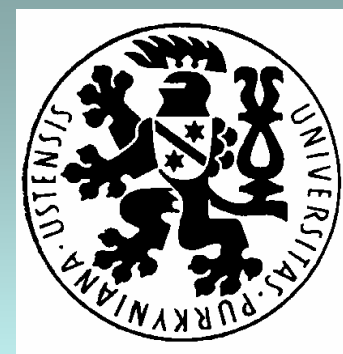




**Katedra matematiky
PF UJEP**



Aritmetika s didaktikou I.

KM1 / 0001

Přednáška 13

Poziční číselné soustavy

O čem budeme hovořit:

- Zapisování čísel v desítkové soustavě
- Pravidla dělitelnosti
- Zapisování čísel v jiných soustavách
- Operace s čísly v jiných soustavách

Zápis čísel v desítkové soustavě

Příklad

Zapíšeme-li číslo **24 402**, určuje **význam** všech číslic jejich **pozice** v celkovém zápisu čísla (každá ze čtyřek znamená něco jiného, stejně tak každá ze dvojek).

Zapišme to podrobně:

$$24\,402 =$$

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot 10\,000 + 4 \cdot 1\,000 + 4 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 2 \cdot 1 = \\ &= 2 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

Analogicky:

$$3\,755 =$$

$$\begin{aligned} &= 3 \cdot 1\,000 + 7 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 5 \cdot 1 = \\ &= 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

Obecný zápis čísel

Zapíšeme-li číslo pomocí číslic $c_n c_{n-1} c_{n-2} \dots c_2 c_1 c_0$, určuje opět **význam** všech číslic jejich **pozice** v zápisu čísla.

Podrobně:

$$\begin{aligned} c_n c_{n-1} \dots c_2 c_1 c_0 &= \\ &= c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

Pravidla dělitelnosti v desítkové soustavě

Pravidlo poslední číslice

Zápis libovolného čísla v desítkové soustavě můžeme upravit takto:

$$\begin{aligned}c_n c_{n-1} \dots c_2 c_1 c_0 &= \\&= c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0 = \\&= 10 \cdot (c_n \cdot 10^{n-1} + c_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + c_2 \cdot 10^1 + c_1) + c_0\end{aligned}$$

První sčítanec je dělitelný číslem **10** (a tedy i čísla **2** a **5**).

O tom, zda je dané číslo dělitelné číslem 10, 2 nebo 5, rozhoduje tedy jeho poslední číslice c_0 .

Pravidlo posledního dvojčíslí

Zápis čísla v desítkové soustavě můžeme upravit takto:

$$c_n c_{n-1} \dots c_2 c_1 c_0 =$$

$$= c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0 =$$

$$= 100 \cdot (c_n \cdot 10^{n-2} + c_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \dots + c_2) + c_1 \cdot 10^1 + c_0$$

První sčítanec je dělitelný číslem **100** (a tedy například i čísla **4** a **25**).

O tom, zda je dané číslo dělitelné číslem 100 a například čísla 4 nebo 25, rozhoduje tedy jeho poslední dvojčíslí $c_1 c_0$.

Pravidlo ciferného součtu

Zápis čtyřciferného čísla $c_3 c_2 c_1 c_0$ v desítkové soustavě můžeme upravit takto:

$$\begin{aligned} c_3 c_2 c_1 c_0 &= \\ &= c_3 \cdot 10^3 + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0 = \\ &= c_3 \cdot (999 + 1) + c_2 \cdot (99 + 1) + c_1 \cdot (9 + 1) + c_0 = \\ &= (c_3 \cdot 999 + c_2 \cdot 99 + c_1 \cdot 9) + (c_3 + c_2 + c_1 + c_0) \end{aligned}$$

První sčítanec je dělitelný číslem 9 (a tedy i číslem 3).

O tom, zda je dané číslo dělitelné čísly 9 nebo 3, rozhoduje tedy jeho ciferný součet $c_3 + c_2 + c_1 + c_0$.

Pravidla dělitelnosti v desítkové soustavě

Dělitelnost číslem	Podmínka
2	poslední číslice je 0, 2, 4, 6, 8
3	ciferný součet je dělitelný 3
4	poslední dvojčíslí je dělitelné 4
5	poslední číslice je 0, 5
6	číslo je dělitelné dvěma a třemi
7	je „složitější“ – postupné odčítání
8	poslední trojčíslí je dělitelné 8
9	ciferný součet je dělitelný 9
10	poslední číslice je 0

Zápis čísel v jiných číselných soustavách

Zápis čísel v soustavě o základu z

V desítkové číselné soustavě (má základ **10**) užíváme mocniny deseti (**$10^n, 10^{n-1}, \dots, 10^2, 10^1, 10^0$**) a číslice nabývají hodnot **0 až 9**.

V číselné soustavě o základu z budeme užívat mocniny daného základu z ($z^n, z^{n-1}, \dots, z^2, z^1, z^0$) a číslice budou nabývat hodnot **0 až $z - 1$** .

Podobně jako v desítkové soustavě pak budeme psát:

$$\begin{aligned} (c_n c_{n-1} \dots c_2 c_1 c_0)_z &= \\ &= c_n \cdot z^n + c_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + c_2 \cdot z^2 + c_1 \cdot z^1 + c_0 \cdot z^0 \end{aligned}$$

Příklady

$$\begin{aligned}(4302)_5 &= 4 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = \\ &= 4 \cdot 125 + 3 \cdot 25 + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = \\ &= 500 + 75 + 0 + 2 = (572)_{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(210121)_3 &= \\ &= 2 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = \\ &= 2 \cdot 243 + 1 \cdot 81 + 0 \cdot 27 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = \\ &= 486 + 81 + 0 + 9 + 6 + 1 = (583)_{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(100101)_2 &= \\ &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \\ &= 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = \\ &= 32 + 0 + 0 + 4 + 0 + 1 = (37)_{10}\end{aligned}$$

Převod desítkového zápisu na zápis v jiné číselné soustavě

Začněme ilustrativním příkladem na „minicomputeru“
(tři kolečka v některém poli budeme nahrazovat
jedním kolečkem na poli o jedno místo vlevo):

Počet devítek	Počet trojek	Počet jednotek	Zápis
		000 000 000 000 000	15
	0	000 000 000 000	1.3 + 12
	00	000 000 000	2.3 + 9
	000	000 000	3.3 + 6
	000 0	000	4.3 + 3
	000 00		5.3 + 0
0	00		1.9 + 2.3 + 0

$$(15)_{10} = 1.9 + 2.3 + 0 = 1.3^2 + 2.3^1 + 0.3^0 = (120)_3$$

Algoritmus převodu desítkového zápisu na zápis v jiné číselné soustavě

Předchozí příklad
jsme mohli
vypočítat rychleji:

$$\begin{array}{l} 15 : 3 = 5 \text{ (0)} \\ 5 : 3 = 1 \text{ (2)} \\ 1 : 3 = 0 \text{ (1)} \end{array} \uparrow \begin{array}{l} (15)_{10} \\ (120)_3 \end{array}$$

Zapišme číslo 23 ve čtyřkové a dvojkové soustavě:

$$\begin{array}{l} 23 : 4 = 5 \text{ (3)} \\ 5 : 4 = 1 \text{ (1)} \\ 1 : 4 = 0 \text{ (1)} \end{array} \uparrow \begin{array}{l} 23 : 2 = 11 \text{ (1)} \\ 11 : 2 = 5 \text{ (1)} \\ 5 : 2 = 2 \text{ (1)} \\ 2 : 2 = 1 \text{ (0)} \\ 1 : 2 = 0 \text{ (1)} \end{array} \uparrow$$
$$(23)_{10} = (113)_4 = (10111)_2$$

Pravidla dělitelnosti v jiných číselných soustavách

Pravidlo poslední číslice

Zápis čísla v číselné soustavě o základu z můžeme upravit takto:

$$\begin{aligned} (c_n c_{n-1} \dots c_2 c_1 c_0)_z &= \\ &= c_n \cdot z^n + c_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + c_2 \cdot z^2 + c_1 \cdot z^1 + c_0 \cdot z^0 = \\ &= z \cdot (c_n \cdot z^{n-1} + c_{n-1} \cdot z^{n-2} + \dots + c_2 \cdot z^1 + c_1) + c_0 \end{aligned}$$

První sčítanec je dělitelný číslem z (a možná dalšími čísly, které jsou děliteli čísla z).

O tom, zda je dané číslo dělitelné číslem z nebo jeho děliteli, rozhoduje tedy jeho poslední číslice c_0 .

$$z^n - 1 = (z - 1) \cdot (z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z^2 + z + 1)$$

Pravidlo ciferného součtu

Zápis čtyřciferného čísla $c_3 c_2 c_1 c_0$ v soustavě o základu z můžeme upravit takto:

$$\begin{aligned} (c_3 c_2 c_1 c_0)_z &= \\ &= c_3 \cdot z^3 + c_2 \cdot z^2 + c_1 \cdot z^1 + c_0 \cdot z^0 = \\ &= c_3 \cdot (z^3 - 1 + 1) + c_2 \cdot (z^2 - 1 + 1) + c_1 \cdot (z - 1 + 1) + c_0 = \\ &= (c_3 \cdot (z^3 - 1) + c_2 \cdot (z^2 - 1) + c_1 \cdot (z - 1)) + (c_3 + c_2 + c_1 + c_0) \end{aligned}$$

První sčítanec je dělitelný číslem $z - 1$ (a možná dalšími čísly, která jsou děliteli čísla $z - 1$).

O tom, zda je dané číslo dělitelné číslem $z - 1$ a jeho děliteli, rozhoduje tedy ciferný součet $c_3 + c_2 + c_1 + c_0$.

Operace s čísly v jiných číselných soustavách

Písemné algoritmy v desítkové soustavě

Tyto algoritmy užívají komutativity a asociativity sčítání a násobení, distributivity násobení vůči sčítání a pozičního zápisu čísel.

$$\begin{aligned} 205 + 187 &= \\ &= (2 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 5 \cdot 1) + \\ &\quad + (1 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 7 \cdot 1) = \\ &= (2+1) \cdot 100 + (0+8) \cdot 10 + (5+7) \cdot 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 205 \cdot 187 &= \\ &= 205 \cdot (1 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 7 \cdot 1) = \\ &= (205 \cdot 1) \cdot 100 + (205 \cdot 8) \cdot 10 + (205 \cdot 7) \cdot 1 \end{aligned}$$

205	205
+ 187	× 187
392	1435
	1640
	205
	38335

Algoritmy v jiných číselných soustavách

Počítáme zcela analogicky:

$$\begin{array}{r} (120)_3 \\ + (212)_3 \\ \hline (1102)_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (31024)_5 \\ + (4133)_5 \\ \hline (40212)_5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (213)_4 \\ \times (213)_4 \\ \hline (1311)_4 \\ (213)_4 \\ \hline (113301)_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (110101)_2 \\ \times (101101)_2 \\ \hline (110101)_2 \\ (110101)_2 \\ (110101)_2 \\ (110101)_2 \\ \hline (100101010001)_2 \end{array}$$

Děkuji za pozornost

