



**Katedra matematiky
PF UJEP**



Aritmetika s didaktikou I.

KM1 / 0001

Přednáška 07

**Obsahové axiomy teorie přirozených čísel
(Peanovy axiomy)**

O čem budeme hovořit:

- Rozbor Peanových axiomů teorie přirozených čísel
- Problematika axiomu indukce

Peanovy axiomy mají tento tvar

$$(A1) \quad (\exists!x)(\forall y) \, x \neq y'$$

$$(A2) \quad (\forall x)(\forall y) \, x' = y' \Rightarrow x = y$$

$$(A3) \quad (\forall x) \, x + 0 = x$$

$$(A4) \quad (\forall x)(\forall y) \, x + y' = (x + y)'$$

$$(A5) \quad (\forall x) \, x \cdot 0 = 0$$

$$(A6) \quad (\forall x)(\forall y) \, x \cdot y' = x \cdot y + x$$

$$(A7) \quad [F(0) \wedge (\forall x) (F(x) \Rightarrow F(x'))] \Rightarrow (\forall x) F(x)$$

Axiom existence nuly
Axiom prostoty následovníka

Axiom existence nuly

Unární operaci **následovník** si představujeme takto:

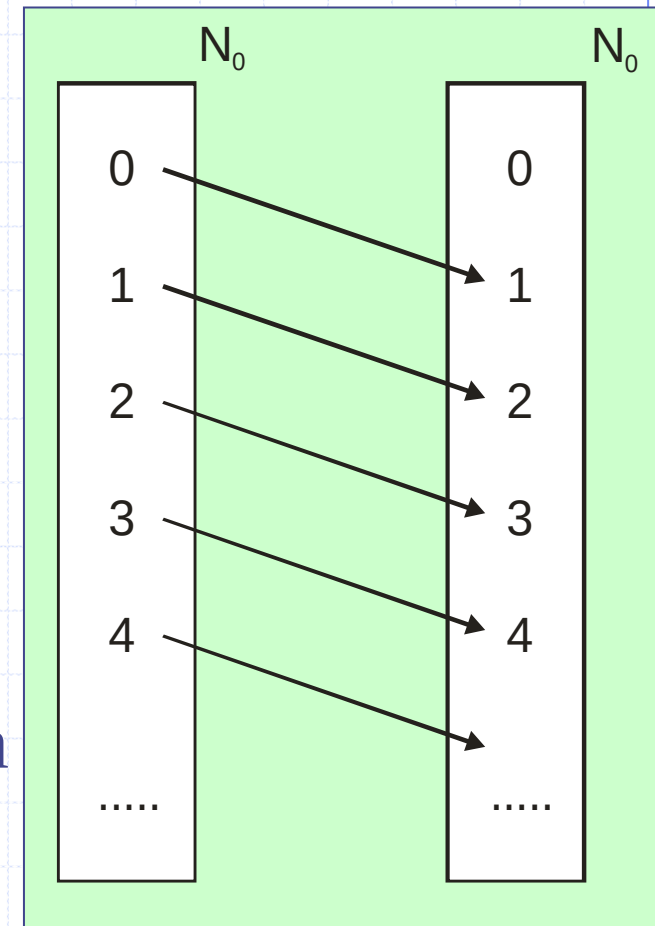
Mezi přirozenými čísly je jediné, které nemá svého předchůdce.

Zapišeme to takto:

$$(\exists! x) \neg (\exists y) x = y'.$$

Provedením negace získáme axiom

$$(A1) \quad (\exists! x)(\forall y) x \neq y'.$$



Definice nuly a dalších konstant

Axiom existence nuly říká, že $(\exists!x)(\forall y) x \neq y'$, existuje tedy jediné přirozené číslo x , které má vlastnost $(\forall y) x \neq y'$ (tedy že nemá žádného předchůdce). Toto určité číslo (konstantu) označíme **0**.

Definice: $x = 0 \iff_D (\forall y) x \neq y'$

Máme-li již definováno číslo **0**, můžeme definovat další konstanty pomocí operace následovníka:

$1 =_D 0'$, $2 =_D 1'$, $3 =_D 2'$, $4 =_D 3'$, atd.

O tyto konstanty rozšíříme vymezení termů, za termy tedy budeme považovat i čísla **0, 1, 2, 3**, atd.

Axiomy prostoty následovníka

Axiom invariance rovnosti vzhledem k operaci následovníka (který jsme již přijali) říká, že:

$$(\forall x)(\forall y) \ x = y \Rightarrow x' = y'$$

Axiom prostoty následovníka je vlastně obrácenou větou:

$$(A2) \quad (\forall x)(\forall y) \ x' = y' \Rightarrow x = y$$

Ekvivalentně jej můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\neg(\exists x)(\exists y) \ x' = y' \wedge x \neq y ,$$

což vyjadřuje, že zobrazení „následovník“ je prosté.

Axiomy sčítání

Axiom neutrality nuly u sčítání

Axiom má tento tvar:

$$(A3) \quad (\forall x) \quad x + 0 = x$$

Vzhledem k tomu, že zatím nemáme odvozeno, že by sčítání bylo komutativní, je to jen „jedna část“ tvrzení o neutralitě nuly.

Představa:

+	0	1	2	3	4	...
0	0					
1	1					
2	2					
3	3					
4	4					
5	5					
6	6					
...	...					

Axiom součtu

Axiom má tento tvar:

$$(A4) \quad (\forall x)(\forall y) \quad x + y' = (x + y)'$$

Jeho význam odhalíme představou tabulky:

+	0	1	2	3	...	y	y'	...	...
0	0								
1	1								
2	2								
...	...								
x	x					$x+y$	$x+y'$		
...	...								

Další sloupce
vyplňujeme
tak, že
zapisujeme
následovníky
čísel vlevo.

Axiomy násobení

Axiom agresivity nuly u násobení

Axiom má tento tvar:

$$(A5) \quad (\forall x) \quad x \cdot 0 = 0$$

Vzhledem k tomu, že zatím nemáme odvozeno, že by násobení bylo komutativní, je to jen „jedna část“ tvrzení o agresivitě nuly.

Představa:

•	0	1	2	3	4	...
0	0					
1	0					
2	0					
3	0					
4	0					
5	0					
6	0					
...	...					

Axiom součinu

Axiom má tento tvar:

$$(A6) \quad (\forall x)(\forall y) \quad x \cdot y' = x \cdot y + x$$

Jeho význam odhalíme představou tabulky:

•	0	1	2	...	y	y'	...
0	0						
1	0						
2	0						
...	...						
x	0				$x \cdot y$	$x \cdot y'$	
...	...						

Čísla v dalších sloupcích vyplňujeme tak, že k číslu vlevo přičteme číslo z předznamenání řádku .

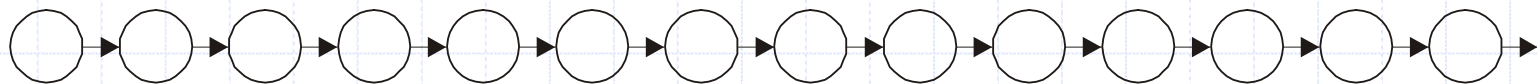
Axiom indukce

Začneme hrou s barvením korálků:

Představme si nekonečnou řadu korálků.

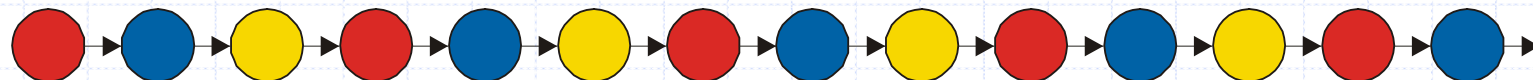
Na základě určitých podmínek budeme usuzovat, jakou mají barvu.

Podstatné je, že nám musí být obarvení korálků zřejmé „až do nekonečna“ !!



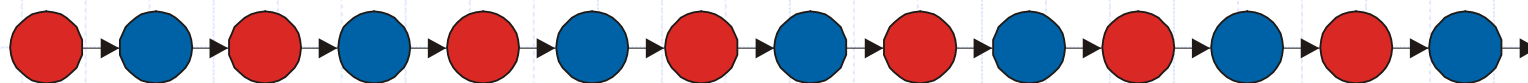
Určete barvy všech korálek, když víte, že:

- Počáteční korálek je červený.
- Jestliže je kterýkoliv z korálek červený, pak následující korálek je modrý.
- Jestliže je kterýkoliv z korálek modrý, pak následující je žlutý.
- Jestliže je kterýkoliv z korálek žlutý, pak následující je červený.



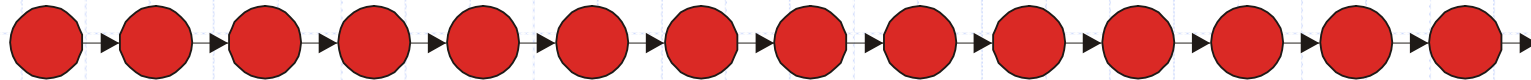
A co když víte, že platí:

- Počáteční korálek je červený.
- Jestliže je kterýkoliv z korálek červený, pak následující korálek je modrý.
- Jestliže je kterýkoliv z korálek modrý, pak následující je červený.



Jaký závěr lze udělat z těchto faktů?

- Počáteční korálek je červený.
- Jestliže je kterýkoliv z korálků červený, pak následující korálek je také červený.



Závěr je: Všechny korálky jsou červené.

Představme si místo korálků čísla

$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow$

Jaký závěr lze udělat z těchto faktů?

- Číslo **0** má vlastnost **F**.
- Jestliže má kterékoliv číslo **x** vlastnost **F**, pak následující číslo **x'** má také vlastnost **F**.

Závěr je: Všechna čísla mají vlastnost F.

Axiom indukce

Vlastnosti přirozených čísel popisujeme formulemi. Když nějaké číslo x má vlastnost F , tak to budeme zapisovat takto: $F(x)$.

Předchozí úvahy pak můžeme zapsat takto:

$$(A7) \quad [F(0) \wedge (\forall x) (F(x) \Rightarrow F(x'))] \Rightarrow (\forall x) F(x)$$

Tento **axiom indukce** budeme používat v důkazech všech obecných vět o přirozených číslech.

Důkaz věty tvaru $(\forall x) F(x)$ bude mít dva kroky:

1) ??? $F(0)$

2) ??? **jestliže platí $F(x)$, pak platí i $F(x')$**

(pro libovolné x)

Děkuji za pozornost

