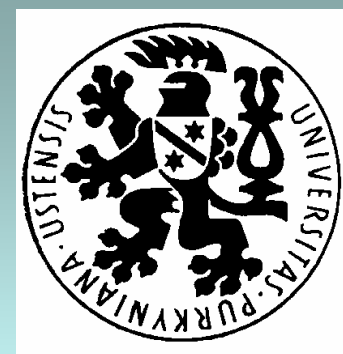




**Katedra matematiky
PF UJEP**



Aritmetika s didaktikou I.

KM1 / 0001

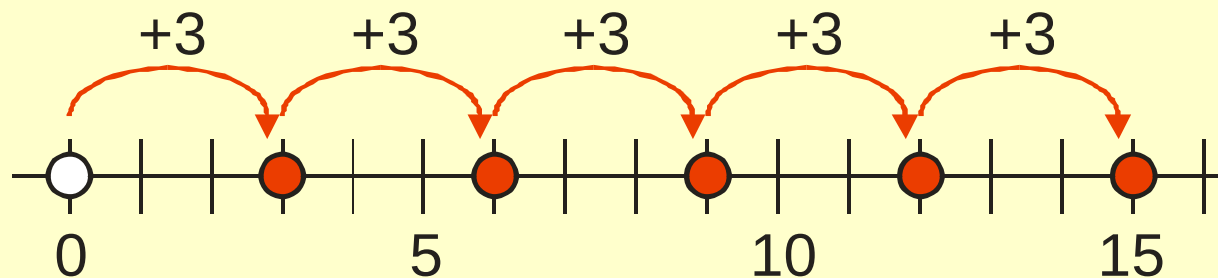
Přednáška 09

Dělitelnost přirozených čísel

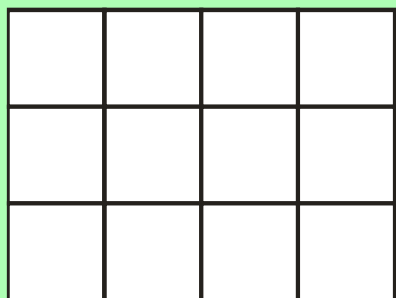
O čem budeme hovořit:

- Zavedeme binární relaci „být dělitelem“ v $\mathbb{N}$
- Vyšetříme její vlastnosti
- Seznámíme se s vlastnostmi prvočísel

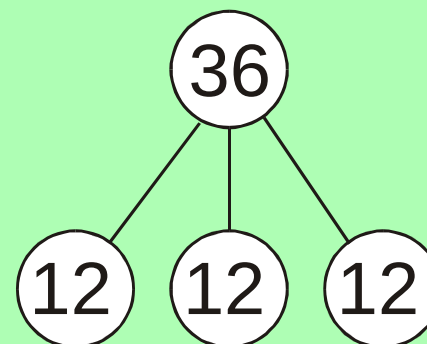
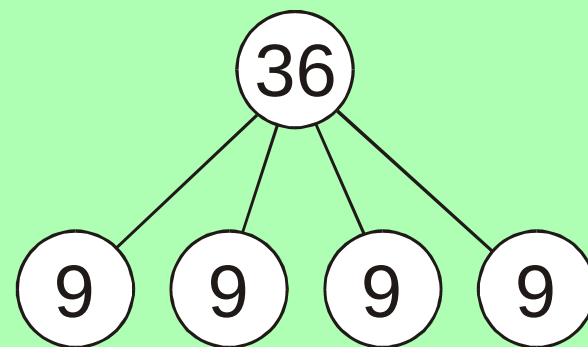
Důležité vizuální představy



$$12 = 2 \cdot 6$$



$$12 = 3 \cdot 4$$



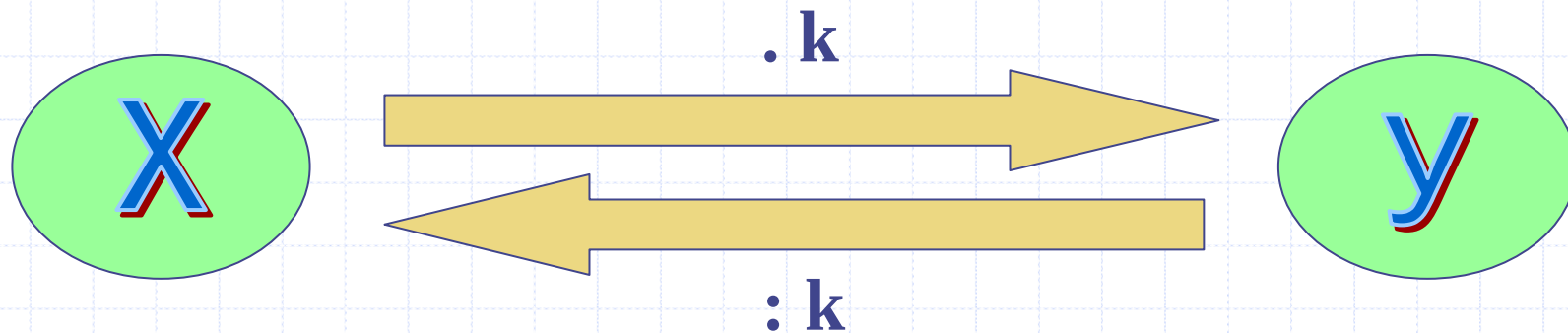
Definice relace „být dělitelem“ a její základní vlastnosti

Definice relace $|$ („být dělitelem“) v $\mathbb{N}$

Definice: Pro libovolná čísla $x, y \in \mathbb{N}$ definujeme

$$x \mid y \Leftrightarrow_D (\exists k \in \mathbb{N}) \quad k \cdot x = y$$

Formuli $x \mid y$ čteme „ x je dělitelem y “,
nebo „ x dělí y “,
nebo „ y je násobkem x “,
nebo „ y je dělitelné x “, a podobně.



Věta $(\forall x \in \mathbb{N}) \quad 1 \mid x \wedge x \mid x$

Druhé tvrzení věty říká, že relace $\mid$ je reflexivní v $\mathbb{N}$.

Důkaz:

Podle definice platí, že

$1 \mid x \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) \quad k \cdot 1 = x$. Stačí volit $k = x$.

Podle definice platí, že

$x \mid x \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) \quad k \cdot x = x$. Stačí volit $k = 1$. ■

Číslo 1 má jen jednoho dělitele – samo sebe.

Každé přirozené číslo větší než 1 má alespoň dva dělitele – číslo 1 a samo sebe (nazýváme je **triviální dělitelé**).

Věta $(\exists x, y \in \mathbb{N}) \ x \mid y \wedge \neg y \mid x$

Výrok „relace $\mid$ je symetrická v $\mathbb{N}$ “ by se zapsal formulí $(\forall x, y \in \mathbb{N}) \ x \mid y \Rightarrow y \mid x$.

Tvrzení věty je negací této formule, tedy:

věta říká, že relace $\mid$ není symetrická v $\mathbb{N}$.

Důkaz:

Stačí volit například $x = 2$, $y = 6$.



Věta $(\forall x, y \in \mathbb{N}) \quad x \neq y \wedge x \mid y \Rightarrow \neg y \mid x$

Věta říká, že relace $\mid$ je antisymetrická v $\mathbb{N}$.

Důkaz:

Z druhého předpokladu věty podle definice vyplývá,
že $(\exists k \in \mathbb{N}) \quad k \cdot x = y$.

Z prvního předpokladu věty plyne, že $k \neq 1$, a tedy
 $k > 1$.

Z toho plyne, že $y > x$, a tedy nemůže platit $y \mid x$. ■

Věta $(\forall x, y, z \in \mathbb{N}) \quad x \mid y \wedge y \mid z \Rightarrow x \mid z$

Věta říká, že relace $\mid$ je tranzitivní v $\mathbb{N}$.

Důkaz:

Z prvního předpokladu věty podle definice vyplývá,
že $(\exists k \in \mathbb{N}) \quad k \cdot x = y$.

Z druhého předpokladu věty podle definice vyplývá,
že $(\exists m \in \mathbb{N}) \quad m \cdot y = z$.

Dosazením získáme: $m \cdot (k \cdot x) = z$,
neboli $(m \cdot k) \cdot x = z$.

Označíme-li $n = (m \cdot k)$, pak platí, že
 $(\exists n \in \mathbb{N}) \quad n \cdot x = z$, tj. platí $x \mid z$. ■

Věta $(\exists x, y \in \mathbb{N}) \ x \neq y \wedge \neg x \mid y \wedge \neg y \mid x$

Výrok „relace $\mid$ je konektivní v $\mathbb{N}$ “ by se zapsal formulí $(\forall x, y \in \mathbb{N}) \ x \neq y \Rightarrow x \mid y \vee y \mid x$.

Tvrzení věty je negací této formule, tedy:

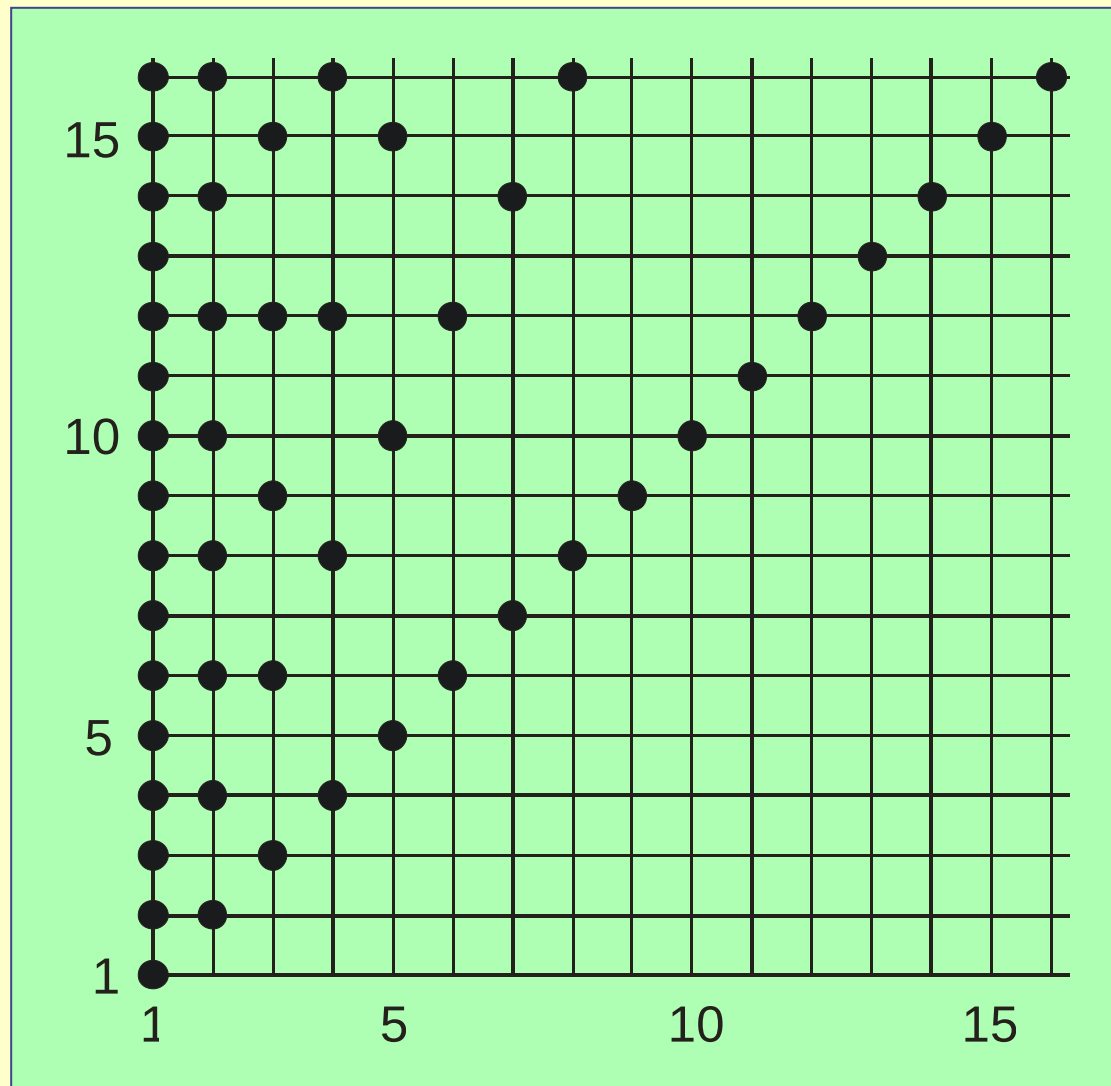
věta říká, že relace $\mid$ není konektivní v $\mathbb{N}$.

Důkaz:

Stačí volit například $x = 2$, $y = 3$. ■

Z předcházejících vět plyne, že relace $\mid$ je neostré nelineární uspořádání v $\mathbb{N}$.

Katrézský graf relace „být dělitelem“



Jak na grafu
nalezneme
násobky daného
čísla?

Jak na grafu
nalezneme k
danému číslu
všechny jeho
dělitele?

Prvočísla

Definice prvočísel a čísel složených

Přirozené číslo, které má **právě dva dělitele** (tedy pouze triviální dělitele) se nazývá **prvočíslo**.

Přirozené číslo, které má **více než dva dělitele** (tedy alespoň jednoho netriviálního dělitele) se nazývá **číslo složené**.

Číslo 1 tedy není ani prvočíslem ani číslem složeným.

	Prvočísla	Čísla složená
1	2, 3, 5, 7, 11, ...	4, 6, 8, 9, 10, ...

Eratosthenovo síto

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70

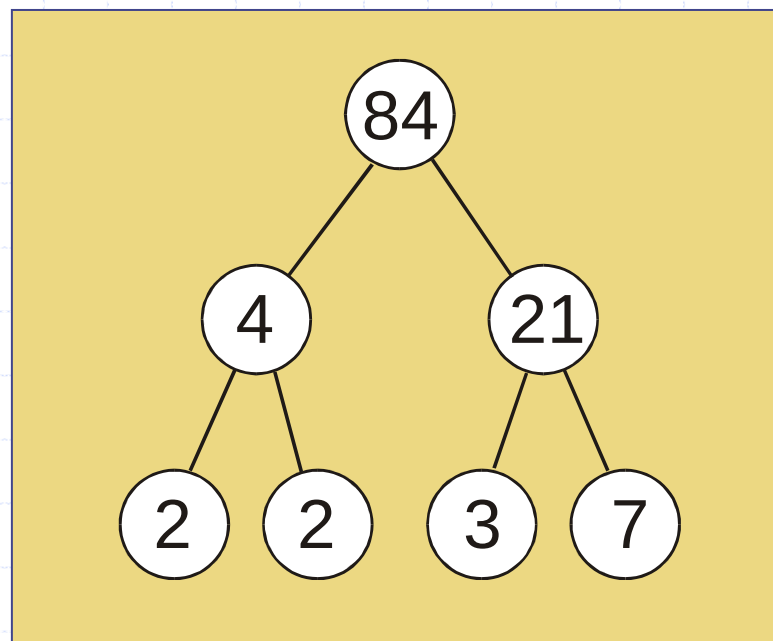
Rozklad čísla na součin prvočísel

Každé přirozené číslo lze rozložit na součin prvočísel.

Například:

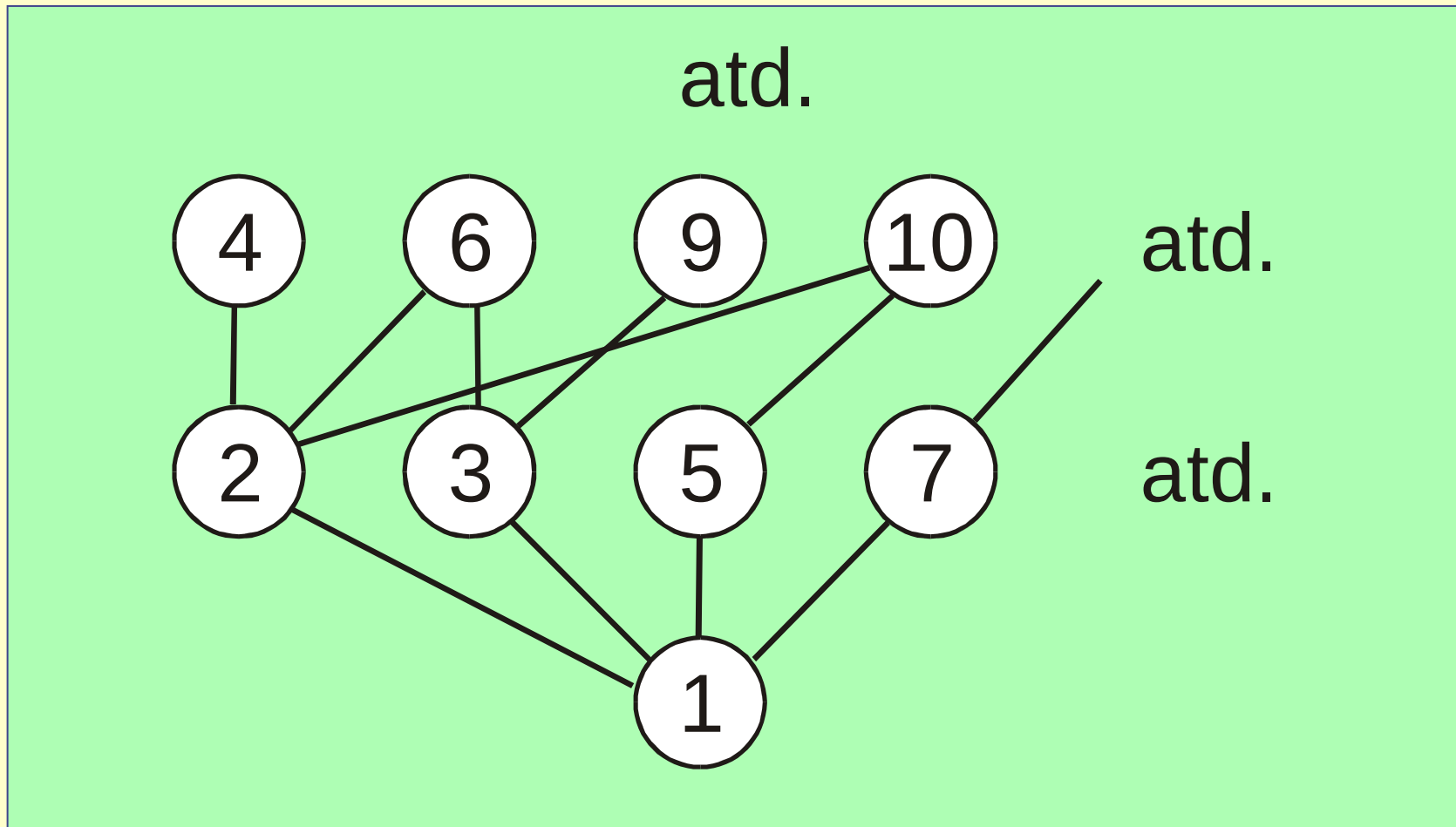
$$\begin{aligned} 36 &= 2 \cdot 18 = \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 9 = \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 90 &= 2 \cdot 45 = \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 15 = \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \end{aligned}$$



**Uspořádáme-li činitele podle velikosti,
je rozklad čísla na součin prvočísel jednoznačný.**

Hasseův diagram množiny N uspořádané relací „být dělitelem“



Prvočíselné rozklady dělitelů čísla

Platí-li pro přirozená čísla x, y , že $x \mid y$, znamená to podle definice, že existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $k \cdot x = y$.

Rozložíme-li všechna čísla k, x, y na součin prvočísel, pak je zřejmé, že platí: **prvočíselný rozklad čísla x je obsažen v prvočíselném rozkladu čísla y .**

Příklad:

$$35 \mid 700, \text{ protože platí } 20 \cdot 35 = 700.$$

Prvočíselné rozklady jsou: $(2 \cdot 2 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 7) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$.

Počet dělitelů daného čísla

Příklad: Prvočíselný rozklad čísla **500** má tvar

$$500 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^3.$$

Dělitelé čísla **500** (kromě čísla **1**) budou tedy mít prvočíselný rozklad složený pouze z činitelů **2** a **5**.

Budou mít tvar $2^a \cdot 5^b$, kde $a \in \{0,1,2\}$, $b \in \{0,1,2,3\}$.

	5^0	5^1	5^2	5^3
2^0	1	5	25	125
2^1	2	10	50	250
2^2	4	20	100	500

Číslo

$500 = 2^2 \cdot 5^3$ má
 $(2+1) \cdot (3+1) = 12$
dělitelů.

Děkuji za pozornost

