



**Katedra matematiky
PF UJEP**



Aritmetika s didaktikou I.

KM1 / 0001

Přednáška 11

Nejmenší společný násobek

Největší společný dělitel

O čem budeme hovořit:

- Nejmenší společný násobek a jeho vlastnosti
- Největší společný dělitel a jeho vlastnosti
- Jejich souvislosti

Základní označení

Pro každé přirozené číslo $a \in \mathbf{N}$ můžeme stanovit množinu všech jeho násobků $\mathbf{Nás}(a)$ a množinu všech jeho dělitelů $\mathbf{Děl}(a)$, které jsou definovány takto:

$$\mathbf{Nás}(a) = \{ x \in \mathbf{N} ; a \mid x \}$$

$$\mathbf{Děl}(a) = \{ x \in \mathbf{N} ; x \mid a \}$$

Zatímco množina $\mathbf{Nás}(a)$ je pro každé a nekonečná, množina $\mathbf{Děl}(a)$ má pro každé a konečný počet prvků.

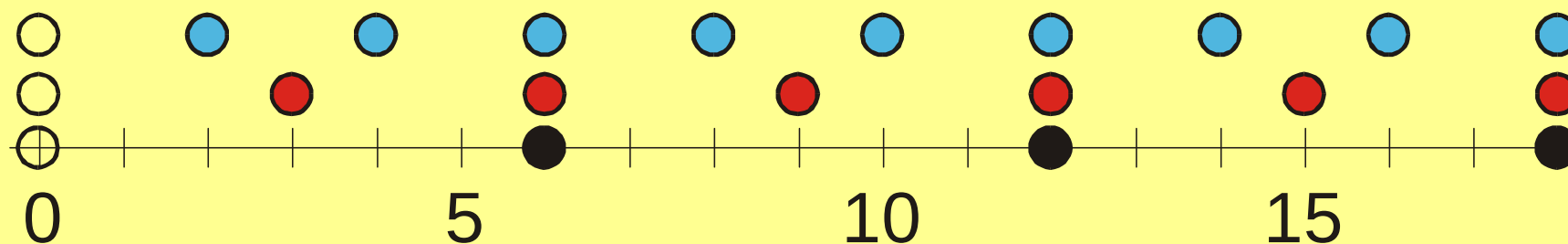
Příklad: Pro číslo 6 platí:

$$\mathbf{Nás}(6) = \{ x \in \mathbf{N} ; 6 \mid x \} = \{ 6 ; 12 ; 18 ; 24 ; \dots \}$$

$$\mathbf{Děl}(6) = \{ x \in \mathbf{N} ; x \mid 6 \} = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 6 \}$$

Nejmenší společný násobek

Vizuální představa



Násobky čísla 2 jsou označeny **modře** a tvoří nekonečnou množinu $\text{Nás}(2)$.

Násobky čísla 3 jsou označeny **červeně** a tvoří nekonečnou množinu $\text{Nás}(3)$.

Černě jsou označeny **společné násobky** čísel 2 a 3, jsou to prvky průniku $\text{Nás}(2) \cap \text{Nás}(3)$.

Nejmenší společný násobek čísel 2 a 3 je tedy

$$\mathbf{n(2;3) = \min (\text{Nás}(2) \cap \text{Nás}(3)) = 6 .}$$

Definice $n(a;b)$

Pro každá dvě přirozená čísla $a, b \in \mathbb{N}$ definujeme jejich **nejmenší společný násobek** $n(a;b)$ takto:

$$n(a;b) = \min (\text{Nás}(a) \cap \text{Nás}(b))$$

Protože součin čísel $a \cdot b$ je jedním ze společných násobků čísel a, b , je množina $\text{Nás}(a) \cap \text{Nás}(b)$ neprázdná, a existuje tedy její nejmenší číslo.

Nejmenší společný násobek je tedy binární operací v množině $\mathbb{N}$.

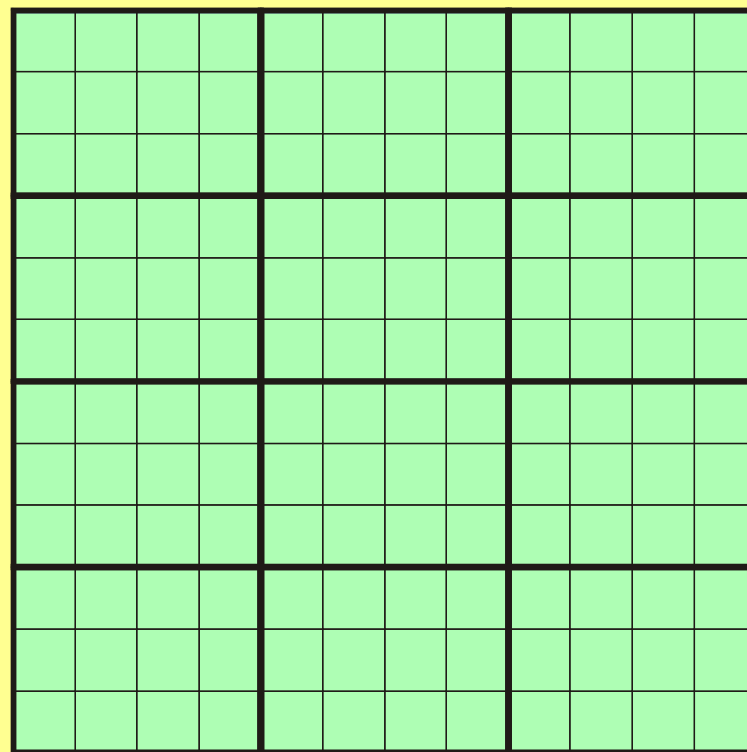
Příklady:

$$\begin{aligned} n(6;8) &= 24 \\ n(6;11) &= 66 \\ n(6;12) &= 12 \end{aligned}$$

Jak souvisí pojem nejmenšího společného násobku s touto úlohou?

Úloha:

Jaký nejmenší počet
dlaždic o rozměrech
15 cm x 20 cm
potřebujeme,
abychom pomocí nich
vydláždili co nejmenší
čtverec?



Řešení:

$$n(15;20) = 60$$

$$60 : 15 = 4$$

$$60 : 20 = 3$$

$$4 \cdot 3 = 12$$

Jak se využívá nejmenší společný násobek při sčítání zlomků?

Příklady: (Který postup je vhodný a který nikoliv?)

$$\frac{3}{10} + \frac{7}{15} = \frac{45+70}{150} = \frac{115}{150} = \frac{23}{30}$$

$$\frac{3}{10} + \frac{7}{15} = \frac{9+14}{30} = \frac{23}{30}$$

Nejvýhodnější volba pro společného jmenovatele je nejmenší společný násobek jmenovatelů obou zlomků.

Co je třeba vědět při vyhledávání nejmenšího společného násobku čísel?

Základní idea:

Prvočíselný rozklad čísla je částí prvočíselného rozkladu každého jeho násobku.

Příklad:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$2 \cdot 12 = 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$3 \cdot 12 = 36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$4 \cdot 12 = 48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$5 \cdot 12 = 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$6 \cdot 12 = 72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$7 \cdot 12 = 84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$

atd.

Jak vyhledáme nejmenší společný násobek větších čísel?

Čísla rozložíme na prvočinitele a sestavíme takový součin, který bude obsahovat co nejméně prvočísel, ale oba rozklady v něm budou obsaženy:

Příklad: Hledáme $n(45;60)$:

$$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$n(45;60) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 180$$

Hledáme $n(924;1050)$:

$$924 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$$

$$1050 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

$$n(924;1050) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 23100$$

Formalizace hledání nejmenšího společného násobku čísel:

Obě čísla vyjádříme jako součiny mocnin stejných prvočísel (exponent může být i nula).

Příklad: Hledáme $n(84;450)$:

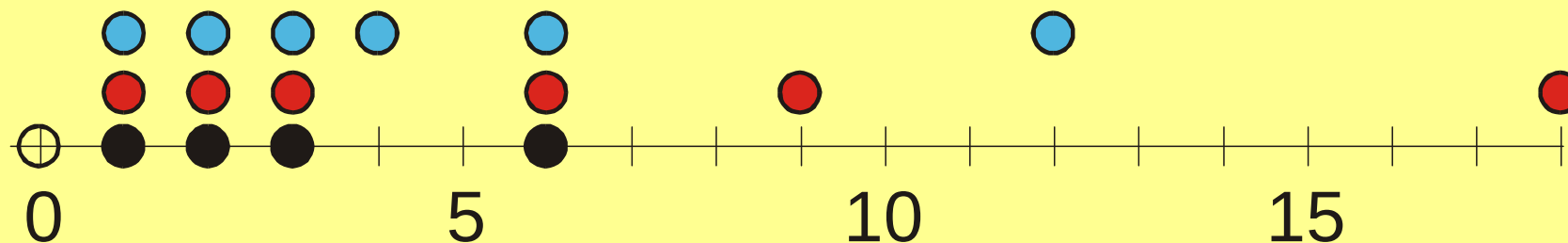
$$\begin{aligned}84 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \\450 &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^0\end{aligned}$$

Nejmenší společný násobek vyjádříme jako součin týchž prvočísel a exponentem u každého prvočísla bude větší z exponentů v obou rozkladech.

$$n(84;450) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 6300$$

Největší společný dělitel

Vizuální představa



Dělitelé čísla 12 jsou označeny **modře** a tvoří množinu **Děl(12)** .

Dělitelé čísla 18 jsou označeny **červeně** a tvoří množinu **Děl(18)** .

Černě jsou označeny **společní dělitelé** čísel 12 a 18, jsou to prvky průniku **Děl(12) ∩ Děl(18)** .

Největší společný dělitel čísel 12 a 18 je tedy

$$\mathbf{D(12;18) = \max (Děl(12) \cap Děl(18)) = 6 .}$$

Definice $D(a;b)$

Pro každá dvě přirozená čísla $a, b \in \mathbb{N}$ definujeme jejich **největší společný dělitel** $n(a;b)$ takto:

$$D(a;b) = \max (D\acute{e}l(a) \cap D\acute{e}l(b))$$

Protože číslo **1** je jedním ze společných dělitelů čísel a, b , je množina $D\acute{e}l(a) \cap D\acute{e}l(b)$ neprázdná, a protože je shora omezená, existuje tedy její největší číslo.

Největší společný dělitel je tedy binární operací v množině $\mathbb{N}$.

Příklady:

$$D(15;20) = 5$$
$$D(11;17) = 1$$

Jak souvisí pojem největšího společného dělitele s touto úlohou?

Úloha:

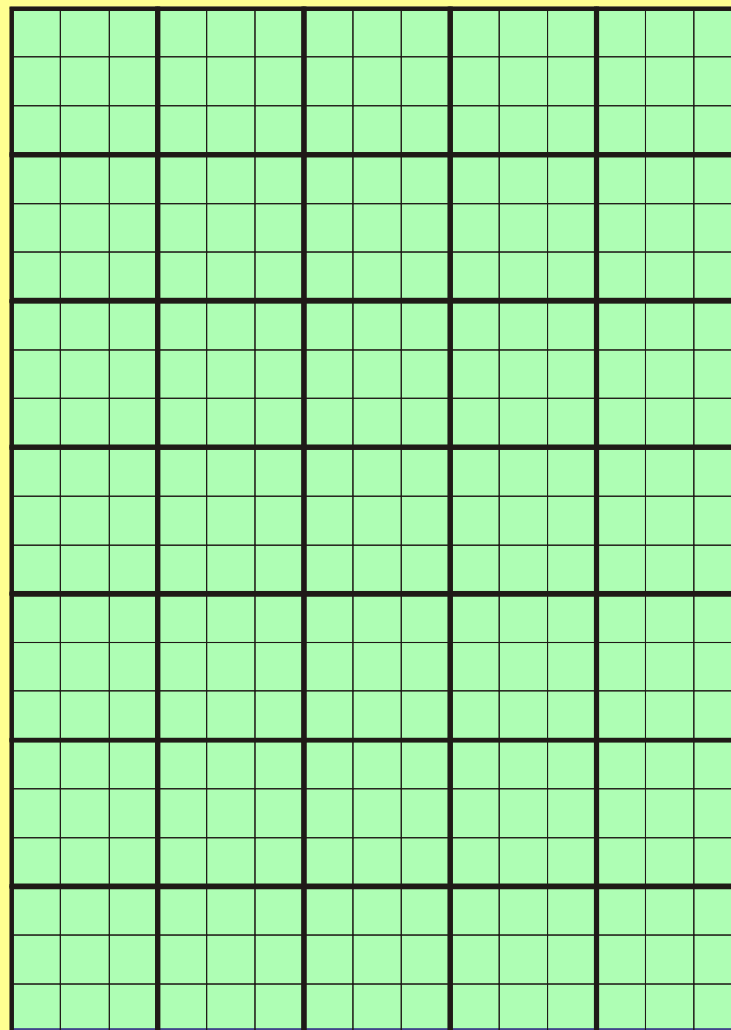
Jaký rozměr mají největší čtvercové dlaždice, pomocí nichž můžeme vydláždit obdélník o rozměrech 150 cm x 210 cm ?
Kolik jich potřebujeme?

Řešení:

$$D(150;210) = 30$$

$$150 : 30 = 5$$

$$210 : 30 = 7 \quad 5 \cdot 7 = 35$$



Jak se využívá největší společný dělitel při krácení zlomků?

Příklady: (Který postup je vhodný a který nikoliv?)

$$\frac{96}{240} = \frac{48}{120} = \frac{16}{40} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{96}{240} = \frac{24 \cdot 4}{24 \cdot 10} = \frac{2}{5}$$

Nejvýhodnější postup při krácení zlomků je krátit největším společným dělitelem čitatele a jmenovatele.

Jak vyhledáme největšího společného dělitele větších čísel?

Čísla rozložíme na prvočinitele a sestavíme takový součin, který bude obsahovat co nejvíce prvočísel, a bude obsažen v obou rozkladech.

Příklady: Hledáme $D(45;60)$:

$$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$D(45;60) = 3 \cdot 5 = 15$$

Hledáme $D(924;1050)$:

$$924 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$$

$$1050 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

$$D(924;1050) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$$

Formalizace hledání největšího společného dělitele čísel:

Obě čísla vyjádříme jako součiny mocnin stejných prvočísel (exponent může být i nula).

Příklad: Hledáme $D(84;450)$:

$$\begin{aligned}84 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \\450 &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^0\end{aligned}$$

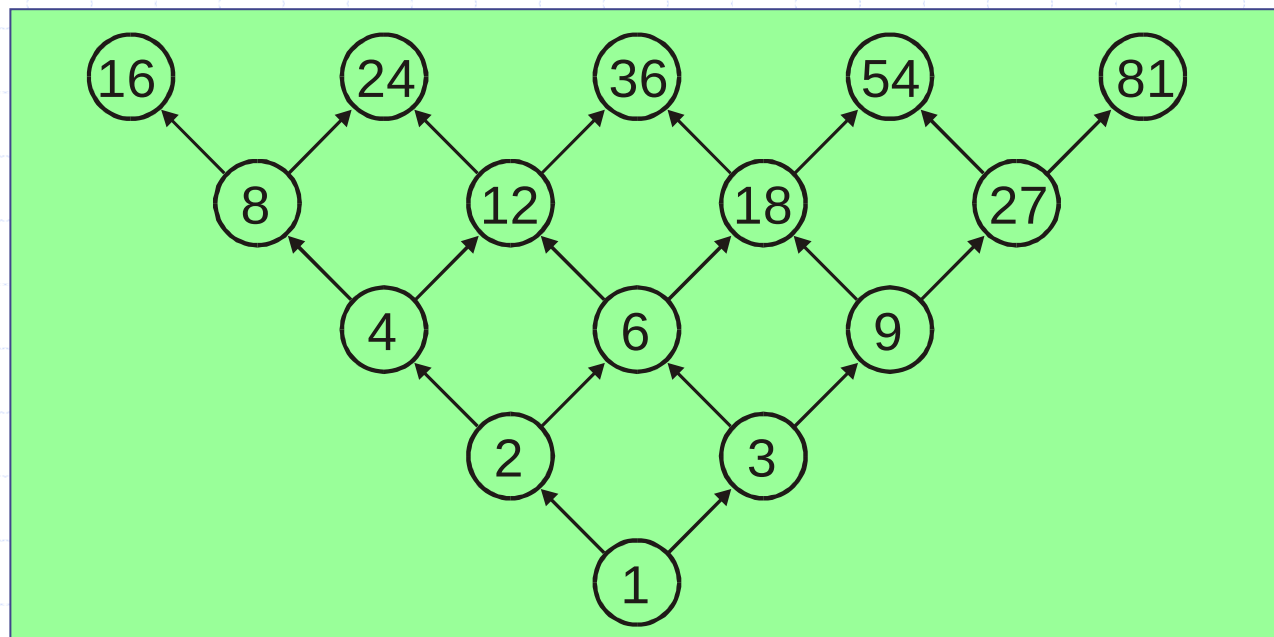
Největší společný dělitel vyjádříme jako součin týchž prvočísel a exponentem u každého prvočísla bude menší z exponentů v obou rozkladech.

$$D(84;450) = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 6$$

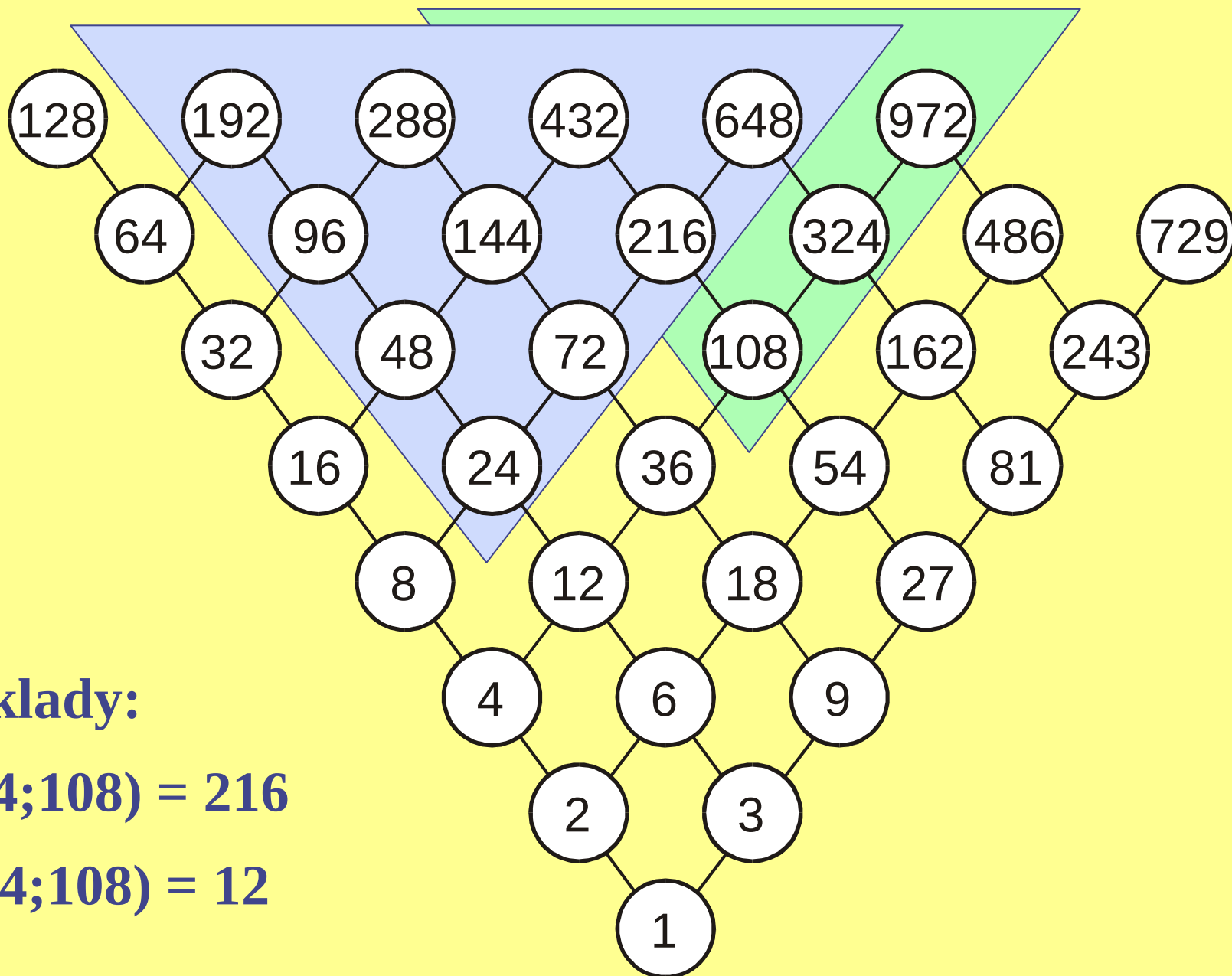
Souvislosti

Vizualizace pojmů násobek a dělitel na Hasseově diagramu:

Sestavme Hasseův diagram čísel, jejichž prvočíselné rozklady obsahují jen prvočísla 2 a 3:



- Kde leží násobky daného čísla?
- Kde nalezneme dělitele daného čísla?



Příklady:

$$n(24;108) = 216$$

$$D(24;108) = 12$$

Důležitá věta o souvislosti

Ilustrujme si její odvození na příkladu:

Necht' třeba $a = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^6 \cdot 11^4 \cdot 13^1$

$$b = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11^1 \cdot 13^2$$

Jak sestavíme nejmenší společný násobek a největší společný dělitel?

$$n = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7^6 \cdot 11^4 \cdot 13^2$$

$$D = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^2 \cdot 11^1 \cdot 13^1$$

Co z toho vyplývá pro součin $n \cdot D$?

Pro libovolná čísla $a, b \in \mathbb{N}$ platí, že :

$$n(a;b) \cdot D(a;b) = a \cdot b$$

Děkuji za pozornost

