirozených čísel
- atd.

# **Další druhy operací (unární operace, atd.)**

# Definice ternární operace

**Ternární operací v množině  $M$  nazýváme zobrazení z kartézského součinu  $M \times M \times M$  do množiny  $M$ .**

Příklady:

- největší společný dělitel tří přirozených čísel,
  - těžiště trojice bodů,
  - aritmetický průměr tří reálných čísel,
- atd.

# Definice unární operace

Unární operací v množině  $M$  nazýváme zobrazení z množiny  $M$  do množiny  $M$ .

Příklady:

- číslo opačné k celému číslu,
  - číslo inverzní k racionálnímu číslu,
  - osová souměrnost bodů,
- atd.

# Vlastnosti binárních operací

# Motivační příklad

U binárních operací je důležité, zda je operace zobrazením **(celé) množiny  $M \times M$  do množiny  $M$** , nebo pouze **z množiny  $M \times M$  do množiny  $M$** .

V prvním případě je výsledek operace definován pro libovolnou dvojici  $[x ; y] \in M \times M$  a je prvkem množiny  $M$ , v druhém případě není některým dvojicím  $[x ; y] \in M \times M$  přiřazen obraz z množiny  $M$ .

## Příklad:

Učí-li se děti sčítat například jen v množině  $M = \{1;2;3;4;5\}$ , je operace sčítání v  $M$  tzv. **neúplná**.

| + | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |   |
| 2 | 3 | 4 | 5 |   |   |
| 3 | 4 | 5 |   |   |   |
| 4 | 5 |   |   |   |   |
| 5 |   |   |   |   |   |

# Definice úplnosti binární operace

Binární operaci  $\square$  v množině  $M$  nazýváme úplnou právě tehdy, když platí

$$(\forall x, y \in M)(\exists z \in M) \ x \square y = z .$$

Příklady:

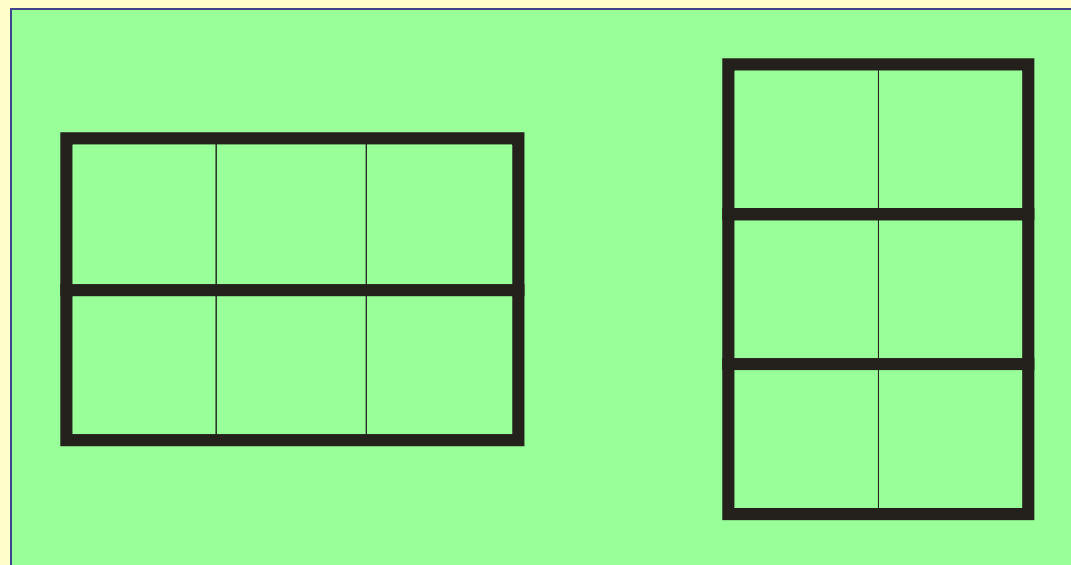
- operace **sčítání** je úplná v  $N_0$ ,
  - operace **odčítání** není úplná v  $N_0$ ,
  - operace **odčítání** je úplná v  $Z$ ,
- atd.

# Motivační příklad

Při nácviu násobení přirozených čísel se děti učí, že výsledek nezávisí na pořadí činitelů, například

$$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 .$$

Tento fakt můžeme odůvodnit na „modelu násobení“:



V těchto situacích užíváme tzv. **komutativitu násobení**:

$$x \cdot y = y \cdot x$$

# Definice komutativnosti binární operace

Binární operaci  $\square$  v množině  $M$  nazýváme komutativní právě tehdy, když platí

$$(\forall x, y \in M) \quad x \square y = y \square x .$$

Příklady:

- operace **sčítání** je komutativní v  $N_0$ ,
  - operace **odčítání** není komutativní v  $N_0$ ,
  - operace **střed dvojice bodů** je komutativní,
  - operace **průnik** je komutativní,
- atd.

# Motivační příklad

Při nácviku sčítání přirozených čísel „přes desítku“ naučíme děti rozkládat čísla na dva sčítance, a pak postupujeme například takto:

$$8 + 7 = 8 + ( 2 + 5 ) = ( 8 + 2 ) + 5 = 10 + 5 = 15$$

Užíváme přitom tzv. **asociativitu sčítání**:

$$x + ( y + z ) = ( x + y ) + z$$

# Definice asociativnosti binární operace

Binární operaci  $\square$  v množině  $M$  nazýváme asociativní právě tehdy, když platí

$$(\forall x, y, z \in M) \quad (x \square y) \square z = x \square (y \square z).$$

Příklady:

- operace **sčítání** je asociativní v  $N_0$ ,
  - operace **odčítání** není asociativní v  $N_0$ ,
  - operace **umocňování** není asociativní v  $N_0$ ,
  - operace **sjednocování** je asociativní,
- atd.

# Motivační příklad

U některých binárních operací v množině  $M$  existuje jistý význačný prvek v množině  $M$  s touto vlastností:

**„je-li tento prvek jedním z operandů, pak vůbec neovlivňuje výsledek operace, tj. výsledek je vždy roven druhému operandu“.**

**Příklad:**

U sčítání přirozených čísel je takovým prvkem nula, protože  $5 + 0 = 5$  ,  $12 + 0 = 12$  ,  $0 + 4 = 4$  , atd.

Budeme říkat, že číslo 0 je **neutrálním prvkem** operace sčítání přirozených čísel.

# Definice neutrálního prvku binární operace

U binární operace  $\square$  v množině  $M$  budeme nazývat prvek  $n$  neutrálním prvkem právě tehdy, když platí

$$(\forall x \in M) \quad x \square n = x \quad \wedge \quad n \square x = x .$$

Příklady:

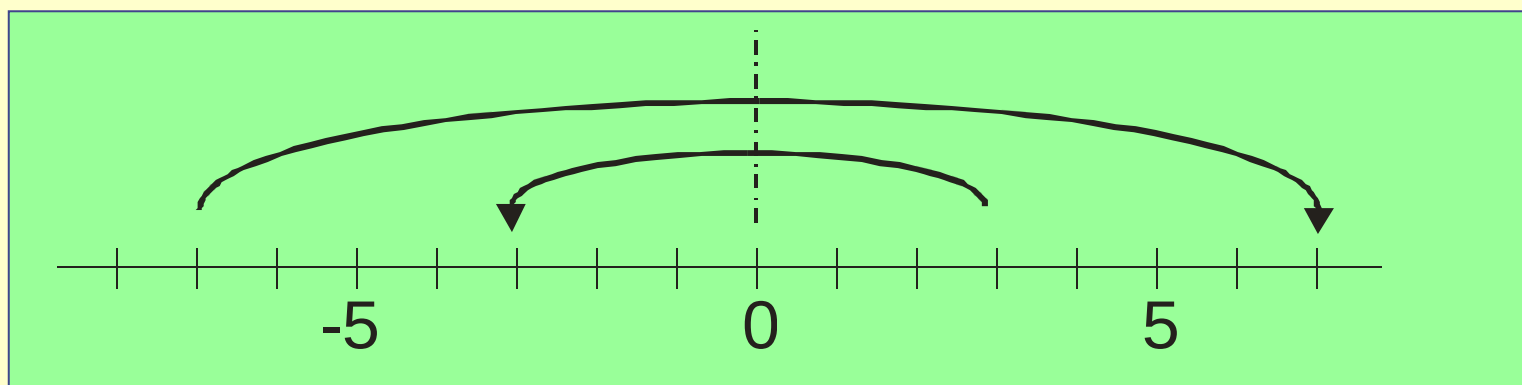
- u operace **sčítání** v  $\mathbf{N}_0$  je neutrálním prvkem 0,
- operace **odčítání** v  $\mathbf{Z}$  nemá neutrální prvek,
- u operace **sjednocení** je neutrálním prvkem  $\emptyset$ ,  
atd.

# Motivační příklad

U některých binárních operací v množině  $M$ , které mají neutrální prvek, můžeme často k prvku  $x \in M$  nalézt (obecně) jiný, tzv. **inverzní prvek**  $x' \in M$ .

**Výsledkem operace s těmito prvky je neutrální prvek.**

**Příklad:** U sčítání celých čísel je neutrální prvek 0 a tedy k číslu 3 je inverzním prvkem  $(-3)$ , protože  $3 + (-3) = 0$ , k číslu  $(-7)$  je inverzním prvkem 7, protože  $(-7) + 7 = 0$ , k číslu 0 je inverzním prvkem 0, protože  $0 + 0 = 0$ , atd.



# Definice inverzních prvků binární operace

U binární operace  $\square$  v množině  $M$  s neutrálním prvkem  $n$  budeme nazývat prvek  $x'$  inverzním prvkem k prvku  $x$  právě tehdy, když platí

$$x \square x' = n \quad \wedge \quad x' \square x = n.$$

Příklady:

- u operace **sčítání** v  $\mathbb{Z}$  je k číslu 3 inverzním prvkem číslo  $(-3)$  ,
- u operace **násobení** v  $\mathbb{Q}$  je k číslu 3 inverzním prvkem číslo  $1/3$  ,

atd.

# Motivační příklad

V aritmetice čísel je často používáno dobře známé pravidlo o „roznásobování závorky“.

## Příklad:

Máme-li z paměti vypočítat součin  $3 \cdot 12$ , postupujeme v myšlenkách takto:

$$3 \cdot 12 = 3 \cdot (10 + 2) = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 2 = 30 + 6 = 36$$

Zde používáme tzv. **distributivitu násobení vůči sčítání**, tedy platnost vztahu

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

# Definice distributivnosti binárních operací

Necht' jsou dány dvě binární operace  $\square$  a  $\#$  v množině  $M$ . Budeme říkat, že operace  $\#$  je distributivní vzhledem k operaci  $\square$  právě tehdy, když platí

$$(\forall x, y, z \in M) \quad (x \square y) \# z = (x \# z) \square (y \# z) \wedge \\ \wedge z \# (x \square y) = (z \# x) \square (z \# y).$$

Příklady:

- násobení je distributivní vzhledem ke sčítání,
- sčítání není distributivní vzhledem k násobení,
- sjednocení je distributivní vzhledem k průniku, atd.

**Děkuji za pozornost**

