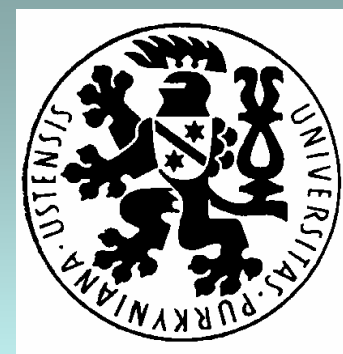




**Katedra matematiky
PF UJEP**



Aritmetika s didaktikou I.

KM1 / 0001

Přednáška 12

Diofantovské rovnice

O čem budeme hovořit:

- **Lineární neurčité rovnice a jejich řešení**
- **Diofantovské rovnice a jejich řešení**

Začneme příkladem:

Úloha: Jeník má v pokladniče dvoukoruny a pětikoruny a celkem má uloženo 30 korun.

Kolik má v pokladniče dvoukorun a pětikorun?

Tuto jednoduchou úlohu můžeme řešit úsudkem: je vhodné postupně uvažovat, jestli je možné, aby v pokladniče byla jedna pětikoruna, dvě, tři, čtyři pětikoruny, atd.

Tak můžeme postupně nalézt všechna řešení:

**bud' 10 dvoukorun a 2 pětikoruny
nebo 5 dvoukorun a 4 pětikoruny .**

Sestavme pro naši úlohu rovnici:

Označme si neznámé:

počet **dvoukorun** v pokladniče **x**

počet **pětikorun** v pokladniče **y**

Snadno pak sestavíme rovnici:

$$2 \cdot x + 5 \cdot y = 30$$

Důležité je si uvědomit, že máme jen **jednu rovnici** pro **dvě neznámé**, a že takovéto rovnice mohou mít více řešení.

Řešením naší rovnice budou všechny uspořádané dvojice $[x ; y] \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, které ji po dosazení splňují.

Lineární neurčité rovnice

Tvar lineární neurčité rovnice

Označení „**neurčitá**“ u rovnice znamená, že rovnice má více neznámých. Označení „**lineární**“ u rovnice znamená, že rovnice má neznámé jen v první mocnině.

Obecný tvar lineární neurčité rovnice tedy je

$$\mathbf{a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = b} ,$$

kde koeficienty $\mathbf{a_1, a_2, \dots, a_n}$ a číslo $\mathbf{b}$ jsou celá čísla a řešením je libovolná **uspořádaná n-tice**

$$[\mathbf{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n}] \in \mathbf{Z \times Z \dots \times Z}$$

nebo
$$[\mathbf{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n}] \in \mathbf{N \times N \dots \times N} .$$

Příklad

Je dána lineární neurčitá rovnice se čtyřmi neznámými u, v, x, y tvaru

$$2 \cdot u - 3 \cdot v - 5 \cdot x + y = 60 ,$$

a řešení hledáme taková, že

$$[u ; v ; x ; y] \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} .$$

Snadno nalezneme z paměti některá řešení, například

$$[30 ; 0 ; 0 ; 0] ,$$

$$[0 ; -20 ; 0 ; 0] ,$$

$$[5 ; -5 ; 1 ; 40] .$$

Úplným řešením rovnice rozumíme nalezení všech uspořádaných čtveřic, které rovnici vyhovují.

Diofantovské rovnice

Tvar a existence řešení diofantovské rovnice

Diofantovskou rovnicí nazýváme lineární neurčitou rovnici se dvěma neznámými. Tyto rovnice mají obecný tvar

$$a \cdot x + b \cdot y = c ,$$

kde koeficienty **a**, **b** a číslo **c** jsou celá čísla a řešením je libovolná **uspořádaná dvojice** $[x; y] \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nebo $[x; y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Lze dokázat, že diofantovská rovnice **je řešitelná v celých číslech** právě tehdy, když platí podmínka

$$D(a;b) \mid c .$$

Příklad

Úplné řešení rovnice $2 \cdot x + 5 \cdot y = 30$

Rovnici máme řešit v přirozených číslech, ale nejprve ji budeme řešit v celých číslech – tam má řešení, neboť $D(2;5) = 1$ a platí tedy podmínka $D(2;5) \mid 30$.

Nejprve vyjádříme z rovnice neznámou x a upravíme vhodně pravou stranu rovnice:

$$2 \cdot x = 30 - 5 \cdot y$$

$$x = \frac{30 - 5 \cdot y}{2}$$

$$x = \frac{30 - 6 \cdot y + y}{2}$$

$$x = 15 - 3 \cdot y + \frac{y}{2}$$

Příklad

Úplné řešení rovnice $2 \cdot x + 5 \cdot y = 30$

Protože x a y jsou celá čísla, musí být v poslední rovnici i zlomek celým číslem a platí tedy, že $2 \mid y$, nebo-li $y = 2 \cdot k$, kde k je celé číslo.

Dosazením za neznámou x pak získáme:

$$x = 15 - 3 \cdot (2 \cdot k) + \frac{2 \cdot k}{2}$$

$$x = 15 - 6 \cdot k + k$$

$$x = 15 - 5 \cdot k$$

Závěr:

Všechna řešení rovnice v celých číslech jsou tvaru $[x; y]$, kde $x = 15 - 5 \cdot k$ a $y = 2 \cdot k$, kde k je celé číslo.

Příklad

Úplné řešení rovnice $2 \cdot x + 5 \cdot y = 30$

Řešení rovnice v přirozených číslech nalezneme řešením soustavy nerovnic $x > 0$ a $y > 0$ vzhledem k parametru k .

$$2 \cdot k > 0$$

$$k > 0$$

$$15 - 5 \cdot k > 0$$

$$5 \cdot k < 15$$

$$k < 3$$

Závěr:

Všechna řešení rovnice v přirozených číslech jsou tvaru $[x; y]$, kde $x = 15 - 5 \cdot k$ a $y = 2 \cdot k$, kde $k \in \{1; 2\}$.

Příklad

Úplné řešení rovnice $2 \cdot x + 5 \cdot y = 30$

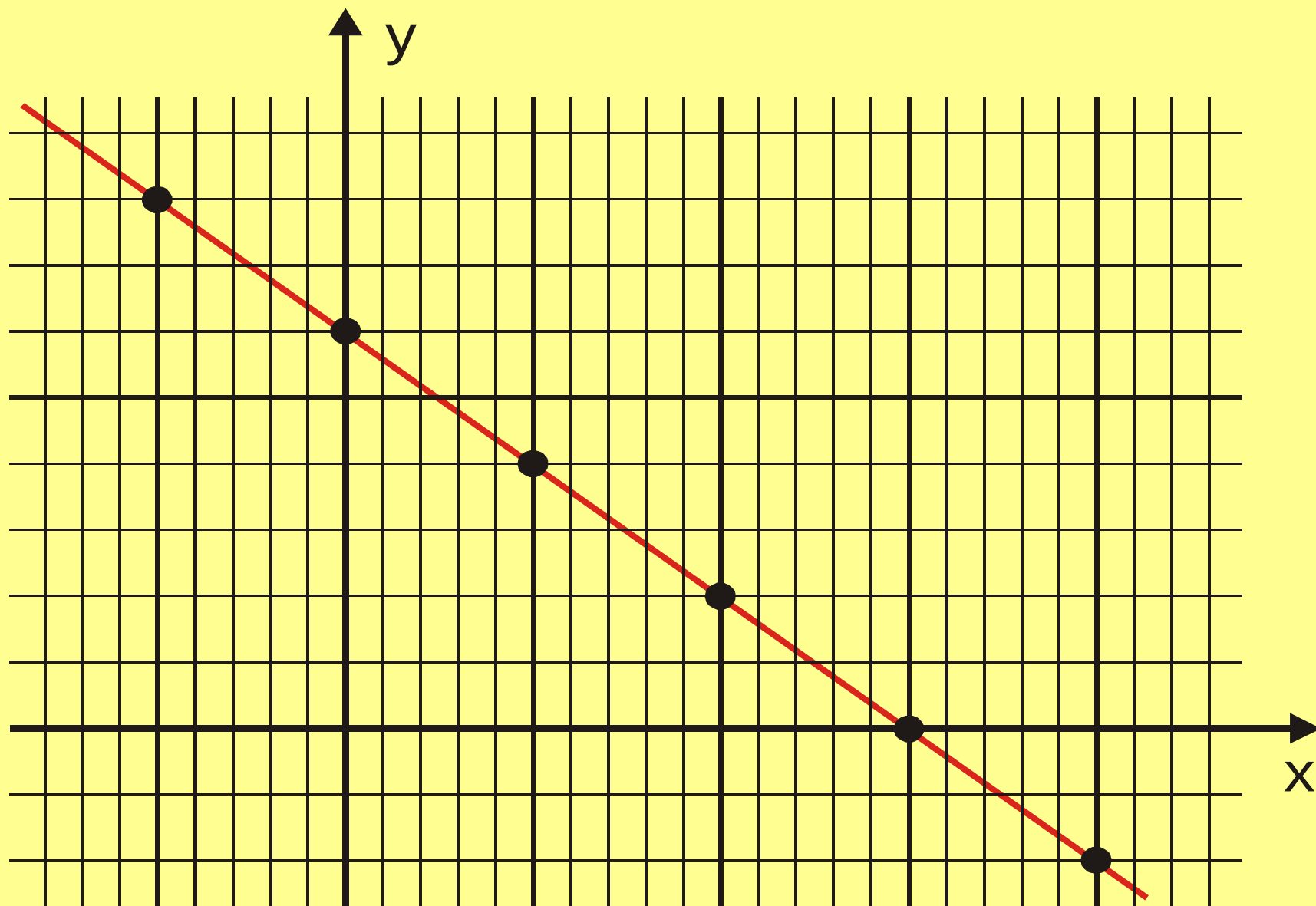
Všechna řešení můžeme přehledně znázornit tabulkou:

k		-1	0	1	2	3	4	
$x = 15 - 5 \cdot k$		20	15	10	5	0	-5	
$y = 2 \cdot k$		-2	0	2	4	6	8	...

Zatímco v celých číslech má rovnice nekonečně mnoho řešení, v přirozených číslech má právě dvě řešení.

Za povšimnutí stojí že čísla ve všech třech řádcích tvoří **aritmetické posloupnosti**.

Grafické znázornění řešení



Další příklad

Řešme rovnici $7 \cdot x - 3 \cdot y = 55$.

Rovnici budeme řešit v celých číslech.

$$3 \cdot y = 7 \cdot x - 55$$

$$y = \frac{6 \cdot x + x - 57 + 2}{3}$$

$$y = 2x - 19 + \frac{x+2}{3}$$



$$k = \frac{x+2}{3}$$

$$3k = x + 2$$

$$y = 2 \cdot (3k - 2) - 19 + k$$



$$x = 3k - 2$$

$$y = 6k - 4 - 19 + k$$

$$y = 7k - 23$$

Přitom $k \in \mathbb{Z}$.

Další příklad

Řešme rovnici $7 \cdot x - 3 \cdot y = 55$.

Můžeme také udělat zkoušku a sestavit tabulku:

$$x = 3k - 2 \quad y = 7k - 23$$

$$7x - 3y = 55$$

$$7 \cdot (3k - 2) - 3 \cdot (7k - 23) = 55$$

$$21k - 14 - 21k + 69 = 55$$

$$55 = 55$$

k		0	1	2	3	4	5	
$x = 3 \cdot k - 2$		-2	1	4	7	10	13	
$y = 7 \cdot k - 23$		-23	-16	-9	-2	5	12	...

Poznámka

Při řešení diofantovské rovnice se může nastat situace, kdy po zavedení prvního parametru (například **k**) bude koeficient u neznámé v absolutní hodnotě větší než 1.

Například při řešení rovnice $5x - 7y = 13$ získáme, že

$$k = \frac{2y + 3}{5}$$

Pak musíme nejprve vyřešit pomocnou diofantickou rovnici $5k - 2y = 3$ pomocí dalšího parametru, například **m**, a pak zpětně dosazovat. Situace se může i několikrát opakovat.

Děkuji za pozornost

