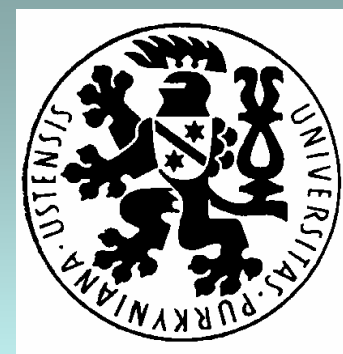




**Katedra matematiky
PF UJEP**



Aritmetika s didaktikou I.

KM1 / 0001

Přednáška 06

Axiomatická teorie přirozených čísel

O čem budeme hovořit:

- **Matematické teorie**
- **Jazyk teorie přirozených čísel**
- **Formální axiomy teorie přirozených čísel**

Výstavba matematických teorií

Jak se budují matematické teorie?

- Nejprve se vymezí **základní jazyk teorie** (abeceda, termy a formule).
- Pak se přijmou **formální axiomy teorie** (axiomy rovnosti, axiomy operací, axiomy invariance, atd.).
- Dále se přijmou **obsahové axiomy teorie**. Axiomy jsou tvrzení přijímaná bez důkazu.
- Všechna další tvrzení teorie jsou formulována ve **větách**, které se **dokazují**.
- Další pojmy teorie se zavádějí **definicemi**.
- Při důkazech vět se užívají jen poznatky logiky, axiomy, definice a dříve dokázané věty.

Jazyk teorie přirozených čísel

Abeceda teorie přirozených čísel

- **Proměnné** pro označování přirozených čísel:
 $x, y, a, b, u, v, \dots$
- **Logické znaky**: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists, \exists!$
- **Specifické znaky teorie** pro relace a operace:
 $=$ pro rovnost, $'$ pro následovníka,
 $+$ pro sčítání, $\cdot$ pro násobení
- **Pomocné znaky** (závorky): $(,), [,]$

Abeceda teorie je soupis znaků, pomocí nichž se všechny axiomy, definice i věty zapisují.

Termy teorie přirozených čísel

- Každá **proměnná** je term.
- **Následovník** každého termu je term, tedy je-li α term, pak je i α' term.
- **Součet i součin** každých dvou termů jsou termy, tedy jsou-li α, β termy, pak jsou i $\alpha + \beta$ a $\alpha \cdot \beta$ termy.
- Nic jiného není term.

**Termy slouží k označování objektů teorie,
v našem případě k označování přirozených čísel.**

Příklady termů (výrazů)

Postupným užitím jednotlivých bodů zjistíme, že následující zápisy jsou termy přirozených čísel:

x

$a + b$

u'

$c \cdot (x + y)$

$(e + f)' \cdot (x \cdot x + z')'$

Při zapisování termů budeme užívat běžné úmluvy o závorkování, které známe z algebry.

Formule teorie přirozených čísel

- **Elementární formule** mají tvar rovnosti dvou termů, tedy jsou-li α, β termy, pak $\alpha = \beta$ je formule.
- Nové formule vytváříme z formulí **logickými znaky**:
je-li F formule, pak je i $\neg F$ formule,
jsou-li F, G formule, pak jsou i $F \wedge G, F \vee G, F \Rightarrow G, F \Leftrightarrow G$ formule,
je-li $F(x)$ formule s volnou proměnnou x , pak jsou formulemi i $(\forall x) F(x), (\exists x) F(x), (\exists! x) F(x)$.

Formule slouží k zapisování vlastností objektů teorie, v axiomech, definicích a větách.

Příklady formulí

Postupným užitím jednotlivých bodů zjistíme, že následující zápisy jsou formule teorie přirozených čísel:

$$x = x$$

$$a + b' = a' + b$$

$$(\forall x) x' = a . b$$

$$(\forall c)(\forall x)(\forall y) c . (x + y) = c . x + c . y$$

$$(\exists e)(\exists ! f) (e + f)' = r$$

Věty musí být uzavřené formule (nemají volné proměnné).

Definice musí splňovat požadavek homogeneity – jsou v nich stejné volné proměnné na obou stranách definiční ekvivalence či definiční rovnosti.

Důležitá poznámka

Jazyk teorie, jehož základní verzi jsme právě vymezili, **se bude** v průběhu výstavby teorie **rozšiřovat**.

Například:

Definicemi zavedeme některé význačné objekty a označíme je tzv. **konstantami**, to budou nové termy.

Jinými definicemi zavedeme **nové relace** (například $<$), a rozšíříme elementární formule.

Formální axiomy teorie přirozených čísel

Axiomy rovnosti

Rovnost přirozených čísel je binární relace a má tři základní vlastnosti:

je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

$$(AR) \quad (\forall x) \quad x = x$$

$$(AS) \quad (\forall x)(\forall y) \quad x = y \Rightarrow y = x$$

$$(AT) \quad (\forall x)(\forall y)(\forall z) \quad x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$$

Axiomy operací

Následovník přirozeného čísla je unární operace.

$$(AO') \quad (\forall x)(\exists! y) \quad y = x'$$

Součet a součin přirozených čísel jsou binární operace.

$$(AO+) \quad (\forall x)(\forall y)(\exists! z) \quad z = x + y$$

$$(AO.) \quad (\forall x)(\forall y)(\exists! z) \quad z = x \cdot y$$

Axiomy invariance

Rovnost je prozatím jedinou binární relací a je invariantní vzhledem ke všem třem operacím.

$$(AI') \quad (\forall x)(\forall y) \ x = y \Rightarrow x' = y'$$

$$(AI+) \quad (\forall x)(\forall y)(\forall z) \ x = y \Rightarrow x + z = y + z \ \wedge \\ \wedge \quad x = y \Rightarrow z + x = z + y$$

$$(AI.) \quad (\forall x)(\forall y)(\forall z) \ x = y \Rightarrow x \cdot z = y \cdot z \ \wedge \\ \wedge \quad x = y \Rightarrow z \cdot x = z \cdot y$$

Děkuji za pozornost

