

Pedagogické centrum Ústí nad Labem, o.p.s.

Koněvova 1909/13, PSČ 400 01

adresa pracoviště: Majakovského 2346, PSČ 434 01, Most, IČ 254 974 05

tel.: 476 744 700, email – most@pcul.cz, č.ú. 1030690000/0400



TENTO PROJEKT JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM
SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

Jan Melichar

Utváření a rozvoj klíčových kompetencí

Matematika a její aplikace

2007

Obsah

I.	Obsah vzdělávacího programu „Utváření a rozvoj klíčových kompetencí“
	Matematika a její aplikace
1.	Vzdělávací modul.....
2.	Postup při supervizi.....
3.	Představení absolventských prací.....
II.	Studijní opora vzdělávacího modulu.....
1.	Vyučovací hodina
2.	Vyučovací hodina
3.	Vyučovací hodina
4.	Vyučovací hodina
5.	Vyučovací hodina
6.	Vyučovací hodina
7.	Vyučovací hodina
8.	Vyučovací hodina
9.	Vyučovací hodina
10.	Vyučovací hodina
11.	Vyučovací hodina
12.	Vyučovací hodina
13.	Vyučovací hodina
14.	Vyučovací hodina
15.	Vyučovací hodina
16.	Vyučovací hodina
III.	Témata absolventských prací.....

Obsah vzdělávacího programu „Utváření a rozvoj klíčových kompetencí“

Matematika a její aplikace

Prof. RNDr. Jan Melichar, CSc.

Vzdělávací modul – 16 hodin

1. **Kompetence k učení:** Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace. Její charakteristika.

Účastníci kurzu si formou semináře ujasní vzdělávací obsah vzdělávacího oboru **Matematika a její aplikace**. Prodiskutují jeho čtyři tematické okruhy: Čísla a početní operace, Závislosti, vztahy a práce s daty, Geometrie v rovině a v prostoru, Nestandardní aplikační úlohy a problémy. Bude ukázána vzájemná provázanost mezi předškolní přípravou, 1. stupněm základní školy a 2. stupněm základní školy. Bude věnována rozprava školním vzdělávacím programům vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace.

2. **Kompetence k učení:** Transmisivní přístup k předávání poznatků, didaktický konstruktivismus. Čtyři přístupy k vyučování matematice: Mechanický, strukturalistický, empirický, realistický (Realistické vyučování matematice (Realistic Mathematics Education – RME))

Účastníkům kurzu budou ukázány příklady transmisivního způsobu předávání poznatků v matematice a příklady didaktického konstruktivismu v matematice. Budou ukázány rozdíly těchto přístupů. Didaktický konstruktivismus úzce souvisí s podnětným vyučováním. Účastníci kurzu budou v roli žáka, aby sami poznali vlastní tvůrčí činnost. Bude ukázáno jak mechanický přístup k učení odpovídá chápání učení jako systému reakcí. Žáka můžeme, podobně jako počítač, naprogramovat pomocí drilu k provádění aritmetických, algebraických a geometrických operací a řešení problémů, které lze podle určitých znaků klasifikovat a dále řešit podle určitých vzorců. Strukturalistický přístup k učení bude doložen dvěma příklady: tradiční geometrií uspořádanou na základě axiomatické konstrukce a tzv. moderní matematikou založenou na teorii množin a logice. Pro žáky byl vytvořen strukturovaný svět množin a relací. Bude ukázán empirický přístup, který vychází z potřeb praxe a potřebám praxe má sloužit. Při vyučování jsou využívány zkušenosti žáků, žáci však nejsou vedeni k systematickému a racionálnímu zpracování těchto zkušeností. Při realistickém způsobu se opět se vychází z reálných podnětů, z neustále se rozšiřujícího žákova světa. Žák se stává znovuobjevitelem matematiky, což podněcuje a rozvíjí jeho schopnosti. Realistické vyučování matematice (Realistic Mathematics Education – RME) vychází z principu, že učení matematice znamená konstruování matematiky vlastními postupy žáků od neformálních přístupů spjatých s realitou k něčemu, co je přijatelné jako formální matematika a tím je vlastně didaktický konstruktivismus.

3. **Kompetence k učení :** Matematické myšlení. Konvergentní a divergentní myšlení.

Účastníci kurzu se seznámí s pozorováním a vnímáním. Bude zopakován pojem jako jedna z forem poznání odrážející v našem vědomí a později v našem myšlení podstatné vlastnosti zkoumaných objektů a vztahů. V matematice je pojem označuje nejen termínem, ale i symbolem. Bude ukázáno, že i myšlení je třeba se učit. Dokud nemá dítě rozvinutý informační a paměťový systém, nemůže získávat nové poznatky myšlením a musí se spokojit hlavně poznáváním přímým. Myšlení vzniká a realizuje se v procesu kladení a řešení praktických i teoretických problémů. Bude poukázáno na vlastnosti myšlení: kritičnost, pružnost, šíře a rychlost. Bude ukázána úzká souvislost mezi myšlením a jazykem. Bude poukázáno na logické a funkční

myšlení v matematice. Základním pojmem logického myšlení v matematice je pojem výroku a základním pojmem funkčního myšlení v matematice je pojem proměnné. Bude vysvětlen rozdíl mezi konvergentním (sbíhavým) a divergentním (rozbíhavým) myšlení.

4. **Kompetence k učení:** Pojmotvorný proces v matematice. Obsah a rozsah matematických pojmů.

Účastníci kurzu prodiskutují pojem jako základní stavební kámen pojmotvorného procesu. Pojmy slouží k tomu, abychom si navzájem rozuměli a o napsaném či vysloveném slovu měli v podstatných znacích stejný obraz. Každý pojem má určitý obsah a rozsah. Obsah pojmu tvoří souhrn (množinu) všech vlastností (znaků), které jsou pro tento pojem charakteristické. Některé vlastnosti jsou pro určitý pojem podstatné, pro jiný pojem však nepodstatné. Například velikost úhlu je podstatná vlastnost pro pojem pravoúhlý trojúhelník, nepodstatná pro pojem rovnostranný trojúhelník. Rozsah pojmu tvoří množina všech objektů, které mají vlastnosti (znaky) stanovené jeho obsahem. Formou diskuse budou účastníci probírat rozsah a obsah pojmu např. rovnoběžník, ale i vztahů, např. „rovná se“. Bude se diskutovat o pojmech rodových a druhových. Bude věnována pozornost intuitivnímu poznávání.

5. **Kompetence k řešení problémů:** Teorie problému, problémové vyučování, hrozny problémů v matematice.

Bude věnována pozornost problémovému vyučování, kdy nám jde o postupné řešení, pro výukové cíle vytvořených, problémových situací. Problémová situace představuje více či méně jasně poznanou obtíž, provázenou nesouladem mezi dosavadními znalostmi a tím, co je pro řešení vzniklé nebo zadané úlohy třeba. Úlohu vytvářející problémovou situaci nazýváme problémovou úlohou nebo krátce problémem. Myšlení začíná s problémovou situací. Ne každá problémová situace vyvolává myšlení. Myšlení nevzniká zejména tehdy, když hledání cest k vyřešení problémové situace je pro žáky, v dané etapě vyučování nepřiměřené. Entropie – míra neurčitosti, nám udává náročnost řešení problémové úlohy. Budou ukázány příklady na entropii. Účastníkům kurzu budou ukázány hrozny problémů v matematice. Pojem hrozny problémů zavedl do matematiky Prof. Jan Kopka. Účastníci kurzu budou hledat hrozny problémů ve výuce matematiky.

6. **Kompetence k řešení problémů:** Rutinní problémy, nerutinní problémy, zkoumání v matematice, heuristické strategie, analogie, motivace.

Problém je taková situace v níž máme dosáhnout nějaký cíl, ale přímá cesta k němu je zablokována. Prof. Jan Kopka (UJEP) uvádí, že Problém má tři složky: **Výchozí situaci**, v níž popisujeme souvislosti a poskytujeme informace nebo údaje. **Cíl**, který chce řešitel dosáhnout a **cestu** od výchozí situace k cíli, která pro řešitele může, ale také nemusí být zřejmá či dosažitelná. 1. **Cvičení (rutinní problémy):** Výchozí situace je přesně popsána (situace je uzavřená), cíl je přesně zadán (cíl je uzavřen) a cesta je známa. 2. **Úlohy (nerutinní problémy):** Výchozí situace je přesně popsána (je uzavřená), cíl je přesně zadán (je uzavřen), ale cesta není známa. 3. **Zkoumání** Výchozí situace je přesně popsána, cíl není přesně zadán nebo není zadán vůbec, cesta k cíli není známa. Bude ukázána **heuristická strategie**. Dobré nápady jsou založeny na minulých zkušenostech a dříve získaných znalostech. Budeme sami nacházet v matematice některé obecné závěry, které budou ukazovat na matematické zajímavosti. V určitém okamžiku

přijdeme na matematickou zajímavost a radostně zakřičíme „Našel jsem!“ , řecky „Heuréka!“ a proto se tento způsob hledání nazývá **heuristická strategie**. Budeme systematické experimentování. Využijeme analogií. Vše bude demonstrováno na matematických úlohách. Při motivování získáváme zájem žáků, zaměřujeme jejich pozornost určitým směrem.

7. **Kompetence k řešení problémů.** Řešení jednoduché slovní úlohy a jejich typologie. Analytické a syntetické řešení složené slovní úlohy.

Účastníci kurzu se seznámí s pojmem slovní úlohy, jednoduché a složené slovní úlohy. Proberou si typologii jednoduchých slovních úloh dle početních operací. Budou ukázány rozdíly při řešení jednoduchých slovních úloh. Pochopení řešení jednoduchých slovních úloh umožňuje řešení složených slovních úloh, neboť složené slovní úlohy se řeší jejich rozkladem na úlohy jednoduché. Budou ukázány i typy složených slovních úloh. U řešení složených slovních bude využita analogie.

8. **Kompetence k řešení problémů:** Slovní úlohy na sjednocení dvou množin s neprázdným průnikem.

Účastníci kurzu si zopakují speciální typ slovních úloh na sjednocení dvou množin s neprázdným průnikem. Budou sami tyto úlohy tvořit a ukáží si, jak se při tvorbě úloh mění jejich entropie. Ukáží si jak se tvoří úlohy s jednoznačným řešením i úlohy, které mají více řešení. Problém řešení těchto úloh budou vizualizovat. Vizualizace usnadňuje řešení těchto úloh.

9. **Kompetence k řešení problémů:** Problémové úlohy v oblasti prostorové představivosti.

Důležitým úkolem v oblasti geometrie je rozvoj prostorové představivosti žáků. Vycházíme z matematické představivosti, přecházíme do geometrické představivosti a zde budeme věnovat pozornost představivosti prostorové. Problém řešení úloh z oblasti prostorové představivosti je důležitý pro praktický život člověka. Velmi často zobrazujeme prostor v rovině a opět z roviny se vracíme do prostoru. Začneme pravo-levou orientací a to jak vnitřní, tak vnější. Účastníci kurzu budou se pohybovat po čtvercové síti. Dále budeme pracovat v prostoru a budeme se zabývat procházkami po hranách krychle. Seznámíme se s krychlovou stavebnicí. Budeme zakreslovat půdorysy a různé pohledy na stavby z krychlí. Budeme se zabývat překrýváním geometrických útvarů, které se dá využít ve výtvarné výchově. Seznámíme se s volným rovnoběžným promítáním a s teorií stínů útvarů.

10. **Kompetence komunikativní:** Myšlení a jazyk v matematice. „Matematičtina“.

Myšlení a jazyk jsou vzájemně spjaté jevy, kdy myšlení, jako nejvyšší forma odrazu Skutečnosti, se vyjadřuje a realizuje pomocí jazyka. Myšlení je spojeno s jazykem, fyziologicky je myšlení i jazyk podmíněno druhou signální soustavou a slouží poznávání světa a komunikaci mezi lidmi. Jazyk je způsobem existence myšlení, jeho fyzickým nositelem.

Nejstarší známá definice věty ještě z antiky je „*Oratio est ordinatio dictionum sententiam perfectam demonstrans*“, což značí, že „**Věta** je souvislé seřazení slov vyjadřujících hotovou myšlenku“. Většina publikací českého jazyka uvádí, že „**Věta** je slovní vyjádření myšlenky“.

Podle akademické České mluvnice (Havránek, Jedlička) dělíme druhy vět podle postoje mluvčího na věty oznamovací, tázací, žádací a zvolací. **Věta oznamovací** něco tvrdí, oznamuje, **věta tázací** vyjadřuje otázku, **věta žádací** vyjadřuje rozkaz, zákaz, vybídnutí, žádost nebo přání, aby se něco uskutečnilo. **Věta zvolací** vyjadřuje citový poměr k tomu, co se jí říká, například radost nad něčím, zármutek z něčeho, podiv, opovržení, hrůzu, ošklivost a j. Matematika nejvíce využívá větu oznamovací, kdy smysluplná věta oznamovací je **výrokem**.

Matematika má svůj vlastní způsob vyjadřování, má svoji terminologii a frazeologii. Lze říci, že jde o jazyk, který lze nazvat „matematictina“. Na druhé straně hodina matematiky je současně hodinou českého jazyka a je třeba v hodinách matematiky dodržovat spisovnost českého jazyka.

Jazyk matematiky i je i v jeho symbolice. Například i zápis $1 + 1 = 2$ je věta oznamovací, zapsaná jinými symboly než písmeny abecedy. Matematika má i svůj způsob zápisu čísel a zápisu například geometrických konstrukcí.

Zápis čísel lze provést v různých číselných soustavách a bude ukázáno jak žákům tyto číselné soustavy vysvětlit a to pomocí seskupování, krychlové stavebnice, minikalkulátoru a výpočtem.

11. **Kompetence komunikativní:** Jazyk matematiky a matematická logika.

Základním pojmem logiky je pojem **výroku**. **Výrokem** nazveme každou oznamovací větu, která srozumitelně oznamuje něco, co může být jen pravdivé, anebo nepravdivé. Zde vidíme, proč jsme popsali druhy vět a k čemu je nám oznamovací věta k užítu.

Většina lidí je v domněnku, že výrok je vždy pravdivý. Výrokem je však i oznamovací věta nepravdivá. Oznamovací věta „Jedna a jedna rovná se pěti“ je výrokem. Jde o oznamovací větu, která srozumitelně oznamuje něco co je nepravdivé. Tuto oznamovací větu lze zapsat místo slov číselnými symboly „ $1 + 1 = 5$ “. Zápis je různý, ale slovní vyjádření je stejné. Budeme se zabírat pravdivostí a nepravdivostí výroku. Seznámíme se s negací výroku. Slovo negace je odvozeno z latinského slovesa *negare* což znamená popřít. Shrňme-li vše do závěru pak: **„Jestliže se uvádí ve výroku jedna z několika možností, musí jeho negace zahrnovat všechny ostatní možnosti.“**

V některých výrocích se udává **počet nebo odhad počtu osob, věcí, matematických objektů** a podobně, které mají jistou vlastnost. Jde o údaje vyjádřené slovy: aspoň jeden, aspoň dva, aspoň tři, atd., právě jeden, právě dva, právě tři, atd., nejvýše jeden, nejvýše dva, nejvýše tři, atd., každý, všichni, žádný. Vysvětlíme si stručně význam těchto slov aspoň, právě, nejvýše, každý, všichni, žádný. Využijeme znalostí o nule a přirozených číslech a jejich znázornění na číselné ose. Tyto výroky budeme negovat.

Další problémy jsou se slovy někdo, kdosi, nejméně, bezmála, několik a podobně. Tato slovy musíme nejdříve „přeložit“ do matematického jazyka, do matematické frazeologie.

Budeme se zabývat negací složených výroků. Zavedeme pojem **výroková formule** a probereme pravidla správných úvah. Ukážeme si příklady **výrokových forem**.

12. **Kompetence komunikativní:** Třídění v matematice, definice a věta v matematice.

Obsah pojmu určujeme pomocí definic, rozsah pomocí třídění (klasifikace). Prvky mající tytéž charakteristické základní vlastnosti (znaky) a náležejí do rozsahu daného pojmu tvoří množinu, jejíž prvky se mohou lišit vedlejšími (podružnými) znaky nebo jinou kvalitou či kvantitou charakteristické vlastnosti (znaku). Při třídění (klasifikaci) provádíme rozklad dané množiny (rozsahu pojmu) na třídy (podmnožiny) podle vedlejších vlastností (znaků). Třídění musí splňovat následující podmínky: Musí být úplné, disjunktní a podle téhož

znaku. Účastníci kurzu budou třídit matematické pojmy, tak, aby byly splněny podmínky třídění. Úplné roztrídění prvků, které náleží rozsahu daného pojmu se nazývá **klasifikace** daného pojmu. Bude probrán nejznámější způsob třídění a to **třídění dichotomické**.

S účastníky kurzu se podíváme na způsoby definování pojmů a to definici pomocí specializace jiného pojmu, t. zv. aristotelovskou, případně analytickou definice, někdy též nazývanou formálně-logickou, syntetickou definici, definici abstrakcí, definici kontextuální a definici induktivní.

Matematická věta (poučka) značí nějaký matematický poznatek vyjádřený slovy nebo symbolickým zápisem, jehož pravdivost je zaručena. Z hlediska logiky je matematická věta vždy pravdivý výrok. Budeme však hovořit i o větách, které jsou nepravdivé. Takové věty i když se jejich obsah týká matematické látky pochopitelně nebudou matematickými větami (poučkami). Z kontextu (ze souvislostí) je vždy jasné, kdy se pojem „věta“ užívá ve smyslu věta a kdy ve smyslu gramatickém.

Matematické věty mají zpravidla tvar logické implikace nebo se dají na tento tvar převést: $p \Rightarrow t$ (jestliže platí p , pak platí t).

Výrok p nazýváme **předpokladem** (podmínkou) a výrok t **tvrzením** (závěrem) věty. O matematických větách, které mají strukturu implikace, t. zn. $p \Rightarrow t$, říkáme, že jsou v podmínkovém tvaru.

Matematické věty dokazujeme. Jsou však matematické věty, které nedokazujeme, jejichž pravdivost je ověřená naší zkušeností a praxí, jejich použití dosud nevedlo k rozporu. Tyto matematické věty se nazývají **axiomy**. Účastníci kurzu budou seznámeni s konkrétními příklady.

13. **Kompetence sociální a personální:** Konvergentní a divergentní slovní úlohy.

Konvergentní (sbíhavé) myšlení se uplatňuje v úlohách s jedním správným řešením nebo v úlohách s konečným počtem správných odpovědí. Správná řešení vždy logicky vyplývají z daných informací v úloze. Je to tedy takové myšlení, při kterém se logicky a algoritmicky postupuje ke správnému závěru. Úlohy založené na konvergentním myšlení formují zejména vnímání, rozlišování a poznávání věcí, analýzu a syntézu, indukci a dedukci, paměť a také schopnost aplikace-použití informací, definic a poznatků při řešení školní úlohy či řešení nějakého problému.

Tvořivý jsme tehdy, když se umíme na problém a jeho řešení podívat z nového hlediska. Divergentní (rozbíhavé) nebo též tvůrčí myšlení nabízí žákům příležitost, jak objevit v dané situaci více, než je běžné. Divergentní myšlení se využívá v úlohách, ve kterých není z daných informací přesně známo, jaké bude správné řešení. Žák musí hledat, objevovat a tvořit různé alternativy řešení. Úlohy musí doplňovat o další informace a záleží především na samotném žákovi, jaké informace si do úlohy dodá. Toto myšlení klade důraz na rozmanitost, množství a vhodnost odpovědí. Nevede k jednomu správnému řešení, ale vyžaduje produkci mnoha řešení, která vedou žáky k originálním výsledkům. Účastníci kurzu budou seminární formou vymýšlet a řešit úlohy.

14. **Kompetence občanská:** Dějiny matematiky a jejich využití v současnosti

Účastníci kurzu se seznámí se čtyřmi etapami v dějinách matematiky. Poznájí zápis čísel

a jeho historii. Poznájí historický vývoj početních operací. Proberou matematické osobnosti a stěžejní matematická díla. Pozornost bude věnována matematickému machiavelismu a bude ukázáno, jak lze matematiku ve společnosti využít, ale též zneužít.

15. **Kompetence občanská:** Environmentální výchova, výchova k myšlení v evropských a globálních souvislostech.

Účastníci kurzu si ukáží možnosti environmentální výchovy a výchovy k myšlení v evropských a globálních souvislostech v matematice. Budou tvořit slovní úlohy s dodatečnými otázkami pro žáky, tím budou rozvíjet jejich divergentní myšlení, budou tvořit projekty na uvedené myšlení a bude jim ukázáno jak vést žáky k využití didaktického konstruktivismu při tvorbě těchto úloh.

16. **Kompetence pracovní:** Kalkulátory dříve a dnes – pracovní činnost žáků. Dělitelnost-pracovní činnost žáků.

Účastníci kurzu v rámci dějin matematiky se seznámí s využitím prvního kalkulátoru v matematické historii tj. abaku. Ukáží si jak se na abaku počítalo a jak abakus je možné využít při výuce matematiky při tvůrčí a pracovní činnosti žáků. Ukáží si využití minikalkulátoru při zápisu čísel v různých číselných soustavách a ukáží si jak lze provádět na minikalkulátoru pracovní činnosti výpočty v různých číselných soustavách. Ukáží si jak lze provádět výpočty se zápornými celými čísly na dvoubarevném minikalkulátoru.

Účastníci kurzu prakticky budou řešit pracovní činnosti dělitelnost v oboru přirozených čísel.

Postup při supervizi – 8 hodin:

1. Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace, návaznost na školní vzdělávací programy.
2. Tvorba přípravy na hodinu matematiky, realizace kompetencí a průřezových témat.
3. Obecný přístup s využitím kompetencí k tvorbě slovních úloh na průřezová témata a vlastní tvorba slovních úloh na průřezová témata-využití integrované výuky a mezipředmětových vztahů, využití encyklopedií a Internetu.
4. Obecný přístup s využitím kompetencí k tvorbě zábavných úloh na průřezová témata.a vlastní tvorba zábavných úloh na průřezová témata - využití integrované výuky a mezipředmětových vztahů, využití encyklopedií a Internetu.
5. Obecný přístup s využitím kompetencí k tvorbě projektů na průřezová témata.
6. Tvorba projektů na průřezová témata - využití integrované výuky a mezipředmětových vztahů, využití encyklopedií a Internetu.
7. Tvorba projektů na průřezová témata - využití integrované výuky a mezipředmětových vztahů, využití encyklopedií a Internetu.
8. Shrnutí, zhodnocení a závěr.

Představení absolventských prací – 8 hodin:

Absolventské práce:

Účastníci kurzu využijí svých znalostí z teoretického bloku a z bloku supervize a zpracují absolventskou práci dle svého vlastního výběru. Absolventská práce bude mít úvod, část teoretickou, část praktickou a část výzkumnou. V úvodu uvedou cíl své práce, úkoly, které si vytklý. V teoretické části popíší východiska práce, v praktické části popíší dle vlastního výběru

vlastní slovní úlohy, zábavné úlohy, projekty, tvůrčí matematické laboratoře, spolupráci žáků, spolupráci s rodiči, apod. a ukáží jak realizovali kompetence a průřezová témata Rámcového vzdělávacího programu V části výzkumné budou identifikovat žáky s kterými budou výzkum provádět, ověřit účinnost vlastních námětů, popíši klady a zápory jak žáci pracovali. Najdou cesty jak napravit chyby, kterých se žáci dopouštěli. Popíši způsob pedagogického výzkumu. Mohou použít matematické statistiky. Provedou sebereflexi absolventské práce.

Kriteria hodnocení absolventské práce:

- 1) Přínos absolventské práce
- 2) Originalita absolventské práce
- 3) Způsob zpracování obsahu absolventské práce
- 4) Naplnění kompetencí Rámcového vzdělávacího programu
- 5) Využití průřezových témat Rámcového vzdělávacího programu
- 6) Formální zpracování absolventské práce
- 7) Naplnění cíle absolventské práce

1. vyučovací hodina:

Kompetence k učení . Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace. Její charakteristika.

V Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání se pro vzdělávací oblast Matematika a její aplikace uvádí:

5.2 MATEMATIKA A JEJÍ APLIKACE

Charakteristika vzdělávací oblasti

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je v základním vzdělávání založena především na aktivních činnostech, které jsou typické pro práci s matematickými objekty a pro užití matematiky v reálných situacích. Poskytuje vědomosti a dovednosti potřebné v praktickém životě a umožňuje tak získávat matematickou gramotnost. Pro tuto svoji nezastupitelnou roli prolíná celým základním vzděláváním a vytváří předpoklady pro další úspěšné studium.

Vzdělávání klade důraz na důkladné porozumění základním myšlenkovým postupům a pojmům matematiky a jejich vzájemným vztahům. Žáci si postupně osvojují některé pojmy, algoritmy, terminologii, symboliku a způsoby jejich užití.

Vzdělávací obsah vzdělávacího oboru **Matematika a její aplikace** je rozdělen na čtyři tematické okruhy. V tematickém okruhu *Čísla a početní operace* na prvním stupni, na který navazuje a dále ho prohlubuje na druhém stupni tematický okruh *Číslo a proměnná*, si žáci osvojují aritmetické operace v jejich třech složkách: dovednost provádět operaci, algoritmické porozumění (proč je operace prováděna předloženým postupem) a významové porozumění (umět operaci propojit s reálnou situací). Učí se získávat číselné údaje měřením, odhadováním, výpočtem a zaokrouhlováním. Seznamují se s pojmem proměnná a s její rolí při matematizaci reálných situací.

V dalším tematickém okruhu *Závislosti, vztahy a práce s daty* žáci rozpoznávají určité typy změn a závislostí, které jsou projevem běžných jevů reálného světa, a seznamují se s jejich reprezentacemi. Uvědomují si změny a závislosti známých jevů, docházejí k pochopení, že změnou může být růst i pokles a že změna může mít také nulovou hodnotu. Tyto změny a závislosti žáci analyzují z tabulek, diagramů a grafů, v jednoduchých případech je konstruuji a vyjadřují matematickým předpisem nebo je podle možností modelují s využitím vhodného počítačového software nebo grafických kalkulátorů. Zkoumání těchto závislostí směřuje k pochopení pojmu funkce.

V tematickém okruhu *Geometrie v rovině a v prostoru* žáci určují a znázorňují geometrické útvary a geometricky modelují reálné situace, hledají podobnosti a odlišnosti útvarů, které se vyskytují všude kolem nás, uvědomují si vzájemné polohy objektů v rovině (resp. v prostoru), učí se porovnávat, odhadovat, měřit délku, velikost úhlu, obvod a obsah (resp. povrch a objem), zdokonalovat svůj grafický projev. Zkoumání tvaru a prostoru vede žáky k řešení polohových a metrických úloh a problémů, které vycházejí z běžných životních situací.

Důležitou součástí matematického vzdělávání jsou *Nestandardní aplikační úlohy a problémy*, jejichž řešení může být do značné míry nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky, ale při němž je nutné uplatnit logické myšlení. Tyto úlohy by měly prolínat všemi tematickými okruhy v průběhu celého základního vzdělávání. Žáci se učí řešit problémové situace a úlohy z běžného života, pochopit a analyzovat problém, utřídit údaje a podmínky, provádět situační náčrty, řešit optimalizační úlohy. Řešení logických úloh, jejichž obtížnost je závislá na míře rozumové vyspělosti žáků, posiluje vědomí žáka ve vlastní schopnosti logického uvažování a může podchytit i ty žáky, kteří jsou v matematice méně úspěšní.

Žáci se učí využívat prostředky výpočetní techniky (především kalkulátory, vhodný počítačový software, určité typy výukových programů) a používat některé další pomůcky, což umožňuje přístup

k matematice i žákům, kteří mají nedostatky v numerickém počítání a v rýsovacích technikách. Zdokonalují se rovněž v samostatné a kritické práci se zdroji informací.

Cílové zaměření vzdělávací oblasti

Vzdělávání v dané vzdělávací oblasti směřuje k utváření a rozvíjení klíčových kompetencí tím, že vede žáka k:

- využívání matematických poznatků a dovedností v praktických činnostech - odhady, měření a porovnávání velikostí a vzdáleností, orientace
- rozvíjení paměti žáků prostřednictvím numerických výpočtů a osvojováním si nezbytných matematických vzorců a algoritmů
- rozvíjení kombinatorického a logického myšlení, ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci prostřednictvím řešení matematických problémů
- rozvíjení abstraktního a exaktního myšlení osvojováním si a využíváním základních matematických pojmů a vztahů, k poznávání jejich charakteristických vlastností a na základě těchto vlastností k určování a zařazování pojmů
- vytváření zásoby matematických nástrojů (početních operací, algoritmů, metod řešení úloh) a k efektivnímu využívání osvojeného matematického aparátu
- vnímání složitosti reálného světa a jeho porozumění; k rozvíjení zkušenosti s matematickým modelováním (matematizací reálných situací), k vyhodnocování matematického modelu a hranic jeho použití; k poznání, že realita je složitější než její matematický model, že daný model může být vhodný pro různorodé situace a jedna situace může být vyjádřena různými modely
- provádění rozboru problému a plánu řešení, odhadování výsledků, volbě správného postupu k vyřešení problému a vyhodnocování správnosti výsledku vzhledem k podmínkám úlohy nebo problému
- přesnému a stručnému vyjadřování užíváním matematického jazyka včetně symboliky, prováděním rozborů a zápisů při řešení úloh a ke zdokonalování grafického projevu
- rozvíjení spolupráce při řešení problémových a aplikovaných úloh vyjadřujících situace z běžného života a následně k využití získaného řešení v praxi; k poznávání možností matematiky a skutečnosti, že k výsledku lze dospět různými způsoby
- rozvíjení důvěry ve vlastní schopnosti a možnosti při řešení úloh, k soustavné sebekontrolě při každém kroku postupu řešení, k rozvíjení systematickosti, vytrvalosti a přesnosti, k vytváření dovednosti vyslovovat hypotézy na základě zkušenosti nebo pokusu a k jejich ověřování nebo vyvracení pomocí protipříkladů

5.2.1 MATEMATIKA A JEJÍ APLIKACE

Vzdělávací obsah vzdělávacího oboru

1. stupeň

ČÍSLO A POČETNÍ OPERACE

Očekávané výstupy - 1. období

žák

- *používá přirozená čísla k modelování reálných situací, počítá předměty v daném souboru, vytváří soubory s daným počtem prvků*
- *čte, zapisuje a porovnává přirozená čísla do 1 000, užívá a zapisuje vztah rovnosti a nerovnosti*
- *užívá lineární uspořádání; zobrazí číslo na číselné ose*

- *provádí z paměti jednoduché početní operace s přirozenými čísly*
- *řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace*

Očekávané výstupy - 2. období

žák

- *využívá při pamětném i písemném počítání komutativnost a asociativnost sčítání a násobení*
- *provádí písemné početní operace v oboru přirozených čísel*
- *zaokrouhluje přirozená čísla, provádí odhady a kontroluje výsledky početních operací v oboru přirozených čísel*
- *řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace v celém oboru přirozených čísel*

Učivo

- obor přirozených čísel
- zápis čísla v desítkové soustavě, číselná osa
- násobilka
- vlastnosti početních operací s přirozenými čísly
- písemné algoritmy početních operací

ZÁVISLOSTI, VZTAHY A PRÁCE S DATY

Očekávané výstupy - 1. období

žák

- *orientuje se v čase, provádí jednoduché převody jednotek času*
- *popisuje jednoduché závislosti z praktického života*
- *doplňuje tabulky, schémata, posloupnosti čísel*

Očekávané výstupy - 2. období

žák

- *vyhledává, sbírá a třídí data*
- *čte a sestavuje jednoduché tabulky a diagramy*

Učivo

- závislosti a jejich vlastnosti
- diagramy, grafy, tabulky, jízdní řády

GEOMETRIE V ROVINĚ A V PROSTORU

Očekávané výstupy - 1. období

žák

- *rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa; nachází v realitě jejich reprezentaci*
- *porovnává velikost útvarů, měří a odhaduje délku úsečky*
- *rozezná a modeluje jednoduché souměrné útvary v rovině*

Očekávané výstupy - 2. období

žák

- *narysuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnici); užívá jednoduché konstrukce*
- *sčítá a odčítá graficky úsečky; určí délku lomené čáry, obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran*

- *sestrojí rovnoběžky a kolmice*
- *určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu*
- *rozpozná a znázorní ve čtvercové síti jednoduché osově souměrné útvary a určí osu souměrnosti útvaru překládáním papíru*

Učivo

- **základní útvary v rovině** - lomená čára, přímka, polopřímka, úsečka, čtverec, kružnice, obdélník, trojúhelník, kruh, čtyřúhelník, mnohoúhelník
- **základní útvary v prostoru** - kvádr, krychle, jehlan, koule, kužel, válec
- délka úsečky; jednotky délky a jejich převody
- obvod a obsah obrazce
- vzájemná poloha dvou přímek v rovině
- osově souměrné útvary

NESTANDARDNÍ APLIKAČNÍ ÚLOHY A PROBLÉMY

Očekávané výstupy - 2. období

žák

- *řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky*

Učivo

- slovní úlohy
- číselné a obrázkové řady
- magické čtverce
- prostorová představivost

Například Základní škola v Čížkovicích si vzdělávací obsah vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace do jednotlivých ročníků (autorka Mgr. Marie Holešovská) rozdělila takto:

1. období : 1. – 3. ročník

Do první třídy přicházejí děti s nestálou a rozptýlenou pozorností, mnozí neumějí naslouchat. Hodiny matematiky dávají prostor k tomu, aby se žáci učili pozorně naslouchat slovům učitele. Pojmy čísel první desítky a výkony s nimi prováděné se vyvozují zásadně pomocí názorných pomůcek – konkrétních věcí, obrázků. Vždy ve spojení s manipulací každého žáka s uvedenými pomůckami. Tyto činnosti pomáhají lehce podchytit pozornost žáků. Uvedené činnosti napomáhají tomu, že lze brzy pracovat s celým žákovským kolektivem a docílit pozornosti všech žáků. Pomůcky v rukou žáků a činnosti s nimi prováděné umožňují učiteli okamžitou zpětnou vazbu a možnost reagovat na úroveň zvládnutí učiva žáky.

V systému vyučovacích hodin činnostní učení matematice nové učivo vyplývá z předcházejícího a zároveň je základem a oporou pro učivo následující. Časem se stává, že žáci nové učivo objeví sami a často jim ani nepřipadá nové. K tomu je zapotřebí žákům dopomoci určitým upozorněním učitele, otázkou nebo doporučením, co pozorovat. *Žákům je zapotřebí dát dostatečný prostor na objev poznávaného jevu i na jeho zvládnutí a procvičení.* Postupně vedeme žáky k tomu, že se dovedou o učeném jevu vyjadřovat v matematice jasně, souvisle a přesvědčivě.

Při řešení slovních úloh by měl být žák jejich tvůrcem, vynálezcem i řešitelem. Úsilí, které žáci vynakládají, působí příznivě na jejich rozumový vývoj. Rozvíjena je přitom samostatnost žáka i jeho tvořivost.

Celé první období se v matematice kladou základy počítání z paměti. Žáci se učí způsoby pamětného sčítání, odečítání, násobení a dělení v oboru do 100 i do 1000. Zájem žáků o počítání z paměti se navozuje vhodnou motivací a poznáním, že je v jeho schopnostech úlohy řešit.

Žáci se seznamují od 1. ročníku s prací na počítači a využívají v matematice jednoduché počítačové hry, hlavně vhodné k procvičování vidění počtu věcí, přiřazování čísla k určitému počtu věcí, porovnávání počtu věcí a čísel a též k procvičování početních výkonů. Tyto dovednosti se rozvíjí ve 2. a 3. ročníku základního vzdělávání.

Obsah učiva v jednotlivých ročnících

1. ročník – časová dotace 4 hodiny týdně

Učivo	Výstupy
Úvodem	- žák počítá obrázky, předměty, porovnává jejich množství, poznává čísla a čte je.
Přirozená čísla 1 – 20 Číslo 0 Sčítání a odečítání do 20 bez přechodu desítky. Seznámení se sčítá- ním a odečítáním do 20 s přechodem desítky.	- žák čísla čte, píše a porovnává – rozezná číslice psací a tiskací - počítá předměty v oboru do 20 - doplnění chybějících čísel v řadě - sčítá a odečítá v oboru do 20 bez přechodu desítky - rozkládá čísla - provádí z paměti i písemně jednoduché početní operace - rozumí pojmu „záměna sčítanců“ a užívá jej v praxi - rozumí pojmu zvětšujeme a zmenšujeme - počítá „číselné řetězce“ v oboru do 20 - názorné sčítání a odečítání v oboru do 20 s přechodem desítky - orientuje se v číselné řadě do 20 - orientuje se a zobrazí číslo na číselné ose - porovnává přirozená čísla ($>$ $<$ $=$) - řeší slovní úlohy se sčítáním a odečítáním v oboru 0-20 bez přechodu desítky - řeší slovní úlohy typu „o více“ a „o méně“ - rozumí pojmu sloupec a řádek
Geometrie (průběžně)	- orientace v prostoru (před, za, vedle, vpravo, vlevo, nahoře, dole, uprostřed, hned před, hned za) - rozezná, pojmenuje a nakreslí základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník, kruh) - rozezná, pojmenuje a vymodeluje jednoduchá tělesa (koule, krychle, válec)

2. ročník – časová dotace 5 hodin týdně

Učivo	výstupy
Úvodem opakování učiva z 1. ročníku	- žák počítá a bezpečně ovládá příklady na sčítání a odečítání do 20 bez přechodu desítky. - s přechodem desítky počítá s názorem
Sčítání a odečítání S přechodem desítky do 20	- sčítá a odečítá s přechodem desítky do 20 - řeší příklady s jednou závorkou - početní operace provádí písemně i z paměti - řeší slovní úlohy a sám je tvoří - řeší slovní úlohy typu „o více“ a „o méně“ - v praxi využívá znalosti o záměně sčítanců
Přirozená čísla do 100, písemné sčítání a odečítání do 100	- čte, zapisuje a porovnává čísla do 100 - vytvoří konkrétní soubory (na počítadle, penězi, ve čtvercové síti), s daným počtem prvků do 100 - sčítá a odečítá desítky - orientuje se na číselné ose - rozkládá čísla na desítky a jednotky - vyhledává a zobrazí čísla na číselné ose - orientuje se v číselné řadě do 100 - počítá po 1,2,3,4,5,10 do 100 - užívá spoje násobílek 2,3,4,5 - dělí v oboru násobílek 2,3,4,5 - automatizace spojů násobílek 2,3,4,5 - řeší a tvoří jednoduché slovní úlohy - zaokrouhluje čísla na desítky - sčítá a odečítá bez přechodu desítky do 100 - sčítá a odečítá s přechodem desítky do 100 - řeší slovní úlohy typu „o méně“ a „o více“ - řeší slovní úlohy se dvěma početními výkony (např. násobení, sčítání) - řeší slovní úlohy x-krát více, x-krát méně - řeší příklady s jednou závorkou - provádí písemné sčítání a odečítání dvojčíferných čísel v oboru přirozených čísel do 100 - rozumí pojmu sloupec a řádek
Geometrie (průběžně)	- žák chápe pojem kreslení a rýsování – kreslí rovné a křivé čáry - zná pojem bod, přímka a úsečka - označuje body a úsečky velkými písmeny, přímky označuje malými psacími písmeny - osvojuje si správné návyky při rýsování – práce s pravítkem - rýsuje, měří a odhaduje délku úsečky (m, dm, cm) porovnává úsečky - zná jednotky délky (m, dm, cm) a času (hodina, minuta, sekunda) - čte časové údaje na různých typech hodin, je schopen sledovat délku např. přestávky, oběda... - zná, pojmenuje a základní rovinné útvary - zná, pojmenuje a vymodeluje jednoduchá tělesa (krychle, kvádr, válec, koule) - rozezná geometrická tělesa v praxi

3. ročník – časová dotace 5 hodin týdně

Učivo	výstupy
Úvodem opakování učiva ze 2. ročníku	- sčítání a odečítání v oboru do 100 s přechodem desítky - automatizace spojů násobitek 2,3,4,5 - zná symboly pro násobení a dělení
Číselná řada do 1 000	- čte, zapisuje a porovnává čísla do 1000 - počítá po jednotkách, desítkách a stovkách - znázorňuje dvoj a trojčíselná čísla na číselné ose - porovnává čísla pomocí číselné osy - řeší úlohy na porovnávání čísel - zaokrouhluje čísla na desítky, stovky a tisíce - rozkládá čísla do 1000 v desítkové soustavě - sčítá a odčítá násobky sta - sčítá a odečítá bez přechodu násobků sta - sčítá a odečítá s přechodem násobků sta - písemně sčítá a odčítá dvě trojčíselná čísla a provádí kontrolu výsledku záměnou sčítanců - umí sčítat a odčítat dvojčíselná čísla z paměti (typu $34+25$, $67-54$) - řeší a vytváří úlohy na sčítání a odečítání - řeší úlohy typu „o x více“ a „o x méně“ - provádí předběžný odhad výsledku řešení - používá výrazy <i>sčítanec</i>, <i>sčítanec</i>, <i>součet</i>, <i>menšenec</i>, <i>menšitel</i>, <i>rozdíl</i>
Násobilky 6 – 10 Násobení deseti	- vyjmenuje řady násobků od 6 do 10 - chápe násobení jako opakované sčítání stejných sčítanců - rozlišuje čísla sudá a lichá - řeší příklady násobení a dělení v oboru násobitek - automatizace spojů násobitek 6 – 10 - řeší a vytváří jednoduché slovní úlohy na násobení a dělení v oboru násobitek - řeší a vytváří jednoduché slovní úlohy na násobení a dělení v oboru násobitek i mimo ně do 100 - řeší úlohy typu „x-krát více“ a „x-krát méně“ - dokáže pamětně vynásobit dvojčíselné číslo jednocíselným v jednoduchých případech (16×4, 2×23) - sestavuje a čte tabulky násobků v praxi (ceny zboží, vzdálenosti,...), při tvorbě úloh
Násobení a dělení dvojčíselných čísel číslem jednocíselným	- dělí dvojčíselné číslo jednocíselným mimo obor násobitek a určí neúplný podíl a zbytek ($15 : 4$, $40 : 9$) - řeší úlohy vedoucí k násobení dvojčíselného čísla jednocíselným a dělení dvojčíselného čísla jednocíselným - řeší a vytváří slovní úlohy se dvěma různými početními výkony
Dělení se zbytkem	- provádí samostatnou kontrolu svých početních výkonů - provádí odhady výsledků - používá výrazy <i>činitel</i>, <i>činitel</i>, <i>součin</i>, <i>dělenec</i>, <i>dělitel</i>, <i>podíl</i>, <i>neúplný podíl</i>

Geometrie Rovinné obrazce	- rýsuje přímky a polopřímky, rýsuje a měří úsečky s přesností na milimetry - pozná vzájemnou polohu dvou přímek (rovnoběžky, různoběžky) - zná pojem opačná polopřímka - označuje bod - průsečík dvou přímek, střed kružnice velkým písmenem a přímkou malým psacím písmenem - rozlišuje rovinné útvary – mnohoúhelník, trojúhelník, obdélník, čtverec, kruh a kružnici - kreslí rovinné obrazce do čtvercové sítě - rýsuje trojúhelník podle daných stran
Trojúhelník Kružnice	- pozná rovnostranný trojúhelník - sestrojí libovolnou kružnici - měří poloměr dané kružnice
Prostorové obrazce	- pozná jehlan a kužel - pomocí dostupných materiálů sestrojí modely staveb tvaru kvádra, krychle apod.
Jednotky délky mm, cm, dm, m, km	- změří délku úsečky s přesností na mm - přenáší úsečku na danou polopřímku - sestrojí úsečku dané délky s užitím jednotky milimetr - provádí odhady vzdálenosti a délky - převody jednotek délky <i>km na m, m na dm, cm, mm, dm na cm, mm, cm na mm</i> - zná pojem strana rovinného obrazce
Obvod	- určí obvod jednoduchých obrazců (trojúhelník, čtverec, obdélník) sečtením jejich stran

Očekávané výstupy na konci 1. období

- žák zvládá numeraci v číselném oboru do 1 000
- v číselném oboru do 1 000 zvládá čtyři základní početní výkony: sčítání, odečítání, násobení, dělení, a to hlavně z paměti
- má zautomatizovanou malou násobilku a dělení beze zbytku v číselném oboru do 1000
- dovede psát, porovnávat a zaokrouhlovat čísla v číselném oboru do 1 000
- používá matematické symboly a rozumí jim
- orientuje se na číselné ose v číselném oboru do 1 000
- správně sčítá a odečítá písemně dvě trojčíselná čísla a provádí zkoušku a odhad výsledku
- provádí samostatnou kontrolu svých početních úkonů
- na základě činností s konkrétními předměty nebo s využitím kresleného názoru řeší správně slovní úlohy, při sestavování úloh využívá vlastních zkušeností
- dovednosti početních výkonů s čísly v oboru do 1000 umí využívat k řešení jednoduchých úloh z praktického života, dovede jednoduché slovní úlohy vymýšlet i řešit
- umí úsudkově rozlišit o několik více (méně), několikrát více (méně) v oboru čísel do 1 000
- orientuje se v čase, převádí jednotky času
- zná jednotky délky a provádí jejich převody
- doplňuje tabulky, schémata, číselné řady
- rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa
- porovnává velikosti útvarů a těles
- měří a odhaduje délku úsečky

2. období: 4. – 5. ročník

Ve druhém období necháváme žáky pokud možno za pomoci přímé účasti učitele objevovat a formulovat svými slovy. Učitel pak matematický pojem upřesní a správně formuluje.

Vyučování matematice ve 2. období směřuje o osvojování základních pojmů a vztahů, postupné abstrakci a zobecňování. Vytváří zásoby algoritmů a metod řešení. Žáci se učí rozboru problému a plánu řešení, odhadování výsledku, volbě správného postupu, zpřesňují své vyjadřování a zdokonalují grafický projev. Rozvíjí logické myšlení a úsudek, zdůvodňují matematické postupy a vytváří hypotézy.

Žáci využívají práci na počítači k prohlubování svých znalostí pomocí počítačových her a výukových programů určených pro 4. a 5. ročník.

Obsah učiva v jednotlivých ročnících

4. ročník – časová dotace 5 hodin týdně

Učivo	výstupy
Úvodem opakování učiva ze 4. ročníku	-žák bezpečně ovládá sčítání a odečítání v číselném oboru do 1 000 - násobení a dělení v oboru všech násobitelů
Číselný obor do 1 000 000	- počítá do milionu po statisících, desetitisících a tisících - čte, píše a umí zobrazit čísla na číselné ose - dokáže porovnat čísla do 1 000 000 a řeší příslušné nerovnice typu např. $468\,730 < n < 503\,236$ - zaokrouhluje čísla na statisíce, desetitisíce, sta a desítky - rozkládá čísla v desítkové soustavě - pamětně sčítá a odečítá čísla, která mají nejvýše dvě číslice různé od nuly např. $9\,300 - 8\,200$, $5\,000\,000 - 630\,000$ - pamětně sčítá - alespoň tři čísla, odčítá od jednoho čísla dvě, od součtu dvou čísel jedno číslo jedno - pamětně násobí a dělí čísla do 1 000 000 nejvýše se dvěma různými číslicemi jednociferným číslem - písemně násobí jednociferným a dvojciferným činitelem - písemně dělí jednociferným dělitelem - provádí odhad a kontrolu svého výpočtu - zjistí údaje z diagramu, sestaví jednoduchý diagram - řeší slovní úlohy vedoucí k porovnávání čísel, provádění početních výkonů s čísly v daném oboru a se vztahy „o x více (méně)“ a „x-krát více (méně)“ - provádí stručný zápis slovní úlohy - umí provést zkrácený zápis s neznámou - řeší početní úlohy na dva až tři početní výkony
Římské číslice	- zapíše pomocí římských číslic 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1 000
Kalkulátor	- umí sčítat, odečítat, násobit a dělit na kalkulátoru
Diagram	- zjistí údaje z diagramu, sestaví jednoduchý diagram
Zlomky	- názorně vyznačí polovinu a čtvrtinu celku - umí pojmenovat jednotlivé části zlomku – číselník, jmenovatel, zlomková čára - řeší jednoduché slovní úlohy na určení poloviny, třetiny, čtvrtiny, pětiny a desetiny daného počtu - sčítá zlomky se stejným jmenovatelem, kdy jmenovatel je 2 až 10

Geometrie	
Poloha přímek	- určí vzájemné polohu dvou přímek (rovnoběžky, různoběžky, kolmice) - sestrojí rovnoběžku s danou přímkou - sestrojí kolmici k dané přímce pomocí trojúhelníku s ryskou - rýsuje čtverec a obdélník
Rovinné obrazce	- pozná a sestrojí rovnostranný, rovnoramenný a pravoúhlý trojúhelník - určuje obsah rovinných obrazců pomocí čtvercové sítě - jednotky obsahu m^2, cm^2, mm^2 - řeší jednoduché slovní úlohy na výpočty obsahu obdélníku a čtverce
Kružnice	- narýsuje kružnici s daným středem a daným poloměrem
Souměrnost	- pozná souměrný útvar - určí osu souměrnosti modelováním, překládáním apod. - nakreslí souměrný útvar
Sít' kvádra a krychle	- vymodeluje sít' kvádra a krychle - vymodeluje kvádr a krychli z dané sítě

5. ročník – časová dotace 5 hodin týdně

Učivo	Výstupy
Úvodem opakování učiva ze 4. ročníku	- žák bezpečně ovládá sčítání, odečítání, násobení a dělení v číselném oboru do 1 000 000 - zaokrouhlování a porovnávání čísel - je schopen samostatně řešit slovní úlohu - názorně vyznačí a zapíše zlomek - sčítá zlomky se stejným jmenovatelem - provádí základní početní operace na kalkulátoru
Přirozená čísla do a přes 1 000 000	- čte a zapisuje čísla větší než milion - zaokrouhluje přirozená čísla s požadovanou přesností - porovnává přirozená čísla a zobrazuje je na číselné ose, řešení jednoduchých nerovnic - zapisuje přirozená čísla v požadovaném tvaru v desítkové soustavě - sčítá a odčítá přirozená čísla z paměti (čísla mají nejvýše dvě číslice různé od nuly) - písemně sčítá tři až čtyři přirozená čísla, písemně odečítá dvě přirozená čísla - pamětně násobí a dělí přirozená čísla v jednoduchých případech - písemně násobí až čtyřciferným činitelem - písemně dělí jedno a dvojciferným dělitelem - užití vlastností početních výkonů (<i>komutativnost, asociativnost, distributivnost</i>) - samostatně provádí kontroly výpočtů, práce s kalkulátorem, posouzení reálnosti výsledku - řeší jednoduché a složené slovní úlohy vedoucí k jednomu nebo dvěma výpočtům s přirozenými čísly
Římské číslice	- římské číslice, přepis větších čísel zapsaných arabskými číslicemi

Desetinná čísla	- vyjádření části celku, zlomky se jmenovatelem 10, 100 a jejich zápis desetinným číslem – desetina, setina - zapíše a přečte desetinné číslo řádu desetin a setin, zobrazí jej na číselné ose - zaokrouhlí desetinné číslo (řádu desetin) na celé číslo - písemně sečte a odečte desetinné číslo řádu desetin a setin - násobí desetinné číslo číslem přirozeným - dělí desetinné číslo jednociferným přirozeným číslem - užívá desetinné číslo v praktických situacích např. nákupy (modely desetinných čísel = peníze)
Tabulky, grafy a diagramy	- doplňuje řady čísel a tabulky - čte a sestavuje sloupcový graf - vytváří tabulku a sloupcový graf, diagram na PC - sestavuje a čte jednoduché grafy v soustavě souřadnic - řeší praktické slovní úlohy jejichž výsledkem je graf nebo diagram
Geometrie Rovinné útvary Jednotky obsahu	- konstrukce obdélníku a čtverce - výpočty obvodu a obsahu obdélníku a čtverce - rýsování rovnoběžek a kolmic daným bodem - rýsování pravoúhlého, rovnostranného a rovnoramenného trojúhelníku - výpočet povrchu krychle a kvádra sečtením obsahů jejich podstav a stěn - další jednotky obsahu: a, ha, km², mm², převody jednotek - řešení úloh z praxe na výpočty obsahů obdélníku, čtverce, povrchu kvádra a krychle

Očekávané výstupy na konci 2. období

- žák zvládá numeraci v číselném oboru přes milion
- orientuje se na číselné ose v oboru čísel přes milion
- žák používá při pamětném i písemné počítání komutativnost, asociativnost a distributivnost
- zaokrouhluje přirozená čísla, provádí odhady a kontroluje výsledky početních operací
- řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace v oboru přirozených čísel
- umí zapsat a přečíst zlomek, desetinné číslo
- sčítá zlomky se společným jmenovatelem od 2 do 10
- desetinný zlomek umí převést na desetinné číslo
- desetinná čísla – sčítá, odečítá, zaokrouhluje na celky
- násobí a dělí desetinné číslo jednociferným přirozeným číslem
- ovládá základní římské číslice
- vyhledává a třídí data
- čte a sestavuje jednoduché tabulky, grafy a diagramy, úlohy je schopen řešit na PC
- narýsuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnici)
- graficky sčítá a odečítá úsečky
- určí délku lomené čáry a obvod mnohoúhelníka sečtením délek jeho stran
- vypočítá obsah čtverce, obdélníka a užívá základní jednotky obsahu
- sestaví rovnoběžky a kolmice
- rozpozná a znázorní jednoduché osově souměrné útvary a určí osu souměrnosti pomocí překládání papíru
- vypočítá povrch krychle a kvádra, zná jejich užití v praxi
- základní početní operace umí řešit pomocí kalkulatoru

2. vyučovací hodina:

Kompetence k učení: Transmisivní přístup k předávání poznatků, didaktický konstruktivismus. Čtyři přístupy k vyučování matematice: Mechanický, strukturalistický, empirický, realistický (Realistické vyučování matematice (Realistic Mathematics Education – RME))

Učitel zpracovává informaci obdrženou z osnov, vědecké, učební a metodické literatury, resp. obdrženou od věrohodných osob, informaci o úrovni a možnostech myšlenkové činnosti žáka a předává vyučovanou informaci žákovi. (Učitel-herec, režisér, scénárista -má mnoho povolání).

Žák přijímá a zpracovává informaci obdrženou od učitele, z učebnice a z jiných zdrojů a na požádání učitele mu poskytuje informaci a kvalitě osvojení si učební látky a dosaženém rozvoji myšlenkové činnosti.

Ve vyučovacím procesu probíhá přenos informací dvěma směry:

Od učitele k žákovi a od žáka k učiteli (zpětná vazba)

Pojem „matematika“ může označovat určitou myšlenkovou činnost (matematickou činnost) nebo může označovat teorii, která je právě výsledkem této činnosti.

My chápeme, že vyučování matematice je vyučování matematické činnosti.

Dříve než si vysvětlíme, co rozumíme vyučováním matematice, dohodneme se, jak budeme chápat vyučovací proces. **Vyučovací proces** je **proces řízení**, uskutečňovaný učitelem s použitím řady pomocných prostředků (učebnice, názorných pomůcek, technických prostředků výuky). Analýzou procesu řízení se zabývá kybernetika. Kybernetický přístup nám říká, že vyučování, stejně jako kterýkoliv proces řízení, obsahuje: příjem, zpracování, uchování a přenos informace.

Nové metody vyžadují zavedení nového obsahu. Nový obsah vyučování vytváří potřebu nových metod a nové metody potřebují také nový obsah. Nelze oddělit problém obsahu vyučování a nových metod. Pozor na cíl a prostředek výuky. Cíl-nová kytička, prostředek je její zalévání, okopávání, hnojení atp. Chci-li vypěstovat novou kytičku (cíle), musím mít k tomu prostředky, bych ji vypěstoval. Například, když byla zavedena v roce 1976 do škol spolu s novým názvem matematika (místo počtů) množinová teorie, tak došlo k omylu a prostředek teorie množin se stal cílem. Učitele měli naučit děti numeraci a početním výkonům pomocí teorie množin a oni často chtěli znalost teorie množin od dětí na úkor znalostí numerace a početních výkonů.

Ján Kuruc z Pedagogické fakulty Katolické univerzity v Ružomberku uvádí ve své Didaktice matematiky:

Didasko-učit

Didaktos-učený

Didaktikos-označení toho, kdo se vyzná v učení

Didaktik matematiky, dle klasiky, je tedy člověk, který ví, jak učit matematiku.

Pokusme se hledat souvislosti mezi tím, co vstupuje do vzájemného vztahu při vyučování matematiky. Představme si nějaký trojúhelník ve vrcholech, kterého jsou:

učitel

matematika

žák

Co je cílem učitele matematiky v tomto trojúhelníku? Zdá se, že je to: naučit se matematiku a přenést ji na žáka. Udělat tedy určitou **transmisí** – přenos. Odtud pochází pojem **transmisivní vyučování**. Když si uděláme charakteristiku vzájemného vztahu učitele a žáka z tohoto pohledu, dospějeme k závěru, že tento vztah je založený na nadřazenosti učitele a podřízenosti žáka. V lepším případě učitel vystupuje v úloze trenéra, jehož cílem je dovést žáka k vrcholnému

výkonu. Proto se učitel snaží: a) cvičit žáka v úlohách, které budou na zkouškách, prověrkách, testech, přijímacích zkouškách a podobně, b) ukazovat žákovi různé triky, které mu mají ulehčovat práci, zapamatovat si postupy a algoritmy, zrychlovat výkon při řešení úloh, c) instruovat žáka, jak využívat vzorce, grafy, d) pomáhat mu mnemotechnickými pomůckami, jak si zapamatovat definice, věty, a podobně. Od žáka vyžaduje osvojení si faktů, tvrzení, bezchybně aplikovat standardní úlohy, přesně odříkat poučky, důkazy...

Tento vztah je poznamenán obavami:

- ze strany učitele je to obava, že nesplní probrat všechno předepsané učivo se všemi žáky
- ze strany žáka je to strach, že něco zapomene a neobstojí.

Žák se dostává do závislého postoje:

- učitel zvýrazňuje nedostatky žáky,
- počítá s nesamostatností žáka,
- odpor potlačuje mocenskými prostředky,
- neočekává spekulace (negativní), hledání, experimentování, iniciativu.

Takové vyučování je vedené v klimatu direktivnosti.

Argument v prospěch transmisivního vyučování:

Na co objevovat Ameriku? Cesta žáka při objevování bude dlouhá, složitá a výsledek bude mít určité mnohé nedostatky. A když přijde na nějaké řešení, jeho postup bude těžkopádný. Je lepší. Když všechno dostane jasné, stručné a hotové.

Argument nebere do úvahy to, že důležitější než mít poznatek, je mít schopnost poznatek získat.

Staré přísloví říká: „Když dáš člověku rybu, nakrmíš ho na den, když ho však naučíš chytat ryby, nakrmíš ho na celý život.“

Učení matematice je založené na konstrukci: 2+3-tento součet vypočítáme tak, že přiřadíme k číslu dvě a podobně i k číslu tři, představy mnohosti a potom na základě konstrukce těmito informacím přiřadíme číslo pět, které na základě asociace bude výsledkem. Rozhodujícím krokem je to, když z informací je zkonstruovaná výsledná představa.

Tomu odpovídá i název **didaktický konstruktivismus**.

Abychom lépe pochopili princip konstruktivismu, uvedeme alegorický příběh o motýlovi. *Jednoho dne se na kukle objevil malý otvor. Člověk si sedl a dlouho pozoroval motýla, jak zápasí a snaží se dostat přes tento otvor. Potom se zdálo, že jeho pohyb ustal. Vypadalo to tak, že co se mělo stát, se nestane a nebude mít pokračování. Člověk se rozhodl, že motýlovi pomůže. Vzal nůž a kuklu otevřel. Potom se motýl lehce dostal ven. Ale měl slabé, drobné tělo a scvrknutá křídla. Člověk ho dále sledoval, protože čekal, že každou chvíli otevře krásná pestrobarevná křídla, roztáhne je a zvětší tak, aby byla schopná unést jeho tělo. Čekal, že stanou pevnými. Nic takového se nestalo! Ve skutečnosti strávil motýl zbytek svého života jen lezením. Nikdy nebyl schopný létat. Čemu člověk ve své dobrosrdečnosti a dobré vůli neporozuměl, byla těsná kukla a zápas, který byl potřebný na to, aby se motýl dostal skrz malý otvor. Byl to boží způsob, jak dostat tekutinu (lymfu) z těla do křídel motýla, aby křídla mohli narůst tak, aby byli schopné létat, kdykoliv, když se znovu z kukly osvobodí. Ján Kuruc píše: Někdy je zápas přesně to, co v životě potřebujeme. Jakmile by Bůh připustil prožít náš život bez překážek, mohlo by nás to ochromit. Nebyli bychom tak silní, jak bychom mohli být. Nikdy bychom nebyli schopni létat.*

Při **transmisivním** chápání vyučování matematiky se klade důraz na to, jak naučit žáka matematiku, tedy cílem je především samotná matematika, její školská forma, množství poznatků a především její kvalita. Žák v tomto vztahu není dominantní. Jako by při malování byla důležitější technika malby a výběr motivu, než sám samotný malíř. Učitel se hlavně podřizuje učivu a úloze zprostředkovatele.

Při **konstruktivním** vyučování matematiky se důraz klade především na žáka, přičemž matematika je chápána jako nenahraditelný nástroj na formování psychiky žáka a rozvoje jeho osobnosti prostřednictvím matematiky.

D.J.Struik ve svých Dějinách matematiky uvádí: Matematika je velkým dobrodružstvím v myšlení. V její dějinách se zrcadlí mnohé nejhlubší myšlenky nespočetných generací lidstva.

Hartl, Hartlová ve svém Psychologickém slovníku (Praha, Portál 2000) uvádí:

Konstruktivismus v psychologických a sociálních vědách-směr druhé poloviny 20.století, který zdůrazňuje aktivní úlohu člověka, význam jeho vnitřních předpokladů a důležitost jeho interakce(vzájemné působení) s prostředím a společnostmi.

Dále říkají, že konstruktivismus není přesně vymezenou teorií, skládá se z mnoha proudů a stále se vyvíjí.

Prof. Hejný a prof. Kuřina přetvářejí obecný konstruktivistický přístup k vyučování v tak zvaný **didaktický konstruktivismus**.

Myšlenka konstrukce vlastního poznání je stará více než dvě tisíciletí. Sokrates, který vedl své diskusní partnery k poznání tím, že jim kladl dobře promyšlené otázky, sám sebe přirovnává k porodní bábě. Podobně jako ona pomáhá na svět dítěti, on pomáhá na svět myšlence dřímající v hlubokém zákoutí jeho diskusního partnera. Mluví se o vynořování nového poznání z poznání existujícího a nových podnětů.

Popsaný přístup nazýváme konstruktivistický a mluvíme o **podnětném vyučování** (INVESTIGATIVE TEACHING).

Zásady didaktického konstruktivismu:

Hejný M., Kuřina F.: *Konstruktivní přístupy k vyučování matematice*. Matematika, Fyzika, informatika, 1998, č.7, str. 385-395

Hejný M., Kuřina F.: **Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování**. Praha, Portál, 2001.

1. Matematika je chápána jako specifická lidská aktivita, ne jen jako její výsledek.
2. Podstatnou složkou matematické aktivity je hledání souvislosti, řešení úloh a problémů, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení, jejich prověřování a zdůvodňování.
3. Poznatky jsou nepřenosné, vznikají v mysli poznávajícího člověka.
4. Tvorba poznatků se opírá o zkušenosti poznávajícího.
5. Základem matematického vzdělávání je vytváření prostředí podněcujícího tvořivost.
6. K rozvoji konstrukce poznatků přispívá sociální interakce ve třídě.
7. Důležité je použití různých druhů reprezentace a strukturální budování matematického světa.
8. Značný význam má komunikace ve třídě a pěstování různých jazyků matematiky.
9. Vzdělávací proces je nutno hodnotit minimálně ze tří hledisek: porozumění matematice, zvládnutí matematického řemesla, aplikace matematiky.
10. Poznání založené na reprodukci informací vede k pseudopoznávání, k formálnímu poznání.

Východiskem ke konstruktivně pojatému vyučování matematice je studium matematiky samé, a to nikoliv z hlediska jejich forem obvykle uspořádaných v monografiích (axiomy, věty, důkazy, algoritmy, modely,...), ale z hlediska cest, které k takovýmto výsledkům vedly (otázky, problémy, příklady, experimenty, hypotézy, chyby,...). Základní roli tedy hrají ony dovednosti, ona umění, která matematika utvářela v historii:

- umění počítat,
- umění vidět,
- umění sestavovat,

- umění dokazovat,
- umění abstrahovat

Transmisivní vyučování

Představíme-li si konstruktivistické vyučování jako jeden pól spektra, na opačné straně mluvíme o transmisivním vyučování. (Transmise-přenos). Učitel v transmisivně vedené výuce se snaží předat žákům již hotové znalosti v dobré víře, že toto je nejlepší a nejrychlejší cesta k poznání. Žák je viděn v roli pasivního příjemce a ukladatele vědomostí do paměti, aniž by se kladl důraz na jejich vzájemné propojení. (Podobné vyučování se také nazývá behavioristické nebo direktivní-přímé). V transmisivním pojetí jako by vyučování bylo podobné přidávání zboží (znalostí) do skladu (žákovy mysli), kde příliš nezáleží, co už je v sousedních odděleních skladiště.

Pozor-transmisivní vyučování nelze zatratit, může vyučovací proces vhodně doplňovat.

Srovnání transmisivního a konstruktivistického vyučování:

	Polaritní dipól	Konstruktivistické vyučování	Transmisivní vyučování
1	hodnota poznání	kvalita	kvantita
2	motivace	vnitřní	vnější
3	trvanlivost poznání	dlouhodobá	krátkodobá
4	vztah učitel-žák	partnerský	submisivní (oddaný)
5	klima	důvěry	strachu
6	nositel aktivity	žák	učitel
7	činnost žáka	tvořivá	imitativní (napodobení)
8	poznatek žáka	produktivní	reproduktivní (opakování)
9	nosná otázka	CO? a PROČ?	JAK?

„Žák má více produkovat, než reprodukovat!“

„Žákovi práce, učiteli řízení!“

„Nic není v rozumu, co neprošlo nejdříve smysly.“

V současné době se v didaktice matematiky uvádějí čtyři postupy k vyučování matematice:

1. Mechanický – Mechanický přístup k učení odpovídá chápání učení jako systému reakcí. Žáka můžeme, podobně jako počítač, naprogramovat pomocí drilu k provádění aritmetických, algebraických a geometrických operací a řešení problémů, které lze podle určitých znaků klasifikovat a dále řešit podle určitých vzorců.

2. Strukturalistický – Strukturalistický přístup k učení lze doložit dvěma příklady: tradiční geometrií uspořádanou na základě axiomatické konstrukce a tzv.moderní matematikou založenou na teorii množin a logice. Pro žáky byl vytvořen strukturovaný svět množin a relací.

3. Empirický – Empirie je v překladu zkušenost. Empirický značí-vycházející ze zkušeností. Empirický přístup vychází z potřeb praxe a potřebám praxe má sloužit. Při vyučování jsou využívány zkušenosti žáků, žáci však nejsou vedeni k systematickému a racionálnímu zpracování těchto zkušeností.

4. Realistický – Opět se vychází z reálných podnětů, z neustále se rozšiřujícího žákova světa. Žák se stává znovuobjevitelem matematiky, což podněcuje a rozvíjí jeho schopnosti.

Realistické vyučování matematice (Realistic Mathematics Education – RME) vychází z principu, že učení matematice znamená konstruování matematiky vlastními postupy žáků od neformálních přístupů spjatých s realitou k něčemu, co je přijatelné jako formální matematika.

Nelze ani jeden z těchto přístupů přeceňovat nebo ztracovat. Každého z tohoto přístupu je třeba používat jako soli. Nelze věc přesolit, ani nedosolit. Je na učiteli, aby našel vhodnou míru přístupu.

3. Kompetence k učení : Matematické myšlení. Konvergentní a divergentní myšlení.

1. Myšlení

1.1. Pozorování a vnímání

Pozorování je metoda, při které vyčleňujeme, zachycujeme, utkvíme svými smysly a upevňujeme vlastnosti a vztahy jednotlivých objektů a vztahů okolního světa v našem vědomí.

Při pozorování studujeme objekty v jejich přirozených podmínkách a vlastnosti objektů v přirozených vztazích v jakých existují v daném objektu. Je třeba však odlišovat pozorování od prostého vnímání.

Vnímání nějakého objektu představuje proces bezprostředního odrazu tohoto objektu v našem vědomí prostřednictvím našich smyslů. Výsledkem je **vjem**, což je celistvý obraz předmětu. Vjem odráží vnější stránky předmětu.

1.2. Pojem

Pojem je jedna z forem vědeckého poznání odrážející v našem vědomí a později i v našem myšlení podstatné vlastnosti (znaky) zkoumaných objektů a vztahů.

V matematice se často pojem označuje nejen termínem (slovo nebo skupina slov) - názvem, ale i symbolem.

Pojmy slouží k tomu, abychom si navzájem rozuměli a o napsaném či vysloveném slovu měli v podstatných znacích stejný obraz.

1.3. Matematické myšlení

Myšlení je nejvyšší forma aktuálního odrazu objektivní skutečnosti, spočívající v cílevědomém, zprostředkovaném a zobecněném poznávání podstatných souvislostí a vztahů předmětu subjektem, ve vytváření nových idejí, v předvídání událostí a činů lidí.

Myšlení vzniká a realizuje se v procesu kladení a řešení praktických i teoretických problémů. Myšlení se opírá o smyslovou zkušenost, avšak na rozdíl od smyslového odrazu, jeho výsledky přepracovává, poskytuje možnost získávat poznatky o takových vlastnostech a vztazích předmětů, jež jsou bezprostřednímu smyslovému poznání nedostupné.

Úroveň myšlení zaručují **vlastnosti myšlení**: a) **kritičnost** myšlení – znamená pečlivě zvážit obsah pojmů, se kterými budeme operovat, kriticky posoudit, zda zvolený způsob řešení je nejhodnější a umožní objektivní úsudek, b) **pružnost** myšlení- se projevuje snahou opustit při řešení úlohy neúčinnou realizaci a hledat nový způsob, zvláště při změně podmínek a nové situace, c) **šíře** myšlení – předpokládá na základě dostatečných informací vidět četnější možnosti řešení a případně i důsledky, které z nich vyplývají, d) **rychlost** myšlení – závisí na zdatnosti vybrat pohotově ze zásoby paměťového systému údaje zajišťující správné a logické myšlení.

Proces myšlení se opírá o určité myšlenkové operace. K základním operacím myšlení patří **srovnávání a analogie** (podobnost), **rozlišování**, **generalizace** (zevšeobecnění) a **abstrakce** (myšlenková činnost, při níž se cestou analýzy určitých jevů či pojmů vytvářejí obecné poznatky).

Matematické myšlení vychází ze znalosti matematických pojmů (definice, věta, axiom, předpoklad a tvrzení věty, věta obrácená, důkaz věty, výrok, výroková forma, množina, relace, operace, rovnice, rovnost, nerovnice, nerovnost, atp.), ze znalostí matematických teorií (matematická logika, teorie množin, statistika, pravděpodobnost, teorie řešení rovnic,

infinitesimální počet, geometrie, teorie algebraických struktur, atp.), matematické terminologie, matematické frazeologie a znalostí matematické symboliky.

Zopakujeme si i co je matematika. Známa definice uvádí, že matematika je věda o kvantitativních stavech a vztazích a o prostorových formách objektivního světa. Slovník spisovné češtiny pro školu a veřejnost (ACADEMIA 1978) říká, že matematika je věda, která tvoří pojmy abstrahované z obecných vztahů hmotného světa (čísla, útvary) a stanoví jejich obecné zákonitosti.

1. 4. Myšlení a jazyk

Myšlení a jazyk jsou vzájemně spjaté jevy, kdy myšlení jako nejvyšší forma odrazu skutečnosti se vyjadřuje a realizuje pomocí jazyka. Myšlení je spojeno s jazykem, fyziologicky je myšlení i jazyk podmíněno druhou signální soustavou a slouží poznávání světa a komunikaci mezi lidmi. Jazyk je způsobem existence myšlení, jeho fyzickým nositelem.

Nejstarší známá definice věty ještě z antiky je „*Oratio est ordinatio dictionum sententiam perfectam demonstrans*“, což značí, že „**Věta** je souvislé seřazení slov vyjadřujících hotovou myšlenku“. Většina publikací českého jazyka uvádí, že „**Věta** je slovní vyjádření myšlenky“.

Podle akademické České mluvnice (Havránek, Jedlička) dělíme druhy vět podle postoje mluvčího na věty oznamovací, tázací, žádací a zvolací. **Věta oznamovací** něco tvrdí, oznamuje, **věta tázací** vyjadřuje otázku, **věta žádací** vyjadřuje rozkaz, zákaz, vybídnutí, žádost nebo přání, aby se něco uskutečnilo. **Věta zvolací** vyjadřuje citový poměr k tomu, co se jí říká, například radost nad něčím, zármutek z něčeho, podiv, opovržení, hrůzu, ošklivost a j.

2. Základy logiky

K tomu, abychom mohli pochopit další základní matematické pojmy, je třeba si zopakovat základy logiky. Základy logiky jsou i nutnou znalostí k tomu abychom si uvědomili co je to logické myšlení. Logické myšlení je takové myšlení, které vychází ze znalostí základů logiky.

2.1. Logika a mateřský jazyk

Logické myšlení úzce souvisí s pojmem výroku a rozhodováním o jeho pravdivosti, či nepravdivosti. Věta je jazykové vyjádření myšlenky. Tedy logické myšlení úzce souvisí s mateřským jazykem, vyjadřováním se ve větách a určováním jejich pravdivosti, anebo nepravdivosti.

2.1.1 Výrok

Základním pojmem logiky je pojem **výrok**.

Výrokem nazveme každou oznamovací větu, která srozumitelně oznamuje něco, co může být jen pravdivé, anebo nepravdivé.

Zde vidíme, proč jsme popsali druhy vět a k čemu je nám oznamovací věta k užtku.

Slovo „výrok“ se běžně chápe jako pamětihodná věta nějaké osobnosti, anebo jako usnesení soudu, anebo jako sdělení komise znalců, a podobně. To vzbuzuje dojem, je pravdivé, nevyvratitelné tvrzení. I Slovník spisovné češtiny pro školu a veřejnost (Akademia Praha 1978, 501-21-857) uvádí na str.649 **výrok 1. vyjádření myšlenky slovy**: ve svých výrocích je unáhlený; slavný výrok řeckého filozofa; okřídlený výrok, **sentence 2. rozhodnutí, rozsudek**: soudní výrok, výrok komise.

Většina lidí je v domnění, že výrok je vždy pravdivý. Výrokem je však i oznamovací věta nepravdivá. Oznamovací věta „Jedna a jedna rovná se pěti“ je výrokem. Jde o oznamovací větu,

kteřá srozumitelně oznamuje něčo co je nepravdivé. Tuto oznamovací větu lze zapsat místo slov číselnými symboly „ $1 + 1 = 5$ “. Zápis je různý, ale slovní vyjádření je stejné.

Věty „Přeskoč!“, „Kolik je hodin?“ nejsou výrokem, neboť nejde o oznamovací věty. Na druhé straně oznamovací věta „Kočka je násobkem psího ocasu“ není výrokem neboť srozumitelně nic neoznamuje.

Jak zjišťujeme pravdivost, anebo nepravdivost výroků? Je zřejmé, že na základě svých životních zkušeností, z odborné literatury, dnes i z Internetu a na základě informace od věrohodných osob. I zde však vidíme, že by mohlo dojít k omylu. Jeden ze známých příkladů jsou dějiny, kdy například vynález knihtisku je v různé literatuře uváděn různým datem. Říká se, že kriteriem pravdy je praxe. Jak však zde například rozhodnout o pravdivosti data vynálezu knihtisku praxí.

2.2. Výroková forma

Nyní se budeme zabývat sděleními, které na první pohled vypadají jako výroky, která však za výroky považovat nemůžeme. Například $x > 7$, $y + 5 = 10$, číslo x je liché, pan x je obyvatelem Litoměřic, atp. Podívejme se na sdělení $x > 7$. Nemá smysl se ptát zde je pravdivé, či nepravdivé. Důvod je ve výskytu **proměnné** x . Pokud za proměnnou x dosadíme číslo 9, obdržíme pravdivý výrok $9 > 7$. U každé proměnné je třeba znát množinu **M** z které za proměnnou dosazujeme. Představujme si, že proměnná vždy za sebou táhne voziček s prvky množiny **M** , které se za proměnnou **dosazují**. Této množině říkáme **obor proměnné**.

Sdělení mohou mít i více proměnných například $x < y$, $a + b + c = 11$, Pan x je obyvatelem města y , atp.

Všechna tato sdělení nazýváme **výrokové formy**. Charakteristické pro ně je, že obsahují aspoň jednu proměnnou a že po vhodném dosazení za všechny proměnné vznikne výrok.

Podíváme se na slovo vhodné dosazení. Asi těžko oborem proměnné ve výrokové formě $x < 10$ bude množina obyvatel České republiky, ale určitě půjde o čísla.

Příklad 7 :

V učebnici pro 1. ročník základní škola je tato úloha:

$$\square < 5 \quad | \quad 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

Podtrhněte čísla, která dají pravdivý zápis.

Jde o výrokovou formu s oborem proměnných přirozených čísel **$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$** .

Obor proměnných se nám rozdělí na **obor pravdivosti**, to jsou čísla 1, 2, 3, 4 a obor **nepravdivosti**, to jsou čísla 5, 6, 7, 8.

Pokud se objeví pojem **proměnné**, tak docházíme k **funkčnímu myšlení**. Lze říci, že základním pojmem funkčního myšlení je pojem proměnné. Na 1. stupni základní školy sledujeme závislost dvou proměnných. Tak zvanou nezávisle proměnnou, kterou můžeme libovolně měnit a závisle proměnnou, která je závislá na námi libovolně zvolené nezávisle proměnné.

Příklad 8:

1 kg brambor stojí 9 Kč. Kolik stojí 2, 3, 4, 5, 6 atd kilogramů brambor.

Řešení této úlohy můžeme znázornit tabulkou:

Počet kg brambor x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Cena v Kč y	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99

Vzorcem : $y = 9x$

Grafem přímé úměrnosti: Narýsujte sami

Příklad 9:

Zjisti závislost mezi druhým sčítancem a součtem, pokud první sčítanec je stále stejný:

$$7 + x = y$$

Tabulka:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Vzorec: $y = x + 7$

Graf: Narýsujte sami.

3. Konvergentní a divergentní myšlení

Chceme-li se zabývat rozvojem tvořivosti žáků, musíme klást důraz především na divergentní myšlení, které je nezbytnou součástí tvořivosti.

3.1. Konvergentní (sbíhavé) myšlení

Konvergentní myšlení se uplatňuje v úlohách s jedním správným řešením nebo v úlohách s konečným počtem správných řešení. Správná řešení vždy logicky vyplývají z daných informací v úloze. Je to tedy takové myšlení, při kterém se logicky a algoritmicky postupuje ke správnému závěru.

Úlohy založené na konvergentním myšlení formují zejména vnímání, rozlišování a poznávání věcí, analýzu a syntézu, indukci a dedukci, paměť a také schopnost aplikace – použití informací, definic a poznatků při řešení školní úlohy nebo řešení nějakého problému.

3.2. Divergentní (rozbíhavé nebo též tvůrčí) myšlení

Divergentní myšlení nabízí žákům příležitost jak objevit, jak objevit v každé situaci více než je běžné.

Divergentní myšlení se využívá v úlohách, ve kterých není z daných informací přesně známo jaké bude správné řešení. Žák musí hledat, objevovat a tvořit různé alternativní řešení. Úlohy musí doplňovat o další informace a záleží především na samotném žákovi, jaké informace si do úlohy dodá. Toto myšlení klade důraz na rozmanitost, množství a vhodnost odpovědí. Nevede k jednomu správnému řešení, ale vyžaduje produkci mnoha řešení, která vedou k originálním výsledkům.

4. **Kompetence k učení:** Pojmotvorný proces v matematice. Obsah a rozsah matematických pojmů.

V minulé lekci jsme si uvedli, že **pojem** je jedna z forem vědeckého poznání odrážející v našem vědomí a později i v našem myšlení podstatné vlastnosti (znaky) zkoumaných objektů a vztahů.

V matematice se často pojem označuje nejen termínem (slovo nebo skupina slov) - názvem, ale i symbolem.

Pojmy slouží k tomu, abychom si navzájem rozuměli a o napsaném či vysloveném slovu měli v podstatných znacích stejný obraz. Když řekneme slovo „čtverec“, máme v našem vědomí obraz rovinného obrazce, který je ohraničen čtyřmi shodnými úsečkami s vnitřními úhly 90 stupňů. Každý si však představujeme čtverec různé velikosti, možná, že i různé barvy. Podstatné vlastnosti (znaky) charakterizující čtverec jsou však stejné. Řeknu-li například „mladá dívka“, shodneme se na tom, že si představíme všichni určitě ženu, její věk, její vzhled má však každý ve své představě různý. Tento pojem je dosti vágní a svými vlastnosti není přesně identifikovatelný. V matematice udáváme takové vlastnosti (znaky), aby pojem byl identifikovatelný.

Každý pojem má určitý obsah a rozsah.

Obsah pojmu tvoří souhrn (množinu) všech vlastností (znaků), které jsou pro tento pojem charakteristické.

Příklad 1:

Obsahem pojmu „rovnoběžník“ je : a) rovnoběžník je rovinný obrazec, b) je ohraničen čtyřmi úsečkami, c) protilehlé strany jsou navzájem rovnoběžné, d) protilehlé strany jsou shodné, e) protilehlé úhly jsou shodné, e) úhlopříčky se vzájemně půlí, atd.

Uvedený příklad 1 ukazuje, že obsah pojmu je množina všech vlastností (znaků) pojmu, z nichž každý je nutný a všechny dohromady jsou postačující pro vymezení pojmu. Kdyby některá z vlastností uvedená v příkladu nebyla splněna, nebyl by útvar rovnoběžníkem.

V příkladu 1 šlo o objekt. Podívejme se na příklad vztahu.

Příklad 2:

Obsah pojmu „rovná se“ je: a) vztah dvou čísel, výrazů, úseček, atd., který značí, že jisté množiny jsou ekvivalentní, b) vztah je reflexivní, c) vztah je symetrický, d) vztah je tranzitivní.

Poznámka: Teorie vztahů (relací) je součástí další části textu.

Rozsah pojmu tvoří množina všech objektů, které mají vlastnosti (znaky) stanovené jeho obsahem.

Příklad 3:

Rozsahem pojmu „rovnoběžník“ je kosoúhelník, obdélník, čtverec, kosočtverec, atd.

Rozšiřujeme-li obsah pojmu, zúží se jeho rozsah a obráceně.

Jestliže rozsah jednoho pojmu (P_1) je obsažen v rozsahu druhého pojmu (P_2) to znamená $r_{P_1} \subset r_{P_2}$, tak druhý pojem (P_2) je **rodem** (rodovým pojmem) vzhledem k pojmu (P_1) a první pojem (P_1) je **druhem** (druhovým pojmem) vzhledem k (P_2).

Příklad 4:

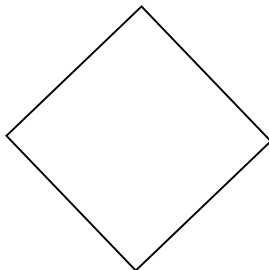
Pojem obdélník je druhovým pojmem pojmu rovnoběžník a rovnoběžník je rodový pojem pojmu obdélník.

S pojmy, samozřejmě i s matematickými se děti seznamují postupně a tyto pojmy se jim stávají jasnější, čím lépe poznávají jejich obsah a rozsah. Například dítěti ukazujeme různé obdélníky a říkáme jim to je obdélník, to je obdélník. Současně jim ukazujeme obrazce, které

nejdou obdélníkem. Dítě si vytváří ve svém vědomí samo představu o obsahu pojmu obdélník. Při prvním vytváření pojmu zatím nepopisujeme základní vlastnosti (znaky) daného pojmu. Snažíme se, aby ve svém pozorování použilo co nejvíce smyslů. Dítě používá zrak, jde o tak zvanou vizualizaci. Pod pojem vizualizace zahrnujeme schopnost zrakového vnímání a pamatování si viděného i po delší době. Používá sluch, kdy zrakový vjem je doprovázen slovním doprovodem. Je dobře i když používá hmat. Obdélník může být vystřížen z tvrdého papíru nebo z umělé hmoty a dítě jej poznává se zavázanýma očima mezi jinými obrazy hmatem. Říká se, že poznání je to, co prošlo našimi smysly. Ve vyšším věku dítěte na však na vlastnosti (znaky) pojmu upozorňujeme. Poznání, kdy dítě samo si vytváří ve svém vědomí obsah a rozsah pojmu se nazývá **intuitivní**.

Žádáme na dítěti, aby nám načrtlo obdélník, aby nám ukázaly předměty kde se obdélník nachází, aby dovedly v množství předložených modelů nalézt ten, který náleží do rozsahu pojmu obdélník. U geometrických pojmů je velkým problémem, že jde o pojmy abstraktní, které vlastně v realitě vůbec neexistují. Existují jenom jejich modely. Vždyť obdélník je součástí roviny a ta nemá žádnou „tloušťku“. Proto je vytváření pojmu v geometrii tak obtížné.

Též si musíme dát pozor na tak zvanou „falešnou představu“. Mnoho lidí i velmi vzdělaných Vám bude tvrdit, že tento obrazec



např. model dopravní značky hlavní silnice je kosočtverec, ale to není kosočtverec, je to čtverec, neboť má všechny vlastnosti (znaky) čtverce.

I při vytváření nematematických pojmů poznávací proces je intuitivní. Dítě jde s maminkou, po silnici cosi jede a maminka řekne: „To je auto!“ Pak zase něco jede a maminka řekne: „To je auto!“ Po určitém čase, když něco jede, dítě již samo řekne: „Mami, auto.“ Maminka však řekne: „To není auto, to je traktor.“ Dítě si ve svém vědomí upřesňuje obsah a rozsah pojmu. Brzy pozná nejen auto, ale i auta různých značek a typů. Žádné vlastnosti dítěti neuvádíme.

Velkou chybou je, že se snažíme dětem pojem definovat, přesně jej popsat. V první fázi poznávacího procesu to není nutné. Uvedu příklad s pojmem rovnice. Místo, aby paní učitelka v 1. ročníku základní školy dětem uváděla různé zápisy a říkala jim: „To je rovnice“, „To není rovnice“ a ony samy mezi zápisy poznávaly rovnici, tak paní učitelka dětem definovala, že „Rovnice je zápis ve kterém je písmeno x“. Byl jsem přítomen uvedené hodině a tak jsem jedno dítě navedl, aby jako rovnici uvedlo zápis slova saxofon. Paní učitelka se svoji definicí nepochodila. Je vůbec těžké pojmy definovat. Zkuste například definovat obyčejný stůl.

Dítě, když si uvědomuje pojem stůl, tak si ve svém vědomí vydělí ze všech znaků, které mají stoly, jen ty podstatné a u všech stolů se vyskytující. Různé stoly mají různé vlastnosti (znaky) jako výšku, velikost, barvu, počet noh, materiál z kterého jsou vyrobeny. Podstatné a společné je, že stůl má desku a nohy (nebo nohu) na kterých stojí. Bez nich by to nebyl stůl. Zda je bílý nebo černý, čtvercový nebo kulatý, třínohý nebo čtyřnohý, zda má zásuvku to není podstatné. Při vyslovení slova „stůl“ všichni, kteří rozumíme česky víme o jaký objekt jde. Ve svém vědomí, však při vyslovení slova „stůl“ máme určitě každý jinou představu.

Při vytváření pojmu je důležité přihlížet k tomu, aby v představách lidí bylo při uvedení pojmu, ať při vyslovení příslušného názvu či shlédnutí symbolu co nejvíce shodných znaků. V

současné společnosti je to vidět na nejasnostech chápání pojmu demokracie, svoboda, privatizace, atp. Naší snahou je uvádět takové znaky a tolik znaků, aby pojem byl vymezen co nejpřesněji. Při pojmotvorném procesu je důležitá vlastní zkušenost. Například jinak si představuje pojem tužka ten, kdo je gramotný a jinak ten, kdo je ngramotný. Ten kdo je gramotný v něm vidí nástroj na psaní, ngramotný nástroj, kterým je možno bodat. U dětí právě vytváření pojmů souvisí s vlastní zkušeností. Dětem ukazujeme určité objekty a současně vyslovujeme příslušné názvy, až dítě začne samo těchto názvů užívat, když se s danými objekty setká. Při vytváření pojmu může dojít i k omylu, např. podle určitých znaků zahrne dítě pod pojem automobil i třeba traktor. Může dojít i k falešným představám, například paní učitelka ukazovala obdélníky, které byly vždy modré. Pak ukázala červený obdélník a žák tvrdil, že to není obdélník, neboť není modrý. Považoval barvu za podstatný znak pojmu obdélník. Znak pojmu je třeba upřesňovat a dětskou zkušenost vhodně usměrnit.

Jestliže rozsah pojmu je tvořen pouze jedním objektem, tak příslušný pojem se nazývá **individuální**.

Příklad 5:

Individuální pojmy: Střed Země, prázdná množina, Ludolfovo číslo π , atp.

Jestliže do rozsahu pojmu patří více než jeden objekt, říkáme, že příslušný pojem je **obecný**.

Příklad 6:

Obecnými pojmy jsou: obdélník, čtverec, trojúhelník, kružnice, bod, rovnice, rovnost, úloha, příklad, atp.

Individuální pojmy nesmíme zaměňovat s **konkrétními**, tj. takovými, které odrážejí konkrétní objekty a obecné pojmy s **abstraktními pojmy** tj. pojmy vzniklými jako objekt myšlení.

Příklad 7:

Model krychle (názorná pomůcka) – to je pojem obecný a konkrétní a krychle to je pojem obecný a abstraktní. Pro matematiku jsou charakteristické právě abstraktní pojmy.

Třídění (klasifikace) matematických pojmů

Obsah pojmu určujeme pomocí definic, rozsah pomocí třídění (klasifikace).

Prvky mající tytéž charakteristické základní vlastnosti (znaky) a náležejí do rozsahu daného pojmu tvoří množinu, jejíž prvky se mohou lišit vedlejšími (podružnými) znaky nebo jinou kvalitou či kvantitou charakteristické vlastnosti (znaku). Při třídění (klasifikaci) provádíme rozklad dané množiny (rozsahu pojmu) na třídy (podmnožiny) podle vedlejších vlastností (znaků).

Třídění musí splňovat následující podmínky:

- 1) Třídění musí být **úplné** (vyčerpávající)-musí zahrnovat všechny prvky příslušné množiny (rozsahu pojmu).
- 2) Třídění musí být **disjunktní**, což znamená, že každý prvek tříděné množiny je zařazen právě do jedné třídy, to znamená, žádný prvek nemůže být současně prvkem dvou tříd.
- 3) Třídění je nutno provádět vždy podle **téhož znaku** (vlastnosti).

V třídění se často chybí. Například na otázku, jaké druhy trojúhelníků znáte, často slyšíme odpověď: trojúhelníky dělíme na ostroúhlé, pravoúhlé, rovnoramenné a rovnostranné. Třetí podmínka třídění podle téhož znaku je zde porušena.

Úplné roztřídění prvků, které náleží rozsahu daného pojmu se nazývá **klasifikace** daného pojmu.

Nejznámější způsob třídění je **třídění dichotomické**. Zde třídění na prvky, které uvedenou vlastnost mají a na prvky, které tuto vlastnost nemají. (*Dichotomický znamená dvojčlenný*).

Mějme množinu A a vlastnost V_1 , přičemž existují prvky množiny A , které vlastnost V_1 mají i prvky, které ji nemají. Potom

$$A_1 = \{x: x \in A \wedge V_1(x)\} \quad \text{a} \quad A'_1 = \{x: x \in A \wedge V'_1(x)\}.$$

Provedli jsme rozklad množiny A na dvě třídy A_1 a A'_1 . Platí podmínky třídění:

1) $A_1 \cup A'_1 = A$, 2) $A_1 \cap A'_1 = \emptyset$, 3) Třídili jsme dle znaku V_1 .

Pomocí jiné vlastnosti V_2 rozložíme množinu A_1 na dvě třídy

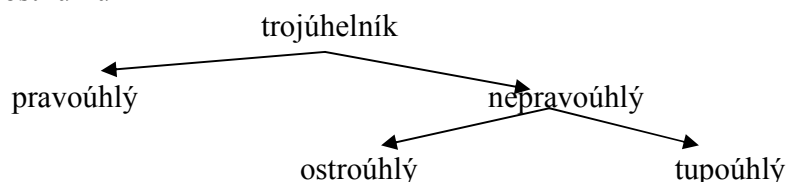
$$A_2 = \{x: x \in A \wedge V_1(x) \wedge V_2(x)\} \quad \text{a} \quad A'_2 = \{x: x \in A \wedge V_1(x) \wedge V'_2(x)\}.$$

Analogicky bychom mohli rozkládat množinu A_2 pomocí některé vlastnosti V_3 dvě třídy A_3 a A'_3 , atd., až dospějeme k nějaké množině A_n , kterou již dále nelze rozložit – provedli jsme **klasifikaci**.

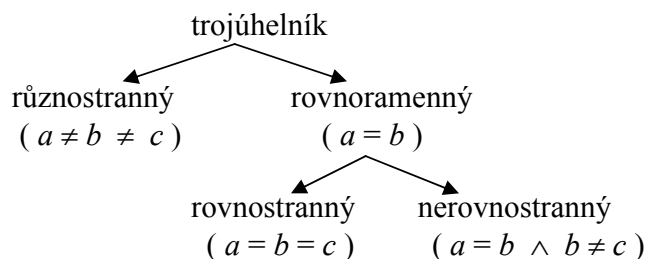
Příklad 8 :

Příklad dvou různých klasifikací téhož pojmu „trojúhelník“ podle úhlu a podle stran:

a) podle velikosti úhlu



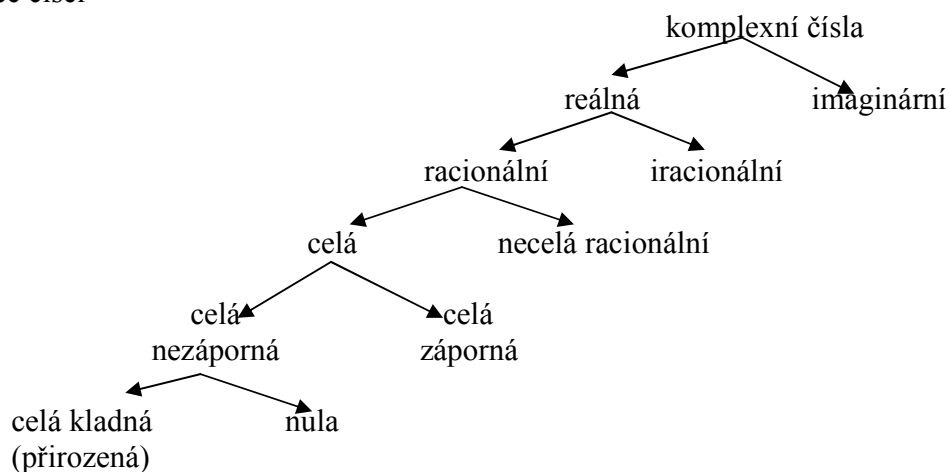
b) podle velikosti stran



Poznámka : Symbol $\wedge$ čteme „a současně“.

Příklad 9 :

Klasifikace čísel



5. Kompetence k řešení problémů: Teorie problému, problémové vyučování, hrozny problému v matematice

Problémové vyučování ve školské matematice

Problémovým vyučováním se rozumí postupné řešení, pro výukové cíle vytvořených, problémových situací.

Co je to **problémová situace**?

Problémová situace představuje více či méně jasně poznanou obtíž, provázenou nesouladem mezi dosavadními znalostmi a tím, co je pro řešení vzniklé nebo zadané úlohy třeba.

Úloha vytvářející problémovou situaci se nazývá **problémovou úlohou** nebo krátce **problémem**.

„Myšlení začíná s problémovou situací“.

Ne každá problémová situace vyvolává myšlení. Myšlení nevzniká zejména tehdy, když hledání cest k vyřešení problémové situace je pro žáky, v dané etapě vyučování nepřiměřené.

Entropie – míra neurčitosti nám udává náročnost řešení problémové úlohy.

Jeremy Kilpatrick (USA):

Problém je taková situace v níž máme dosáhnout nějaký cíl, ale přímá cesta k němu je zablokována.

Entropie

V teorii vyučování matematice je možné využít termínu entropie, což je dle *Slovníku spisovné češtiny pro školu a veřejnost* (2.) míra neurčitosti nějakého systému. O pojmu entropie v didaktice matematiky se zmiňuje Doc. Pavel Květoň ve své publikaci *Kapitoly z didaktiky matematiky II* (str. 10) (3.). Podívejme se spolu se mnou na zadání úloh v matematice a na míru neurčitosti při jejich řešení. Matematické úlohy budeme považovat za určitý systém. Například zadáme-li slovní úlohu na sjednocení dvou množin s neprázdným průnikem :

Ve třídě je 37 žáků. Každý z nich umí lyžovat nebo umí bruslit. Lyžovat umí 20 žáků, bruslit umí 31 žák. Znáznorněte a určete, kolik je ve třídě žáků, kteří umějí lyžovat a umějí bruslit (obojí). Náznorně vidíme, že všichni žáci třídy, kteří umějí lyžovat a bruslit, náležejí do průniku množin lyžujících a bruslících žáků. Celkem je jich 14. Úloha má právě jedno řešení.

Zadáme-li úlohu s vynecháním věty „Každý z nich umí lyžovat nebo umí bruslit“ tedy:

Ve třídě je 37 žáků. Lyžovat umí 20 žáků, bruslit umí 31 žák. Znáznorněte a určete, kolik je ve třídě žáků, kteří umějí lyžovat a umějí bruslit (obojí), musíme zvažovat, kolik je ve třídě žáků, kteří neumějí lyžovat a neumějí bruslit. Takových žáků není, pak jde o původní úlohu. Takový žák může být jeden, mohou být dva, tři, čtyři, pět, šest. Více jich být nemůže. Úloha má při tomto zadání úlohy celkem sedm řešení. Lze tedy odpovědět, že záleží na počtu žáků, kteří neumějí lyžovat a neumějí bruslit a počet žáků, kteří umějí lyžovat a bruslit je 14 nebo 15 nebo 16 nebo 17 nebo 18 nebo 19 nebo 20. V případě, že 6 žáků neumí lyžovat a neumí bruslit jsou lyžující žáci podmnožinou žáků bruslících.

První slovní úloha má menší entropii, neboť řešení úlohy je právě jedno, Druhá slovní úloha má větší entropii, neboť míra neurčitosti je větší a úloha má 7 možných řešení.

Podívejme se na geometrické učivo. Zadáme-li úlohu : *Určete počet přímek, které jsou určeny právě dvěma různými body*, tak víme, že taková přímka je právě jedna, neboť dva různé body leží právě v jedné přímce a též dva různé body leží v téže rovině. Zadáme-li úlohu: *Určete počet přímek, které jsou určeny právě třemi různými body*, tak musíme zvažovat, zda body leží právě v jedné přímce a nebo neleží právě v jedné přímce. V prvním případě je taková přímka právě jedna a ve druhém případě jsou přímky tři. Tři body, které neleží právě v jedné přímce leží právě

v jedné rovině. Zadáme-li úlohu : *Určete počet přímek, které jsou určeny právě čtyřmi různými body*, tak musíme zvažovat :

- 1) Čtyři různé body leží právě v jedné přímce, pak je taková přímka právě jedna,
- 2) Tři různé body leží právě v jedné přímce a jeden bod ne, pak tyto body leží právě v jedné rovině a takové přímky, které splňují podmínky úlohy jsou čtyři,
- 3) Čtyři různé body leží v právě v jedné rovině a tři různé body neleží právě v jedné přímce, pak počet přímek je šest,
- 4) Čtyři různé body neleží právě v jedné rovině a tři různé body neleží právě v jedné přímce, pak počet přímek je též šest . Počet přímek je stejný jako v případě 3).

Vidíme, že přidáním počtu bodů je entropie stále větší a větší. Čím je větší entropie zadané úlohy, tím více informací obsahuje odpověď na otázku úlohy. Jestliže úloha obsahuje příliš velkou entropii, pak problém, který mají žáci řešit nevyvolává aktivní myšlenkovou činnost a vede žáky k bezradnosti, pokud je entropie příliš malá tak úloha pro žáky není problémem, žáci znají okamžitou odpověď. Například na úlohu *Určete počet přímek, které jsou určeny právě dvěma různými body*, žáci znají okamžitou odpověď: Taková přímka je právě jedna.

Je třeba se ještě zmínit o **intuici**. **Intuice** je vyšší stupeň **indukce**. Schopnost intuice je jednak vrozená, jednak se posiluje zkušeností s prací v daném oboru. Slovo intuice můžeme překládat jako „vnuknutí“. Intuice úzce souvisí s heuristickou strategií, o které se zmiňujeme později.

Příklad:

Budeme se zabývat tak zvanými **reverzními čísly** . Při využití indukce a intuice matematika není divácká disciplína, musíme více produkovat než reprodukovat.

Definice : Nechť přirozené číslo a má rozvinutý zápis v oboru přirozených čísel a nuly v desítkové číselné soustavě

$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + a_{n-3} \cdot 10^{n-3} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$, kde $0 \leq a_i < 10$ ($i = 0$ až n), pak přirozené číslo a s rozvinutým zápisem

$a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + a_3 \cdot 10^{n-3} + \dots + a_{n-1} \cdot 10^1 + a_n \cdot 10^0$ se nazývá číslo reverzní (obrácené) k číslu a .

Například: Je dáno přirozené číslo 23067, číslo 76032 je reverzním (obráceným) číslem k číslu 23067 a samozřejmě i obráceně. Pozor na terminologii. Něco jiného je číslo opačné než číslo obrácené.

V úvodu se budeme zabývat reverzními čísly dvoucifernými. Vysvětlíme si pojem reverzní číslo. K číslu 28 je reverzní číslo 82. Domluvíme se, že jednociferná čísla budeme zapisovat s nulou na místě desítek. Například reverzním číslem k číslu 08 bude číslo 80 a obráceně reverzním číslem k číslu 80 bude 08.

Napíšeme libovolné dvouciferné číslo. K tomuto číslu napíšeme číslo reverzní. Od většího dvouciferného čísla z těchto dvou odečteme jeho číslo reverzní. Pokračujeme v psaní libovolných dvouciferných čísel a stále odečítáme jejich menší reverzní čísla a hlavně pozorujeme zda nedojde k nějakému zajímavému výsledku. Neznáme k jakému obecnému závěru, k jakému cíli máme dojít. Prof. Jan Kopka z ústecké univerzity tento typ úloh nazývá zkoumáním. Najednou všimneme, že všechny výsledky jsou násobky devíti. Můžeme zakřičet řecky „Heureka!“ – česky „Našel jsem!“. Pracujeme tedy tak zvanou heuristickou metodou. Současně využíváme intuici. Na základě svých zkušeností, neboť známe násobilku devíti, jsme přišli na to, že jde o násobky devíti. **Intuicí**, vlastně vyšším stupněm indukce jsme dospěli k určitému závěru. Položme si další úkol. Sledujme dvouciferná čísla, která odčítáme a násobky devíti ke kterým jsme došli. Dojdeme k závěru, že jde o násobky devíti rozdílu čísel, která jsou zapsaná příslušnými číslicemi daného čísla.

Například : K číslu 82 je reverzním číslem 28. $82 - 28 = 54$. Opravdu $8-2 = 6$ a $6 \cdot 9 = 54$.

Provedeme si důkaz proč tomu tak je: $a > \bar{a}$, $a = 10 \cdot x + y$, $\bar{a} = 10 \cdot y + x$, pak

$$a - \bar{a} = 10 \cdot x + y - (10 \cdot y + x) = 10 \cdot x + y - 10 \cdot y - x = 9 \cdot x - 9 \cdot y = 9(x - y).$$

Nyní se budeme zabírat čísly trojčifernými. Vytváříme dle Prof. Jana Kopky tak zvané **hrozný problémů**. Opět se dohodneme, že k jednocifernému číslu např. 3 je reverzním trojčiferným číslem číslo 300 a k číslu 300 je reverzním trojčiferným číslem číslo 003. K číslu například 27 je reverzním trojčiferným číslem číslo 720 a k číslu 720 je reverzním trojčiferným číslem číslo 027. Opět budeme chtít odčítat od sebe navzájem trojčiferná reverzní čísla, která k sobě patří a to vždy od většího menší. Budeme zase chtít najít co je zajímavé. Dojdeme k závěru, že výsledkem je vždy násobek čísla 99 a při dalším zkoumání zjistíme, že jde o násobek rozdílu čísel zapsaných první a poslední cifrou většího k sobě patřících reverzních čísel. Opět provedeme matematický důkaz proč tomu tak je: $a > \bar{a}$, $a = 100 \cdot x + 10 \cdot y + z$, $\bar{a} = 100 \cdot z + 10 \cdot y + x$, pak

$$a - \bar{a} = 100 \cdot x + 10 \cdot y + z - (100 \cdot z + 10 \cdot y + x) = 100 \cdot x + 10 \cdot y + z - 100 \cdot z - 10 \cdot y - x = 99 \cdot x - 99 \cdot z = 99(x - z).$$

Můžeme pokračovat obecně i rozdílem čtyřciferných reverzních čísel, ale zde již uvidí, že písemné odečtení je rychlejší než obecně odvozený předpis.

$a > \bar{a}$, $a = 1000 \cdot x + 100 \cdot y + 10 \cdot u + z$, $\bar{a} = 1000 \cdot z + 100 \cdot u + 10 \cdot y + x$, pak

$$\begin{aligned} a - \bar{a} &= 1000 \cdot x + 100 \cdot y + 10 \cdot u + z - (1000 \cdot z + 100 \cdot u + 10 \cdot y + x) = \\ &= 1000 \cdot x + 100 \cdot y + 10 \cdot u + z - 1000 \cdot z - 100 \cdot u - 10 \cdot y - x = \\ &= 999 \cdot x + 90 \cdot y - 90 \cdot u - 999 \cdot z = 999 \cdot (x - z) + 90 \cdot (y - u). \end{aligned}$$

Například: $4853 - 3584 = 999 \cdot 1 + 90 \cdot 3 = 999 + 270 = 1269$

Dále přistoupíme k reverzním číslům, která jsou navzájem stejná. Nazýváme je palindromy, neboť se čtou stejně odpředu i odzadu. Nejznámějším palindromem v českém jazyce je věta: „Kobyla má malý bok“. Nerespektujeme zde délku souhlásek. V matematice jsou zajímavé čtyřciferné palindromy. Vypíšeme podle velikosti určitý počet, záleží na nás jak velký počet, čtyřciferných palindromů. Opět si položíme otázku, zda na těchto palindromech není něco zajímavého. Nejmenším čtyřciferným palindromem je číslo 1001. Další čtyřciferné palindromy jsou podle velikosti čísla 1111, 1221, 1331, 1441, 1551, atd. Číslo 1001 je dělitelné číslem 11. Každé následující číslo je o 110 větší. Vzdálenost čísel je 110. Číslo 1001 je násobkem čísla 11, rozdíly (vzdálenosti) jsou také násobkem čísla 11, musí být tedy každý následující palindrom také násobkem čísla 11, respektive je dělitelný 11. Došli jsme k závěru, že vzdálenost čtyřciferných palindromů je 110, ono tomu však vždy tak není. Pokud se při přechodu od jednoho palindromu k dalšímu změní číslice na místě tisíců, pak je difference jiná. Přijďme na to, že vzdálenost těchto palindromů je 11. Číslo 11 je také násobkem čísla 11 (je dělitelné 11). Je tedy vše v pořádku a ukázali jsme si, že čtyřciferné palindromy jsou násobkem čísla 11. Další dotaz může být: „Kolik je všech čtyřciferných palindromů?“. Správná odpověď je 90. Určitě přijďme na systém jak počet čtyřciferných palindromů určit.

Dělitelnost čtyřciferných palindromů snadno dokážeme velmi jednoduchým důkazem. Zapišeme libovolný čtyřciferný palindrom ve tvaru $abba$, kde a , b jsou číslice v desítkové soustavě. Provedeme rozvoj čísla tohoto čísla v desítkové soustavě

$$abba = 1\,000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 11(91a + 10b). \text{ Závěr ukazuje, že palindrom } abba \text{ je dělitelný 11 (resp. je násobkem čísla 11).}$$

Ukázali jsem si hrozný problémů a jak se držet hesla, že máme více produkovat než reprodukovat.

6. Kompetence k řešení problémů: Rutinní problémy, nerutinní problémy, zkoumání v matematice, heuristické strategie, motivace

Prof. Jan Kopka (UJEP):

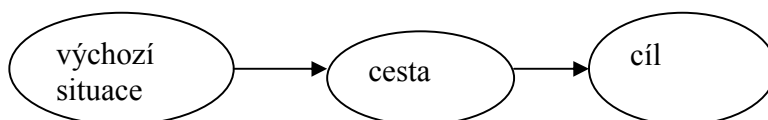
Problém má tři složky:

Výchozí situace, v níž popisujeme souvislosti a poskytujeme informace nebo údaje.

Cíl, který chce řešitel dosáhnout.

Cesta od výchozí situace k cíli, která pro řešitele může, ale také nemusí být zřejmá či dosažitelná.

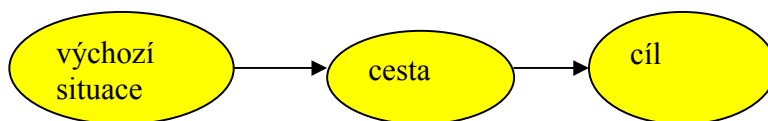
Grafické znázornění:



1. Cvičení (rutinní problémy)

- Výchozí situace je přesně popsána (situace je uzavřená),
- cíl je přesně zadán (cíl je uzavřen),
- cesta je známa.

Grafické znázornění:



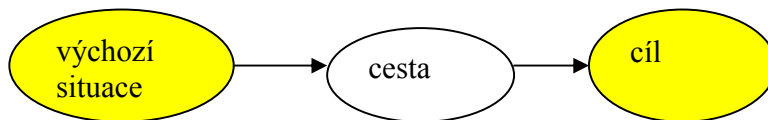
Příklad rutinního problému:

Příklad, žák umí vyřešit rovnici $x + 7 = 10$ a my mu zadáme rovnici $x + 6 = 9$, aby ji vyřešil, zadali jsme mu rutinní problém. Žák umí vypočítat písemně součet dvou dvouciferných čísel bez přechodu přes 10, zadali jsme mu jiný obdobný příklad bez přechodu přes 10.

2. Úlohy (nerutinní problémy)

- Výchozí situace je přesně popsána (je uzavřená),
- cíl je přesně zadán (je uzavřen),
- cesta není známa.

Grafické znázornění:



Příklad nerutinního problému:

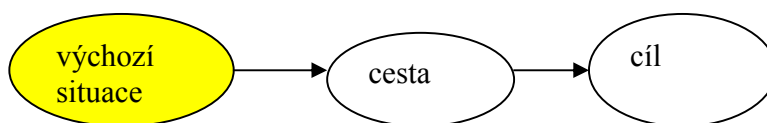
Žák umí písemný součet dvou dvouciferných čísel, např. včetně přechodů přes 10. Zadáme mu písemný součet dvou tříciferných čísel, který nikdy neprováděl.

3. Zkoumání

Stále více se v didaktice matematiky více a více objevuje tento pojem.

- Výchozí situace je přesně popsána,
- cíl není přesně zadán nebo není zadán vůbec,
- cesta k cíli samozřejmě nemůže být známa.

Grafické znázornění:

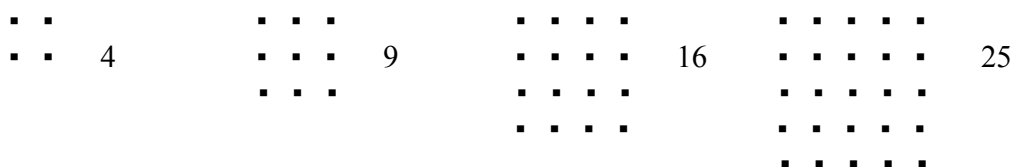


Příklady matematického zkoumání:

1. Žák má dosadit za proměnnou □ znaménka operací +, - a zkoumat výsledky, které dostane:
 $8 \square 4 \square 2 \square 1 =$.
2. Trojúhelníková čísla jsou 1, 3, 6, 10,.....



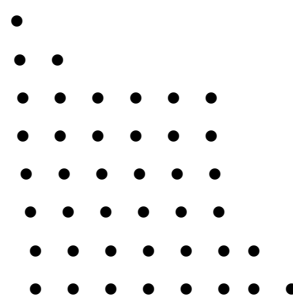
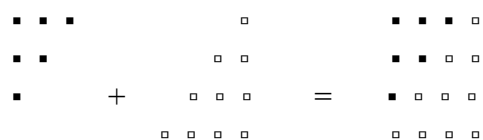
Čtvercová čísla jsou 4, 9, 16, 25,.....



Zkoumejte součty dvou sousedních trojúhelníkových čísel.

Zkoumejte zda existují čísla, která jsou současně trojúhelníková a čtvercová.

Graficky: $6 + 10$



Heuristické strategie

Matematické zkušenosti žáka nejsou úplné, pokud nikdy neměl možnost řešit problém, který si sám vymyslel.

Je těžké mít dobrý nápad, když z dané oblasti známe málo a je nemožné ho mít, pokud neznáme nic. Dobré nápady jsou založeny na minulých zkušenostech a dříve získaných znalostech.

G. Polya

Ukažme si konkrétní příklad. Použitý problém je zajímavý i sám o sobě a řešili jej již matematikové v antickém Řecku. Vlastnost lichých čísel, o níž se v problému hovoří, je vedla k tomu, že lichá čísla začali nadřazovat nad čísla sudá.

Problém: Zkoumejte součty prvních několika za sebou jdoucích lichých přirozených čísel:

1,3,5,7,9,11,13,15,17,.....

$1+3=4$, $1+3+5=9$, $1+3+5+7+9=16$,.....atd.

Podívejme se na vizualizaci této skutečnosti

$$2^2 \quad 3^2 \quad 4^2$$

					36
				25	
			16		
		9			
	4				
1					

V určitém okamžiku přijdeme na to, že se jedná o druhé mocniny počtu sčítaných čísel a radostně zakřičíme „Našel jsem!“, řecky „Heuréka!“ a proto se tento způsob hledání nazývá **heuristická strategie**.

Systematické experimentování

Problém: Zjistěte, kolik čtverců je ve čtvercové síti $n \cdot n$?

Konkrétní příklad : $4 \cdot 4$

Počet čtverců velikosti $1 \cdot 1$ 4^2 (4 čtverce vedle sebe a 4 nad sebou)

Počet čtverců velikosti $2 \cdot 2$ 3^2 (3 vedle sebe a 3 nad sebou)

Počet čtverců velikosti $3 \cdot 3$ 2^2 (2 vedle sebe a 2 nad sebou)

Počet čtverců velikosti $4 \cdot 4$ 1^2

Celkový počet čtverců..... $4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 30$

Obdobně $3 \cdot 3$, $5 \cdot 5$, atp.

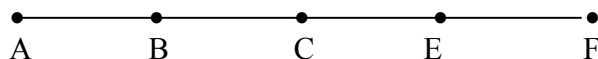
Analogie:

Problém přeneseme do jednorozměrného prostoru:

Určete celkový počet úseček na úsečce délky n , která je $(n + 1)$ body rozdělena na jednotkové úsečky.

Konkrétní příklad:

Určete celkový počet úseček na úsečce délky 4, která je 5 body rozdělena na jednotkové úsečky.



Počet úseček délky 1.....4

Počet úseček délky 2.....3

Počet úseček délky 3.....2

Počet úseček délky 4.....1

Celkový počet úseček $4 + 3 + 2 + 1$

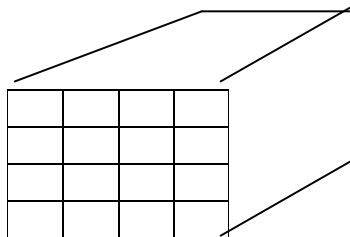
Obdobně úsečka délky 3, respektive 5, atp.

Problém přeneseme do trojrozměrného prostoru:

Problém: Zjistěte, kolik krychlí je v krychli o rozměru $n \cdot n \cdot n$?

I. Konkrétní příklad

Zjistěte, kolik krychlí je v krychli o rozměru $4 \cdot 4 \cdot 4$?



Počet krychlí velikosti $1 \cdot 1 \cdot 1$ 4^3 (4 krychle vedle sebe, 4 za sebou, 4 nad sebou)

Počet krychlí velikosti $2 \cdot 2 \cdot 2$ 3^3

Počet krychlí velikosti $3 \cdot 3 \cdot 3$ 2^3

Počet čtverců velikosti $4 \cdot 4 \cdot 4$ 1^3

Celkový počet čtverců $4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3 = 90$

Dostali jsme tak zvaný **hrozen problém**.

V matematice se dá dokázat, že počet úseček je dán vzorcem
 $n^1 + (n-1)^1 + \dots + 1^1$,
 že počet čtverců je dán vzorcem
 $n^2 + (n-1)^2 + \dots + 1^2$,
 že počet krychlí je dán vzorcem
 $n^3 + (n-1)^3 + \dots + 1^3$.

Příklad :

a) Pokud budeme postupně zvětšovat délku úsečky, tak její délka bude přímo úměrná tomuto zvětšování a počet „vrcholů“ těchto úseček bude 2, lze napsat 2^1 (jednorozměrný prostor).

b) Budeme postupně zvětšovat velikost stran čtverce. Čtverec o velikosti strany 1 má $2^2 = 4$ vrcholy, obsah jeho plochy je 1, obvod jeho stran je 4, čtverec o velikosti strany 2 má $2^2 = 4$ vrcholy, obsah jeho plochy je 4, obvod jeho stran je 8, čtverec o velikosti strany 3 má $2^2 = 4$ vrcholy, obsah jeho plochy je 9, obvod jeho stran je 12, čtverec o velikosti strany 4 má $2^2 = 4$ vrcholy, obsah jeho plochy je 16, obvod jeho stran je 16, atd. (Jde o dvojrozměrný prostor).

Délku strany čtverce označíme x

Pokud postupně zvětšujeme velikost čtverce, tak dojdeme k závěru, že pro počet vrcholů y platí:

$$y = 0 \cdot x + 2^2,$$

pro jeho obvod y platí :

$$y = 4 \cdot x,$$

pro jeho obsah y platí :

$$y = x^2.$$

c) Budeme postupně zvětšovat velikost stran krychle. Krychle o velikosti strany 1 má $2^3 = 8$ vrcholů, její objem je 1, délka hran je 12, obsah jejího pláště 6, krychle o velikosti strany 2 má $2^3 = 8$ vrcholů, její objem je 8, délka hran je 24, obsah jejího pláště 24, krychle o

velikosti strany 3 má $2^3 = 8$ vrcholů, její objem je 27, délka hran je 18, obsah jejího pláště 54, atd. (Jde o trojrozměrný prostor).

Délku strany čtverce označíme x

Pokud postupně zvětšujeme velikost krychle, tak dojdeme k závěru, že pro počet vrcholů y platí:

$$y = 0 \cdot x + 2^3,$$

pro délkou hran y platí:

$$y = 12 \cdot x,$$

pro obsah pláště y platí:

$$y = 6 \cdot x^2,$$

pro její objem:

$$y = x^3.$$

Jde opět o hrozny problémů.

Motivace:

Při motivování se snažíme získat zájem žáků nebo jinak řečeno zaměřit jejich pozornost určitým směrem

Budeme motivovat žáky úlohou pro pozdější příklady na součet členů aritmetické posloupnosti. Tady vidíte, že i látku střední školy můžeme vhodným způsobem přes problém použít již na 1. stupni ZŠ.

Problém: První den ti dám 1 korunu, druhý den 2 koruny, třetí den 3 koruny a tak dále. Kolik korun ode mne dostaneš za rok (365 dní). Co je lepší dostávat peníze v průběhu jednoho roku nebo dostat na ruku ihned 50 000 korun ?

Dostal jsem od žáka krásnou odpověď: „*Já bych si vzal 50 000 korun, protože je mám hned a na ruku.*“

Měl jsem se ptát „Co je víc? a ne „Co je lepší?. Holt na blbou otázku, blbá odpověď.

Řešení : $s_{365} = (1 + 365) \cdot 365 / 2 = 66796$

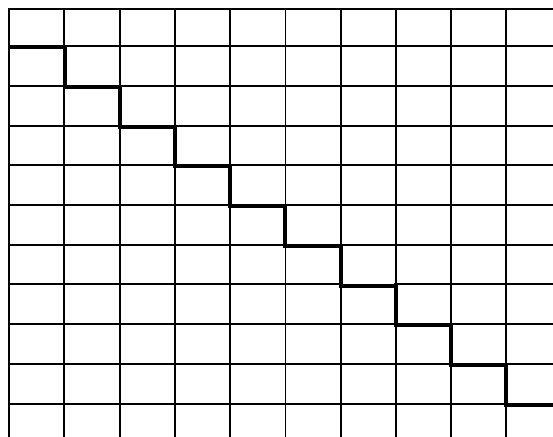
Více je tedy pobírat peníze postupně.

Ukážeme si příklad třeba 10 dní :

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 & + & 7 & + & 8 & + & 9 & + & 10 \\ 10 & + & 9 & + & 8 & + & 7 & + & 6 & + & 5 & + & 4 & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array} \quad \text{je to 2 krát}$$

$$11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 = 10 \cdot (1 + 10)$$

$$s_{10} = 10 \cdot (1 + 10) : 2 = 55$$



Vykládá se, nevíme jak je příběh pravdivý, že německý matematik Karl Fridrich Gauss (1777-1875) když chodil do venkovské školy, dostali žáci za úkol spočítat součet čísel od 1 do 100, neboť pan učitel si potřeboval jít na venkovské škole podojit kozu. Pan učitel zadal úkol a mladý Gauss se hned hlásil a řekl součet je 5 050. Pan učitel byl překvapen a ptal se jak na součet přišel a Gauss řekl: „Součet prvního a posledního čísla je 101, součet druhého a předposledního čísla je také 101 a takových součtů je 50, tedy $50 \cdot 101$ je 5 050.“ A tím vzniklo rčení, když se něco nestačí udělat „Kozu zůstala nepodojená!“

Problém : Naučíme žáky písemně sčítat dvojčíselná čísla, nejdříve bez přechodu přes deset a pak s přechodem přes 10 jim zadáme jako problém .

Motivujeme přes peníze.

$34 + 52$ □□□ oooo □□□□□oo

$26 + 37$ □□ooooooo □□□ooooooo Směníme: oooooooooo = □
 □□□□□ooo

34	26
<u>52</u>	<u>37</u>
86	63

7. Kompetence k řešení problémů: Řešení jednoduché slovní úlohy a jejich typologie. Analytické a syntetické řešení složené slovní úlohy

V každé matematické úloze jde o to, abychom dokázali platnost (pravdivost) nějakého výroku. Podle toho, o jaký výrok jde, máme různé druhy úloh. Tak například úlohu, ve které máme dokázat platnost nějaké matematické věty, nazýváme důkazovou, úlohu, v níž máme vypočítat jedno nebo několik neznámých čísel vyhovujícím určitým podmínkám, nazýváme početní, úlohu, v níž máme sestavit určitý geometrický útvar mající dané podmínky, nazýváme konstruktivní apod.

Slovní úlohy jsou takové početní úlohy, ve kterých je souvislost mezi danými a hledanými čísly vyjádřena slovní formulací a v nichž je třeba na základě vhodné úvahy zjistit, jaké početní výkony je třeba provést s danými čísly, abychom došli k číslům, která máme vypočítat.

Poznámka: Mezi slovní úlohy nezahrnujeme úlohy, ve kterých je výslovně udáno, jaké početní výkony máme s danými čísly provést, i když je úloha formulována slovně. Například: Sečti čísla 5 a 7.

Prof. Jan Kopka (UJEP) ve své publikaci „Hrozny problémů ve školské matematice“ uvádí, že :problém má tři složky:

Výchozí situace, v níž popisujeme souvislosti a poskytujeme informace nebo údaje.

Cíl, který chce řešitel dosáhnout.

Cesta od výchozí situace k cíli, která pro řešitele může, ale také nemusí být zřejmá či dosažitelná.

Grafické znázornění:



1. Cvičení (rutinní problémy)

- Výchozí situace je přesně popsána (situace je uzavřená),
- cíl je přesně zadán (cíl je uzavřen),
- cesta je známa.

Grafické znázornění:



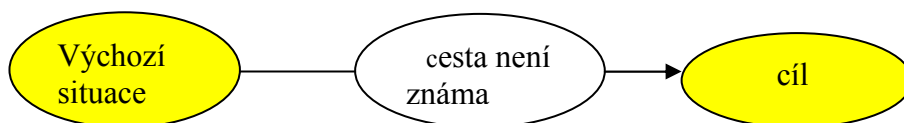
Příklad rutinního problému:

Příklad, žák umí vyřešit rovnici $x + 7 = 10$ a my mu zadáme rovnici $x + 6 = 9$, aby ji vyřešil, zadali jsme mu rutinní problém. Žák umí vypočítat písemně součet dvou dvouciferných čísel bez přechodu přes 10, zadali jsme mu jiný obdobný příklad bez přechodu přes 10.

2. Úlohy (nerutinní problémy)

- Výchozí situace je přesně popsána (je uzavřená),
- cíl je přesně zadán (je uzavřen),
- cesta není známa.

Grafické znázornění:



Slovní úlohy můžeme dle prof. Kopka zařadit jako nerutinní problém, kde je zadána výchozí situace, což jsou podmínky úlohy a otázky slovní úlohy uvádí cíl, ale neznáme cestu, jak k cíli dospět. To je právě problém, který žáci musí řešit.

Každá slovní úloha obsahuje podmínku (podmínky) a otázku (otázky). Podmínkou úlohy rozumíme úplný popis toho, oč v úloze jde, spolu s číselnými údaji, jež popsanou situaci charakterizují; otázka pak udává, co máme vypočítat. Abychom slovní úlohu vyřešili, je třeba vyjádřit hledaná čísla pomocí daných čísel a takto vyjádřená čísla vypočítat. To se může dít dvojím způsobem:

- 1) Aritmeticky (úsudkem) – hledaná čísla vyjádříme pomocí daných čísel přímo.
- 2) Algebraicky (rovnicí nebo soustavou rovnic) – hledaná čísla vhodně označíme a sestavíme rovnici nebo soustavu rovnic.

Řešení úsudkem bývá často obtížné, řešení rovnicí nebo soustavou rovnic bývá jednodušší. Proto, nevíme-li si rady, jak řešit danou úlohu úsudkem, můžeme ji řešit nejdříve rovnicí (soustavou rovnic) a z nalezeného výsledku hledat, jak máme úlohu řešit úsudkem.

Příklad:

Bylo koupeno 8 peněženek za 1860 Kč. Některé z nich byly z kůže po 420 Kč za kus, jiné z koženky po 120 Kč za kus. Kolik bylo kterých?

Algebraické řešení:

Zápis (rozbor):

8 peněženek za 1860 Kč

x počet peněženek z kůže po 420 Kč za kus

y počet peněženek z koženky po 120 Kč za kus

Matematizace reálné situace (sestavení soustavy rovnic):

$$\begin{array}{rcl} x & + & y = 8 \\ 420x & + & 120y = 1860 \end{array}$$

Řešení úlohy matematickým aparátem:

$$\begin{array}{rcl} x & + & y = 8 \quad / \cdot 420 \\ 420x & + & 120y = 1860 \\ - \quad \boxed{\rightarrow} & & 420x + 420y = 8 \cdot 420 \\ & & \underline{420x + 120y = 1860} \\ & & 420y - 120y = 8 \cdot 420 - 1860 \\ & & y(420 - 120) = 8 \cdot 420 - 1860 \\ & & y = (8 \cdot 420 - 1860) : (420 - 120) \end{array}$$

Z výsledku lze najít jak úlohu řešit úsudkem:

- 1) Kdyby bylo všech 8 peněženek z kůže, stály by $420 \cdot 8 = 3360$ Kč.
- 2) Zaplacen bylo však méně o $3360 - 1860$ Kč, musely tedy být některé peněženky levnější.
- 3) Rozdíl cen peněženek je $420 - 120 = 300$ Kč.
- 4) Peněženek z koženky je tedy tolik, kolikrát je 1500 více než 300 Kč, tj. 5.
- 5) Peněženek z kůže bylo $8 - 5 = 3$.

Nebo lze postupovat takto:

$$\begin{array}{rcl}
 x + y & = & 8 \\
 420x + 120y & = & 1860 \\
 \hline
 x + y & = & 8 \quad / \cdot 120 \\
 420x + 120y & = & 1860 \\
 - \quad \rightarrow & & \\
 120x + 120y & = & 8 \cdot 120 \\
 420x + 120y & = & 1860 \\
 \hline
 420x - 120x & = & 8 \cdot 420 - 1860 \\
 x(420 - 120) & = & 1860 - 8 \cdot 120 \\
 x & = & (1860 - 8 \cdot 120) : (420 - 120)
 \end{array}$$

Z výsledku lze najít jak úlohu řešit úsudkem:

- 1) Kdyby bylo všech 8 peněženek z koženky, stály by $120 \cdot 8 = 960$ Kč.
- 2) Zapláceno bylo však více o $1860 - 960 = 900$ Kč, musely tedy být některé peněženky dražší.
- 3) Rozdíl cen peněženek je $420 - 120 = 300$ Kč.
- 4) Peněženek z kůže je tedy tolik, kolikrát je 900 více než 300 Kč, tj. 3.
- 5) Peněženek z koženky bylo $8 - 3 = 5$.

Kontrola správnosti:

Při dosazení výsledku do textu slovní úlohy jsou splněny podmínky slovní úlohy. Též jsme posoudili reálnost řešení úlohy.

Formulace odpovědi na otázku úlohy:

Bylo koupeno 5 peněženek z koženky a 3 peněženky z kůže.

Zde jsme si zopakovali postup při řešení slovní úlohy:

- 1) **Rozbor slovní úlohy** (stručný záznam zadání úlohy, případně některý způsob grafického znázornění, ujasnění si podmínek a otázek slovní úlohy)
- 2) **Matematizace reálné situace** (vyjádření struktury úlohy matematickou symbolikou, např. rovnicí, nerovnicí, numerickým příkladem).
- 3) **Řešení úlohy matematickým aparátem** (řešení rovnice anebo nerovnice, numerický výpočet, grafické řešení).
- 4) **Kontrola správnosti řešení** (kontrola numerických výpočtů, posouzení reálnosti řešení, kontrola dosazením do textu slovní úlohy, zda řešení odpovídá podmínkám slovní úlohy).
- 5) **Formulace slovní odpovědi na otázku** (otázky) slovní úlohy.

Ukážeme si ještě jednu slovní úlohu, kde si ukážeme aritmetické a algebraické řešení.

Úloha:

Ve třídě je 27 žáků, z toho je děvčat o 7 více než chlapců. Kolik je ve třídě děvčat a kolik chlapců.

Algebraické řešení:

xpočet děvčat

ypočet chlapců

$$\begin{array}{rcl}
 + \quad \rightarrow & x + y & = 27 \\
 & x - y & = 7 \\
 \hline
 & 2x & = 27 + 7 \\
 & 2x & = 34
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x & = & 34 : 2 \\ \underline{x} & = & 17 \\ y & = & 10 \end{array}$$

Aritmetické řešení:

Kdyby bylo chlapců tolik jako děvčat, bylo ve třídě o 7 žáků více, tj. $27 + 7 = 34$, je tedy dvojnásobný počet děvčat 34, takže děvčat je $34 : 2 = 17$.

$$\begin{array}{rcl} - & \left[\begin{array}{l} x + y = 27 \\ \rightarrow x - y = 7 \end{array} \right. & \\ \hline & 2y = 27 - 7 & \\ & 2y = 20 & \\ & y = 20 : 2 & \\ & y = 10 & \\ & \underline{x = 17} & \end{array}$$

Aritmetické řešení:

Kdyby bylo děvčat tolik jako chlapců, bylo ve třídě o 7 žáků méně, tj. $27 - 7 = 20$, je tedy dvojnásobný počet chlapců 20, takže chlapců je $20 : 2 = 10$.

Nadbytečná podmínka slovní úlohy:

Podmínky úlohy mají obsahovat všechny údaje, které jsou k řešení úlohy potřebné. Někdy se však stává, že slovní úloha obsahuje i údaj, který k odpovědi na danou otázku potřebný není. Takový údaj zkonkrétňuje danou situaci nebo usnadňuje řešení úlohy.

Příklad:

Objem nádrže je 600 hl. Prvním kohoutkem se nádrž naplní za 5 hodin, druhým za 6 hodin a třetím za 10 hodin. Za jak dlouho se nádrž naplní, budou-li současně otevřeny všechny tři kohoutky?

Prvním kohoutkem se za 1 hodinu naplní $600 : 5 = 120$ hl nádrže.

Druhým kohoutkem se za 1 hodinu naplní $600 : 6 = 100$ hl nádrže.

Třetím kohoutkem se za 1 hodinu naplní $600 : 10 = 60$ hl nádrže

Všemi třemi kohoutky se za 1 hodinu naplní $120 + 100 + 60 = 280$ hl nádrže

Celá nádrž se naplní za $600 : 280 = 2 \frac{1}{7}$ hodiny.

Řešení bez nadbytečné podmínky:

Prvním kohoutkem se za 1 hodinu naplní $1/5$ nádrže.

Druhým kohoutkem se za 1 hodinu naplní $1/6$ nádrže.

Třetím kohoutkem se za 1 hodinu naplní $1/10$ nádrže.

Všemi třemi kohoutky se za 1 hodinu naplní $1/5 + 1/6 + 1/10$ nádrže.

$$\frac{6}{30} + \frac{5}{30} + \frac{3}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

Celá nádrž se naplní za $1 : \frac{7}{15} = \frac{15}{7} = 2 \frac{1}{7}$ hodiny

Obecné řešení:

Vobjem, t_1 1. čas naplnění nádrže
 t_2 2. čas naplnění nádrže
 t_3 3. čas naplnění nádrže
 t výsledný čas

$$V : (V/t_1 + V/t_2 + V/t_3) = t$$

$$V : V (1/t_1 + 1/t_2 + 1/t_3) = t$$

$$1 : 1 (1/t_1 + 1/t_2 + 1/t_3) = t$$

V (objem) se vykrátil a tím se ukázala jeho nadbytečnost.

Jednoduché slovní úlohy

Jednoduché slovní úlohy jsou takové slovní úlohy k jejichž řešení stačí právě jeden početní výkon. Jejich typy jsou určeny dle početní operace sčítání, odčítání, násobení a dělení v množině přirozených čísel a nuly $\mathbb{N}_0$. Tyto typy popisuje Prof. RNDr. Karel Hruša. Je důležité tyto typy znát, neboť vedou žáky 1. stupně základní školy metodickou řadou k lepšímu pochopení početní operace.

Typy slovních úloh:

Sčítání (určení součtu, zvětšení o daný počet)

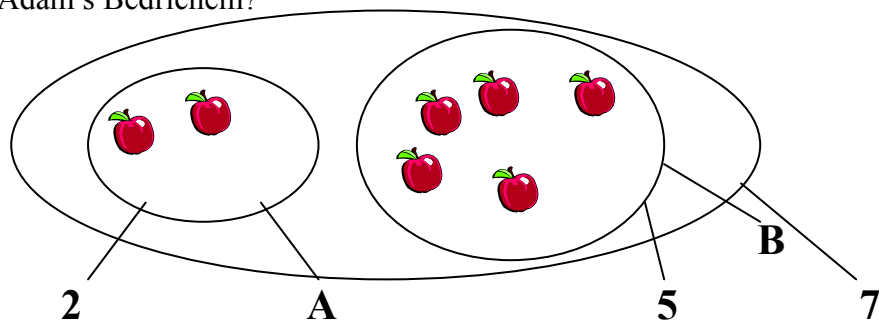
Odčítání (určení rozdílu, zmenšení o daný počet , porovnávání rozdílem a to „o kolik více“ a „o kolik méně“).

Násobení (určení součtu stejných sčítanců, zvětšení čísla několikrát)

Dělení (dělení na stejné části, dělení podle obsahu, zmenšení čísla několikrát, porovnávání podílem a to „kolikrát více“ a „kolikrát méně“).

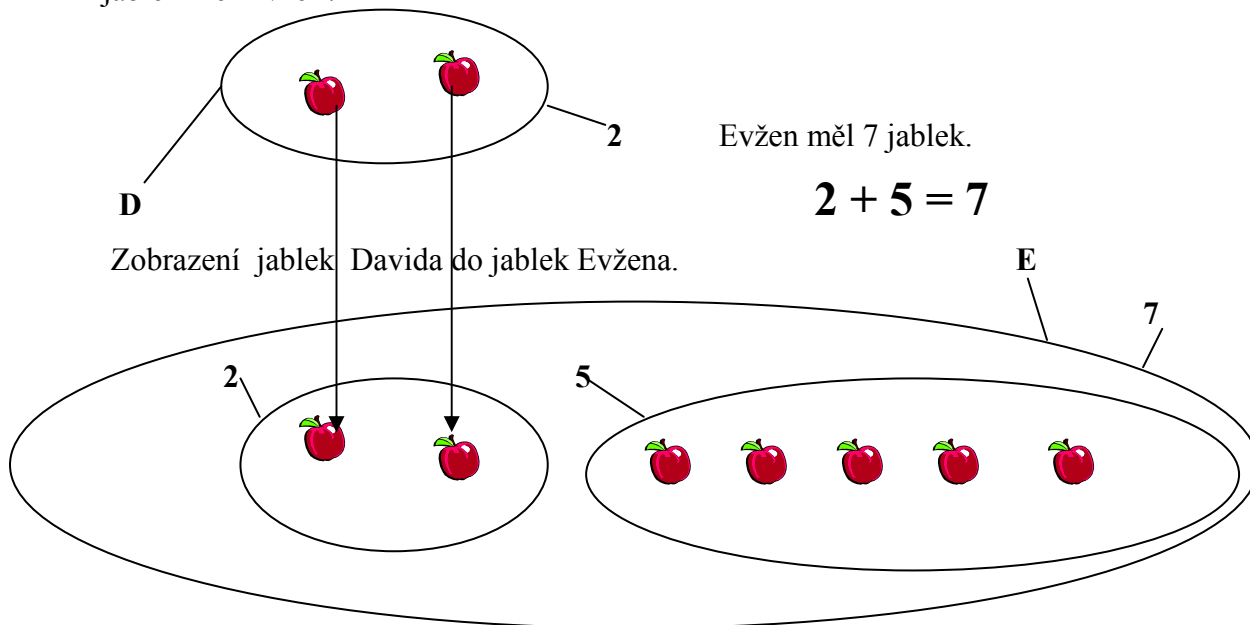
Příklady:

Určení součtu: Adam měl 2 jablka, Bedřich měl 5 jablek. Kolik jablek měli dohromady Adam s Bedřichem?



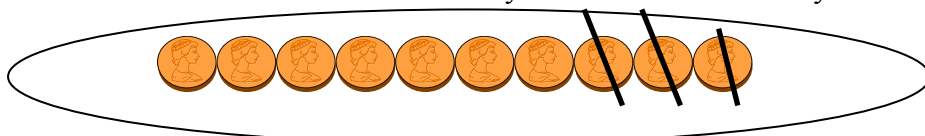
$$2 + 5 = 7 \text{ Adam s Bedřichem měli dohromady 7 jablek.}$$

Zvětšení o daný počet: David měl 2 jablka, Evžen měl o 5 jablek více než David. Kolik jablek měl Evžen?



$$2 + 5 = 7$$

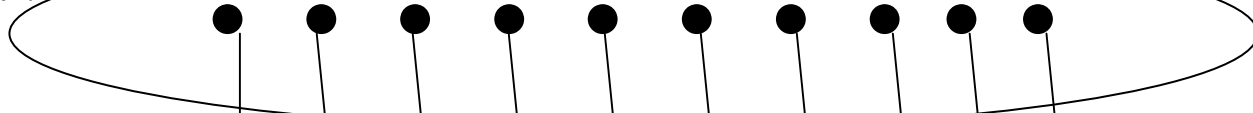
Určení rozdílu: Karel měl 10 korun a 3 koruny ztratil. Kolik korun zbylo Karlovi po ztrátě?



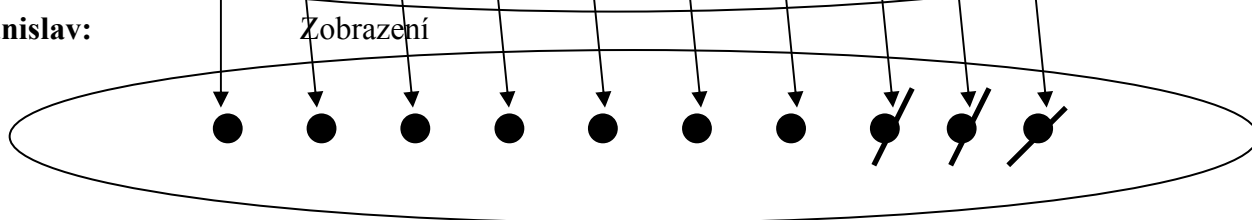
10 - 3 = 7 Karlovi zbylo po ztrátě 7 korun.

Zmenšení o daný počet: Jan měl 10 korun. Stanislav měl o 3 koruny méně než Jan. Kolik korun měl Stanislav? (Nemůže být v textu „o 3 koruny méně“, musí být „o 3 koruny méně než Jan“).

Jan:



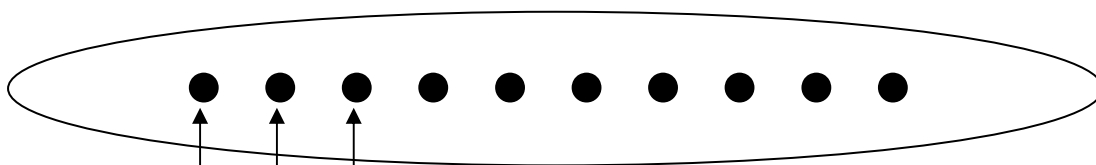
Stanislav:



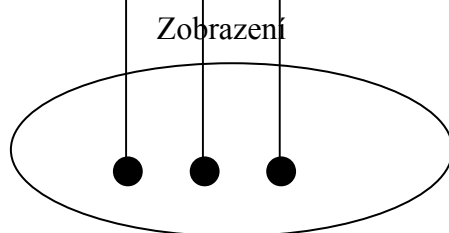
10 - 3 = 7 Stanislav měl 7 korun..

Porovnávání rozdílem: Václav měl 10 korun. Zdeněk měl 3 koruny? O kolik korun měl Václav více než Zdeněk ? O kolik korun měl Zdeněk méně než Václav ?

Václav:



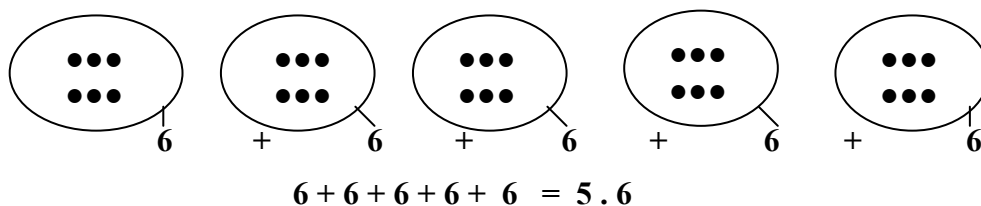
Zdeněk:



10 - 3 = 7

Václav měl o 7 korun více než Zdeněk. Zdeněk měl o 7 korun méně než Václav-

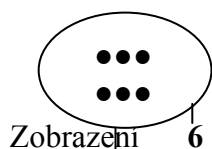
Určení součtu stejných sčítanců: Jeden kilogram brambor stojí 6 korun. Kolik stojí 5 kilogramů brambor?



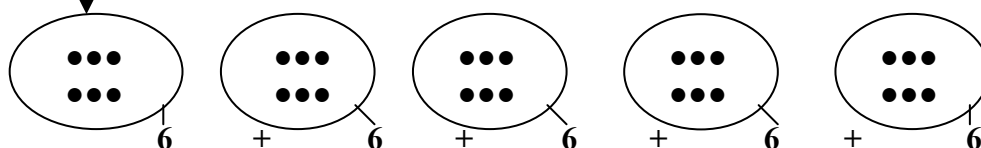
Pět kilogramů brambor stojí 30 korun.

Zvětšení čísla několikrát: Jeden kilogram brambor stojí 6 korun. Jeden kilogram meruněk stojí pět krát více než jeden kilogram brambor. Kolik stojí kilogram meruněk?

Cena 1 kilogramu brambor:

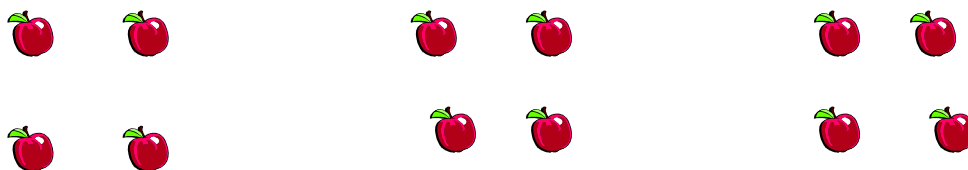


Cena 1 kilogramu meruněk:



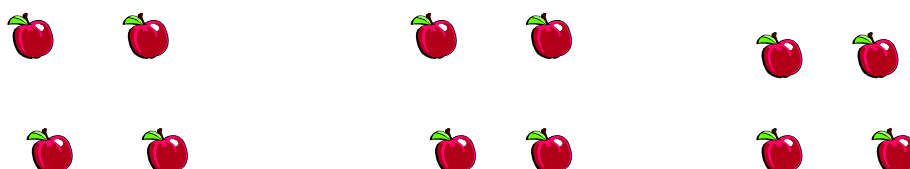
5 . 6 Jeden kilogram meruněk stojí 30 korun.

Dělení na stejné části: Dvanáct jablek máme podělit 3 chlapcům, tak aby každý měl stejný počet? Kolik jablek dostane každý z chlapců?



$$12 : 3 = 4 \quad \text{Každý z chlapců dostane 4 jablka.}$$

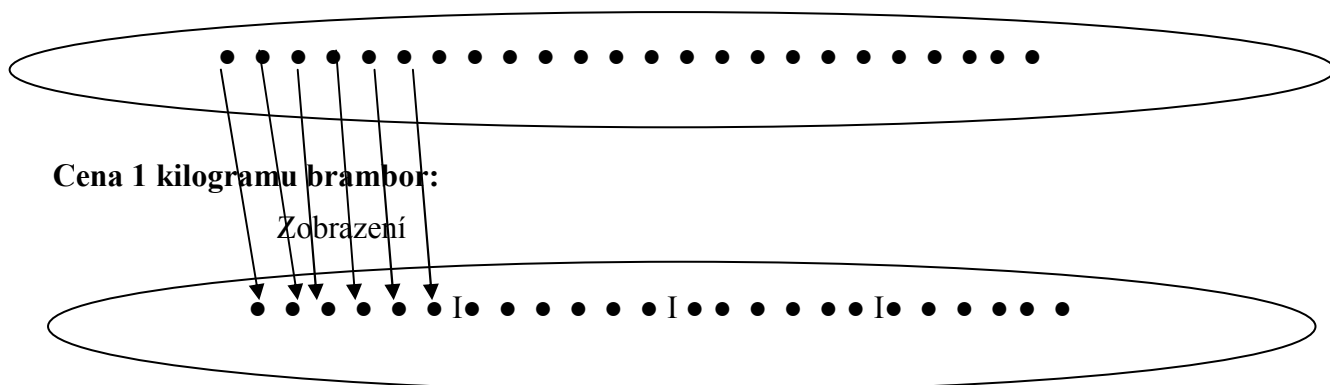
Dělení podle obsahu: Dvanáct jablek máme podělit tak, aby každý chlapec dostal 4 jablka. Kolik chlapců můžeme podělit?



$$12 : 4 = 3 \quad \text{Můžeme podělit 3 chlapce..}$$

Zmenšení čísla několikrát: Jeden kilogram pomerančů stojí 24 koruny. Jeden kilogram brambor je čtyři krát levnější než jeden kilogram pomerančů. Kolik stojí 1 kilogram brambor?

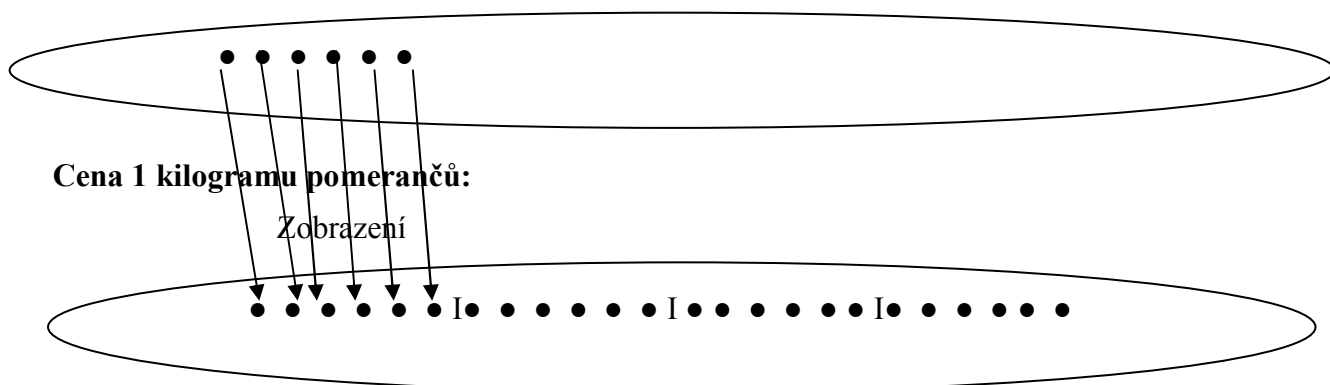
Cena 1 kilogramu pomerančů:



$24 : 4 = 6$ Jeden kilogram brambor stojí 6 korun. (Převádíme na dělení na stejné části).

Porovnávání podílem: Jeden kilogram pomerančů stojí 24 koruny. Jeden kilogram brambor 6 korun. Kolikrát je jeden kilogram brambor levnější než jeden kilogram pomerančů? Kolikrát je jeden kilogram pomerančů dražší než jeden kilogram brambor?

Cena 1 kilogramu brambor:



$24 : 6 = 4$ Jeden kilogram brambor je čtyři krát levnější než jeden kilogram pomerančů. Jeden kilogram pomerančů je čtyři krát dražší než jeden kilogram brambor. (Převádíme na dělení na podle obsahu).

Složené slovní úlohy

Za **složenou slovní úlohu** považujeme takovou slovní úlohu, k jejímuž řešení je třeba alespoň dvou početních výkonů. Složenou slovní úlohu řešíme tak, že ji rozkládáme na několik jednoduchých úloh, z nichž každá vede právě jen k jednomu početnímu výkonu. Tento rozklad je možno provést dvěma různými způsoby, z nichž jeden nazýváme analytický a druhý syntetický.

Při analytickém způsobu řešení složené slovní úlohy vyjdeme z otázky. Zjistíme, která čísla, abychom mohli provést početní výkon, který vede k odpovědi na danou otázku úlohy. Tak dostaneme jednu jednoduchou úlohu; přitom však aspoň jedno z čísel potřebných k jejímu řešení není dáno. Toto neznáme číslo vypočteme tak, že k jeho určení sestavíme další jednoduchou úlohu. Stačí-li údaje podmínky k řešení této jednoduché úlohy, je rozklad proveden. Není-li tomu tak sestavujeme další jednoduché úlohy, jejichž řešení vede k výpočtu dosud neznámých čísel, a tak pokračujeme tak dlouho, dokud nedostaneme jednoduché úlohy, k jejichž řešení jsou všechna potřebná čísla dána v podmínkách úlohy. Slovo analýza řecky

znamená rozklad. Při tomto způsobu řešení skutečně provádíme rozklad dané úlohy v jednoduché úlohy tak dlouho, dokud to jde.

Při syntetickém způsobu řešení složené slovní úlohy vycházíme z čísel, která jsou dána v podmínce slovní úlohy. Vybereme dvě z nich a složíme z nich jednoduchou úlohu, jejíž řešení poskytuje další údaj potřebný k řešení složené úlohy. Z tohoto údaje a z dalšího čísla vhodně vybraného z podmínek úlohy nebo z výsledku některé jiné pomocné jednoduché úlohy sestavíme další jednoduchou úlohu a tak pokračujeme tak dlouho, dokud nedojdeme k odpovědi na danou otázku. Při tomto způsobu řešení tedy odpověď na danou otázku skládáme z řešení jednoduchých úloh. Slovo syntéza je rovněž řecké slovo a znamená skládání.

Příklad:

Karel jel na mopedu z Teplic do Prahy přes Lovosice. Doba jeho jízdy z Teplic do Prahy byla 2 hodiny 54 minuty, průměrná rychlost z Teplic do Lovosic 30 km za hodinu a z Lovosic do Prahy 32 km za hodinu. Délka silnice z Teplic do Lovosic je 27 kilometrů. Kolik kilometrů je z Teplic do Prahy? Sestavte schéma a plán řešení a úlohu vyřešte.

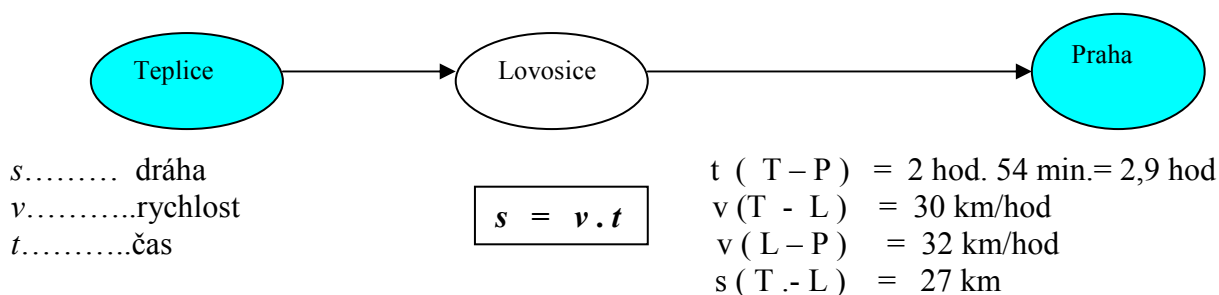
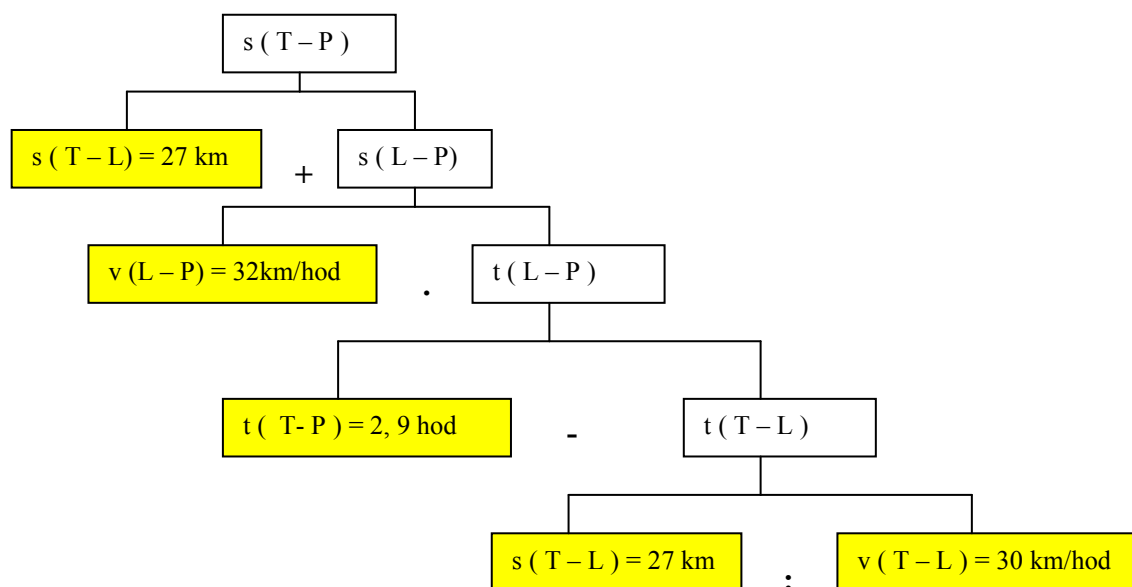


Schéma řešení:



Plán řešení:

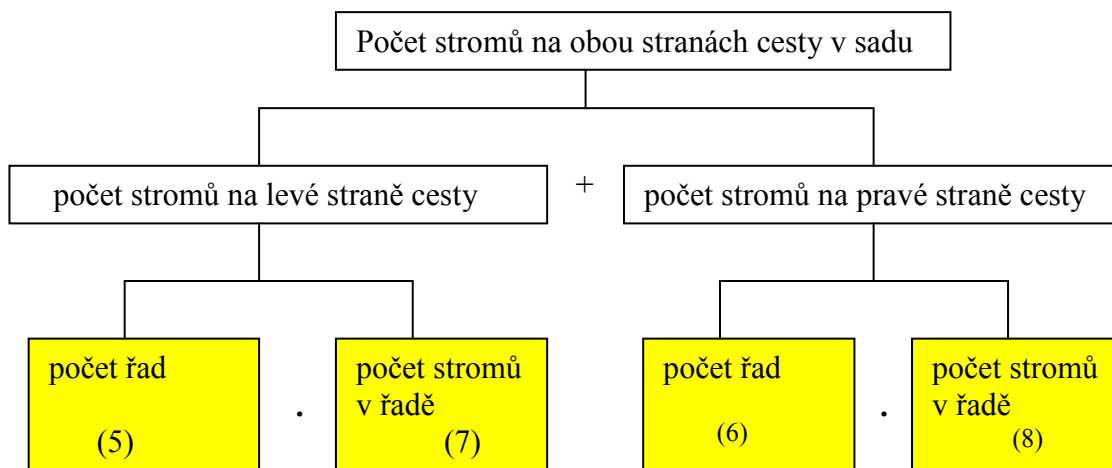
- 1) $t(T-L) = 27/30 = 0,9 \text{ hod.}$
- 2) $t(L-P) = 2,9 - 0,9 = 2 \text{ hod.}$
- 3) $s(L-P) = 32 \cdot 2 = 64 \text{ km}$
- 4) $s(T-L) = 27 + 64 = \underline{91 \text{ km}}$

Z Teplic do Prahy je 91 kilometr.

V učebnici matematiky pro 4. ročník vydané v 80. letech minulého století byla tato úloha včetně jejího rozboru:

Na levé straně cesty v sadu bylo 5 řad po 8 stromech, na pravé straně této cesty 6 řad po 8 stromech. Kolik stromů bylo v sadu po obou stranách cesty?

Schéma řešení:



- Plán řešení: 1) Počet stromů na levé straně cesty v sadu $5 \cdot 7 = 35$
2) Počet stromů na pravé straně cesty v sadu $6 \cdot 8 = 48$
3) Počet stromů na obou stranách cesty v sadu $36 + 48 = 63$

Na obou stranách cesty v sadu byly 63 stromy.

Složené slovní úlohy lze rozdělit do těchto typů:

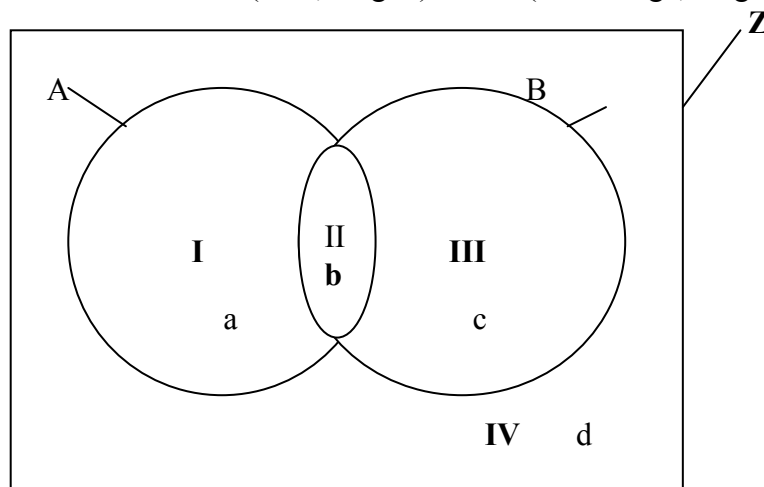
- 1) Typové úlohy řešené zvláštními obraty
 - 1.1) Určení zlomku z daného čísla
 - 1.2) Rozdělování v daném poměru
 - 1.3) Určení čísel z jejich lineárních kombinací
- 2) Typové úlohy ze zvláštním obsahem
 - 2.1) Úlohy o aritmetickém průměru
 - 2.2) Úlohy o směsích
 - 2.3) Úlohy o společné práci
 - 2.4) Úlohy o rovnoměrném pohybu

Literatura:

- 1) Novák B., Stopenová A.: Slovní úlohy ve vyučování matematice na 1. Stupni ZŠ, Pedagogická fakulta UP, Olomouc, 1993
- 2) Divíšek J. a kol.: Didaktika matematiky pro učitelství pro 1. Stupeň základní školy, SPN, Praha, 1989
- 3) Hruša K.: Aritmetika pro III. a IV. ročník pedagogických škol pro vzdělání učitelů národních škol, SPN, Praha, 1958

8. Kompetence k řešení problémů: Slovní úlohy na sjednocení dvou množin s neprázdným průnikem

Vennův diagram (John Venn – 1834 (Hull, Anglie) –1923 (Cambridge, Anglie))



Životopis Johna Venna:

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Venn.html>

I..... $A - B = \{ x \in Z : x \in A \wedge x \notin B \}$

II..... $A \cap B = \{ x \in Z : x \in A \wedge x \in B \}$

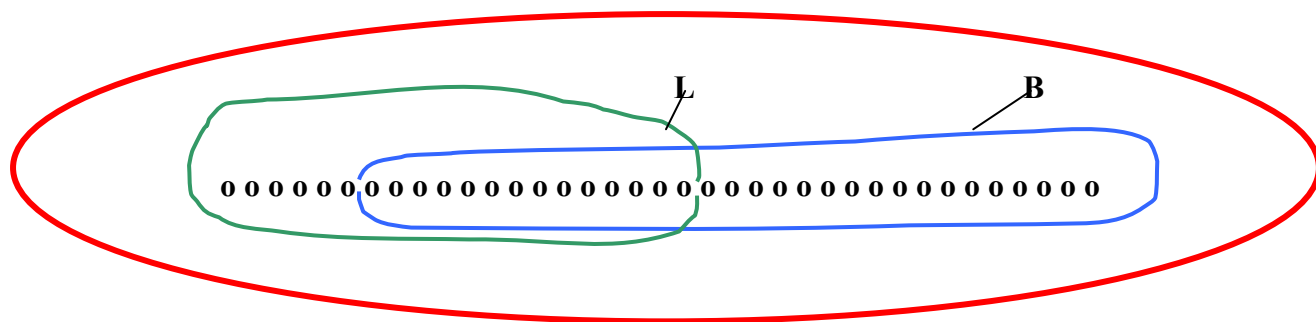
III..... $B - A = \{ x \in Z : x \notin A \wedge x \in B \}$

IV..... $(A \cup B)' = A' \cap B' = \{ x \in Z : x \notin A \wedge x \notin B \}$

V teorii vyučování matematice je možné využít termínu entropie, což je dle *Slovníku spisovné češtiny pro školu a veřejnost* (2.) míra neurčitosti nějakého systému. O pojmu entropie v didaktice matematiky se zmiňuje Doc. Pavel Květoň ve své publikaci *Kapitoly z didaktiky matematiky II* (str. 10) (3.). Podívejme na zadání úloh na sjednocení dvou množin s neprázdným průnikem a na míru neurčitosti při jejich řešení. Například zadáme-li slovní úlohu na sjednocení dvou množin s neprázdným průnikem :

Ve třídě je 37 žáků. Každý z nich umí lyžovat nebo umí bruslit. Lyžovat umí 20 žáků, bruslit umí 31 žák. Znázorněte a určete, kolik je ve třídě žáků, kteří umějí lyžovat a umějí bruslit (obojí).

Úlohu můžeme vizualizovat:

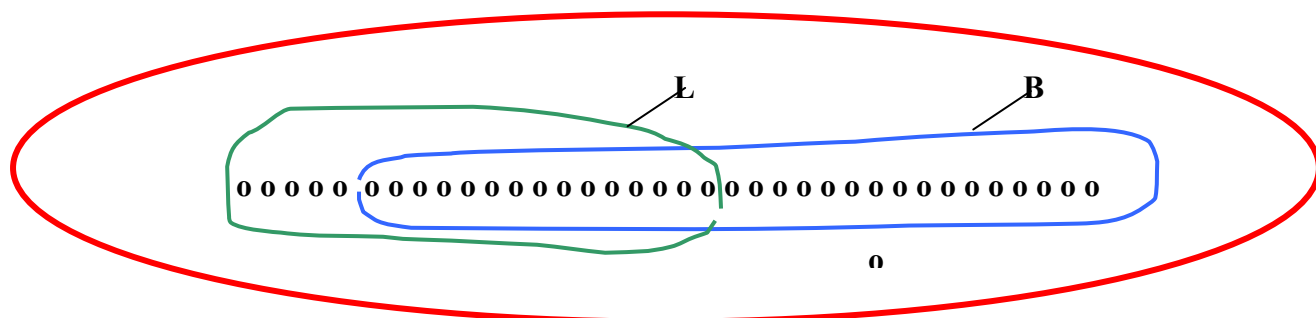


Názorně vidíme, že všichni žáci třídy, kteří umějí lyžovat a bruslit, náleží do průniku množin lyžujících a bruslicích žáků. Celkem je jich 14. Úloha má právě jedno řešení.

Zadáme-li úlohu s vynecháním věty „Každý z nich umí lyžovat nebo umí bruslit“ tedy:

Ve třídě je 37 žáků. Lyžovat umí 20 žáků, bruslit umí 31 žák. Znázorněte a určete, kolik je ve třídě žáků, kteří umějí lyžovat a umějí bruslit (obojí), musíme zvažovat, kolik je ve třídě

žáků, kteří neumějí lyžovat a neumějí bruslit. Takových žáků není, pak jde o původní úlohu. Takový žák může být jeden, mohou být dva, tři, čtyři, pět, šest. Více jich být nemůže. Úlohu můžeme vizualizovat:



Úloha má při tomto zadání úlohy celkem sedm řešení. Lze tedy odpovědět, že záleží na počtu žáků, kteří neumějí lyžovat a neumějí bruslit a počet žáků, kteří umějí lyžovat a bruslit je 14 nebo 15 nebo 16 nebo 17 nebo 18 nebo 19 nebo 20. V případě, že 6 žáků neumí lyžovat a neumí bruslit jsou lyžující žáci podmnožinou žáků bruslících.

První slovní úloha má menší entropii, neboť řešení úlohy je právě jedno, Druhá slovní úloha má větší entropii, neboť míra neurčitosti je větší a úloha má 7 možných řešení.

Podíváme se na slovní úlohu na které si ukážeme rozmanitost možných otázek, které následují za podmínkami úlohy:

Z 33 žáků třídy jich 14 bruslí, 22 lyžuje. 6 žáků třídy nebruslí a nelyžuje. Kolik žáků třídy:
a) lyžuje a bruslí, b) lyžuje nebo bruslí, c) lyžuje a nebruslí, d) nelyžuje a bruslí. Kolik žáků třídy provozuje: e) právě jeden z těchto sportů, f) nejvýše jeden z těchto sportů, g) nejvýše dva z těchto sportů, h) právě dva z těchto sportů, aspoň jeden z těchto sportů?

Postup řešení:

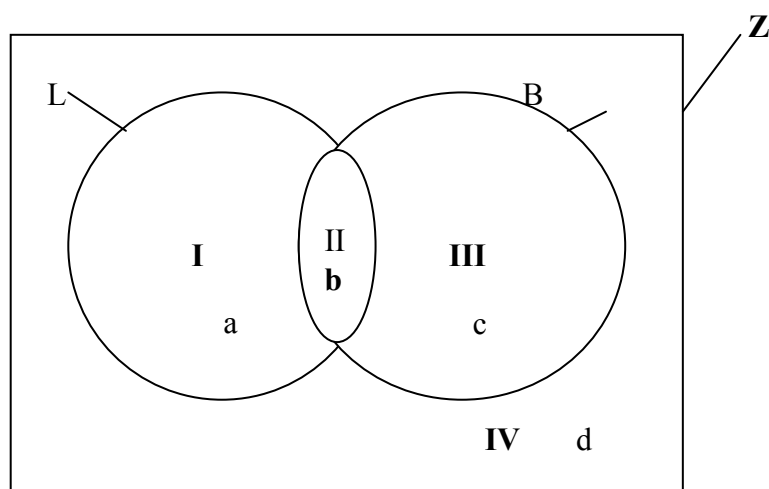
1) Určíme základní množinu **Z**

Z je množina všech žáků třídy

2) Určíme jednotlivé podmnožiny základní množiny **Z** a její charakteristické vlastnosti:

$$\{x \in \mathbf{Z} : x \text{ bruslí} \} = \mathbf{B}$$

$$\{x \in \mathbf{Z} : x \text{ lyžuje} \} = \mathbf{L}$$



3) Charakterizujeme množiny, na jejichž počet prvků se ptáme:

$$\{x \in \mathbf{Z} : x \text{ lyžuje a } x \text{ bruslí} \} = \{x \in \mathbf{Z} : x \in \mathbf{L} \wedge x \in \mathbf{B} \} = \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \dots \dots \dots \text{II. část}$$

$$\{x \in \mathbf{Z} : x \text{ lyžuje nebo } x \text{ bruslí} \} = \{x \in \mathbf{Z} : x \in \mathbf{L} \vee x \in \mathbf{B} \} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \text{ I., II. a III. část}$$

$\{x \in \mathbf{Z} : x \text{ lyžuje a } x \text{ nebruslí}\} = \{x \in \mathbf{Z} : x \in \mathbf{L} \wedge x \notin \mathbf{B}\} \dots \text{I. část}$

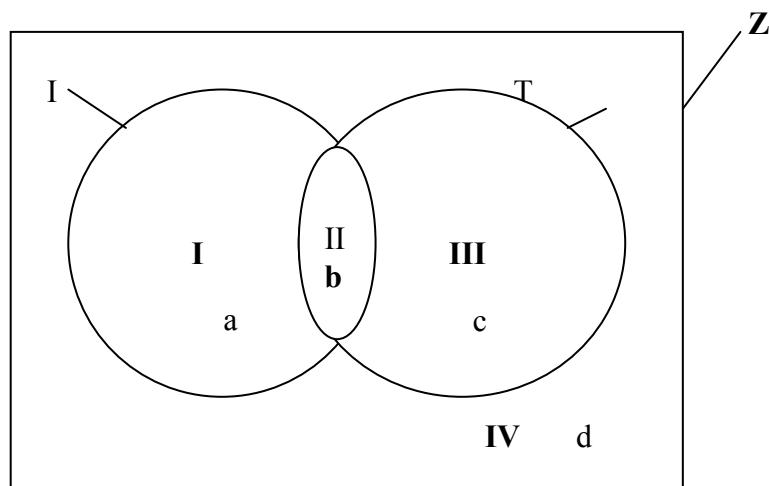
$\{x \in \mathbf{Z} : x \text{ nelyžuje a } x \text{ bruslí}\} = \{x \in \mathbf{Z} : x \notin \mathbf{L} \wedge x \in \mathbf{B}\} \dots \text{III. část}$

Jednoduše určíme, že $a = 5$, $b = 9$, $c = 13$ a z podmínky úlohy víme, že $d = 6$. Odpovíme na otázky úlohy:

- Ve třídě 9 žáků lyžuje a bruslí.
- Ve třídě 27 žáků lyžuje nebo bruslí.
- Ve třídě 13 žáků lyžuje a nebruslí.
- Ve třídě 5 žáků nelyžuje a bruslí.
- Ve třídě 18 žáků provozuje právě jeden z těchto sportů.
- Ve třídě 24 žáci provozují nejvýše jeden z těchto sportů.
- Ve třídě 33 žáci provozují nejvýše dva z těchto sportů.
- Ve třídě 9 žáků provozuje právě dva z těchto sportů.
- Ve třídě 27 žáků provozuje aspoň jeden z těchto sportů.

Slovní úlohu lze řešit i soustavou lineárních rovnic:

V cestovní kanceláři prodali 234 zájezdy. Největší zájem se soustředil na zájezdy do Itálie a na třídení autobusové zájezdy. Zájezdů do Itálie, které nebyly třídení autobusové, bylo 28. Bylo jich právě tolik, jako třídení autobusových zájezdů, které nebyly do Itálie. 78 zájezdů nebylo do Itálie a nebylo třídení autobusových. Kolik bylo třídení autobusových zájezdů do Itálie?



- Určíme základní množinu $\mathbf{Z}$

$\mathbf{Z}$ je množina všech zájezdů

- Určíme jednotlivé podmnožiny základní množiny $\mathbf{Z}$ a její charakteristické vlastnosti:

$\{x \in \mathbf{Z} : x \text{ je zájezd do Itálie}\} = \mathbf{I}$

$\{x \in \mathbf{Z} : x \text{ je třídení autobusový zájezd}\} = \mathbf{T}$

- Charakterizujeme množinu, na jejichž počet prvků se ptáme:

$\{x \in \mathbf{Z} : x \text{ je zájezd do Itálie a } x \text{ třídení autobusový zájezd}\} = \{x \in \mathbf{Z} : x \in \mathbf{I} \wedge x \in \mathbf{T}\} = \mathbf{I} \cap \mathbf{T}$

Řešení: $a + b + c + d = 234$

$$a = 28$$

$$c = 28$$

$$d = 78$$

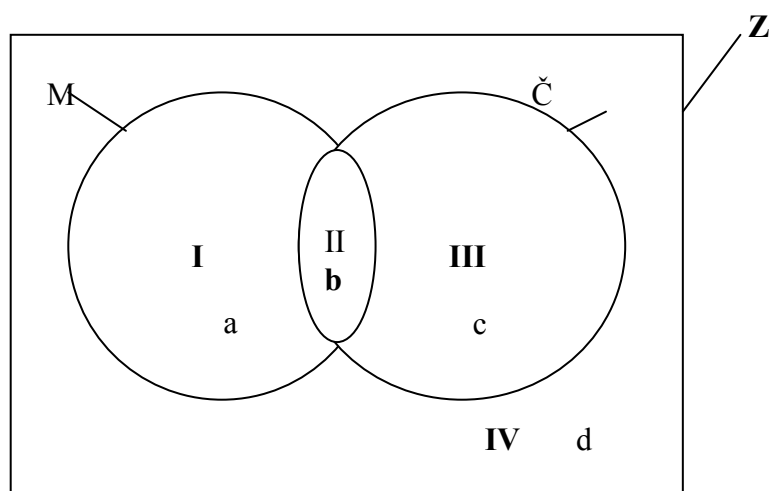
$$\underline{c = 100}$$

Třídení autobusových zájezdů do Itálie bylo 100.

Úlohu lze zadat i takto:

145 žáků se zúčastnilo přijímacích zkoušek na střední školu. Všichni žáci konali přijímací zkoušky z českého jazyka a z matematiky a byli hodnoceni. Aspoň jednu zkoušku vykonalo úspěšně 125 žáků. Nejvýše jednu zkoušku vykonali úspěšně 53 žáci. Zkoušku jen z matematiky vykonalo úspěšně 18 žáků.

- Kolik žáků vykonalo úspěšně obě zkoušky?
- Kolik žáků vykonalo úspěšně jen zkoušku z českého jazyka?
- Kolik žáků nevykonalo úspěšně zkoušku z matematiky a nevykonalo úspěšně zkoušku z českého jazyka?



- Určíme základní množinu Z
 Z je množina všech žáků, kteří konali přijímací zkoušky
- Určíme jednotlivé podmnožiny základní množiny Z a její charakteristické vlastnosti:
 $\{x \in Z : x \text{ je žák, který konal úspěšně přijímací zkoušku z matematiky}\} = M$
 $\{x \in Z : x \text{ je žák, který konal úspěšně přijímací zkoušku z českého jazyka}\} = T$
- Charakterizujeme množiny, na jejichž počet prvků se ptáme.
 $\{x \in Z : x \in M \wedge x \in Č\} = M \cap Č \dots \dots \dots \text{II. část}$
 $\{x \in Z : x \in Č \wedge x \notin M\} = Č - M \dots \dots \text{III. část}$
 $\{x \in Z : x \notin M \wedge x \notin Č\} = Č' \cap M' \dots \dots \text{IV. část}$

Pozorně čteme podmínky úlohy a zapisujeme:

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 145 \\ a + b + c &= 125 \\ d + a + c &= 53 \\ a &= 18 \end{aligned}$$

Od 1. rovnice odečteme 2. rovnici a dostaneme $d = 20$. Dosazením do 3. rovnice ($d = 20$, $a = 18$) dostaneme $c = 15$ a dosazením do 2. rovnice ($a = 18$, $c = 15$) dostaneme $b = 92$.

Odpověď:

- Obě zkoušky vykonali úspěšně 92 žáci.
- Zkoušku jen z českého jazyka vykonalo úspěšně 15 žáků.
- 20 žáků nevykonalo úspěšně zkoušku z matematiky a nevykonalo úspěšně zkoušku z českého jazyka.

V učebnici matematiky pro 4. ročník základní školy (1979) je uvedena tato úloha:

Pavel počítal hrnečky, které byly na stole a řekl: „Na stole je 12 velkých hrnečků.“ Ivan řekl: „Na stole je 9 červených hrnečků“. Kolik mohlo být na stole velkých nebo červených hrnečků?

Řešení:

- 1) Určíme základní množinu Z
 Z je množina všech hrnečků, které jsou na stole.
- 2) Určíme jednotlivé podmnožiny základní množiny Z a její charakteristické vlastnosti:
 $\{x \in Z : x \text{ je velký hrneček, který je na stole}\} = V$
 $\{x \in Z : x \text{ je červený hrneček, který je na stole}\} = Č$
- 3) Charakterizujeme množiny, na jejichž počet prvků se ptáme.
 $\{x \in Z : x \in V \vee x \in Č\} = V \cup Č$

Počet prvků ve sjednocení množin V nebo $Č$ je závislý na počtu prvků v průniku množin V a $Č$. Pokud bude průnik těchto množin prázdný je ve sjednocení 21 hrneček. Pokud bude v průniku 1 hrneček bude ve sjednocení 20 hrnečků, atd. Pokud bude ve sjednocení maximální možný počet, tj. 9 hrnečků bude ve sjednocení 12 hrnečků.

Odpověď: *Na stole mohlo být 9 až 21 hrnečků.*

Zajímavá je i tato dektektivní úloha:

Ve třídě se hledalo, kdo rozbil o polední přestávce okno. Učitel zjistil, že v této době byla všechna děvčata na školním pozemku a mimo třídu byli všichni chlapci, kteří chodí na oběd do školní jídelny. Ve třídě je celkem 38 žáků, z toho 16 dívek. Z celkového počtu žáků ve třídě se stravuje ve školní jídelně 30 žáků, z těchto stravujících se žáků je dvakrát více chlapců než dívek. Kolik žáků zůstává v podezření, že rozbili okno?

Řešení:

- 1) Určíme základní množinu Z
 Z je množina všech žáků ve třídě
- 2) Určíme jednotlivé podmnožiny základní množiny Z a její charakteristické vlastnosti:
 $\{x \in Z : x \text{ je žák stravující se ve školní jídelně}\} = J$
 $\{x \in Z : x \text{ je dívka}\} = D$
- 3) Charakterizujeme množiny, na jejichž počet prvků se ptáme.
 $\{x \in Z : x \notin J \wedge x \notin D\} = J' \cap D'$

Podezřelí budou všichni chlapci, kteří nechodí na oběd do školní jídelny.

Odpověď: *Podezřelí jsou 2 chlapci, kteří nechodí na oběd do školní jídelny.*

Literatura:

1. MELICHAR J. a kol. *Matematika pro 4. ročník základní školy*. 1.vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979. 160 s. 14-546-79
2. *Slovník spisovné češtiny pro školu a veřejnost*. 1. vyd. Praha: Academia, 1978. 800 s. 21-001-78
3. KVĚTOŇ P., *Kapitoly z didaktiky matematiky II*. 1. vyd. Ostrava: Pedagogická fakulta, 1986. 217 s. 60-265-86
4. MELICHAR J. a kol., *Cvičení z matematiky pro 5. ročník základní školy*, Státní pedagogické nakladatelství Praha, 1979, 14-580-79

9. Kompetence k řešení problémů: Problémové úlohy v oblasti prostorové představivosti

Rozvoj prostorové představivosti

Rozvoj prostorové představivosti začínáme již v 1. ročníku základní školy, rozvojem vnější a vnitřní orientace ve čtvercové síti. Vnější orientace ve čtvercové síti je vlastně propedeutikou pozdější učiva o určování bodu v rovině pomocí souřadnic. Současně hledání cest je i průprava pro kombinatoriku.

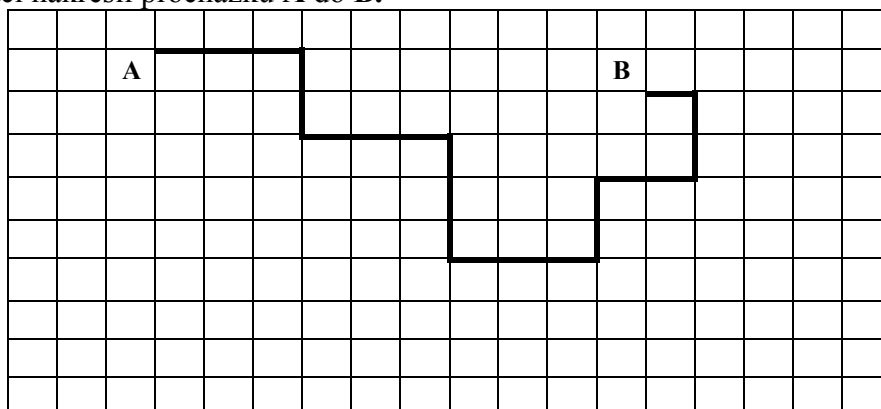
Orientace ve čtvercové síti

- 1) Děti tvoří procházky ve čtvercové síti dle popisu této procházky pomocí šípek.

*Nakresli ve čtvercové síti procházku s počátkem v bodu **A** a s koncem v bodě **B** dle jejího popisu:*

A → → → ↓ ↓ → → → ↓ ↓ ↓ → → → ↑ ↑ → → ↑ ↑ ← **B**

Žáci nakreslí procházku **A** do **B**.

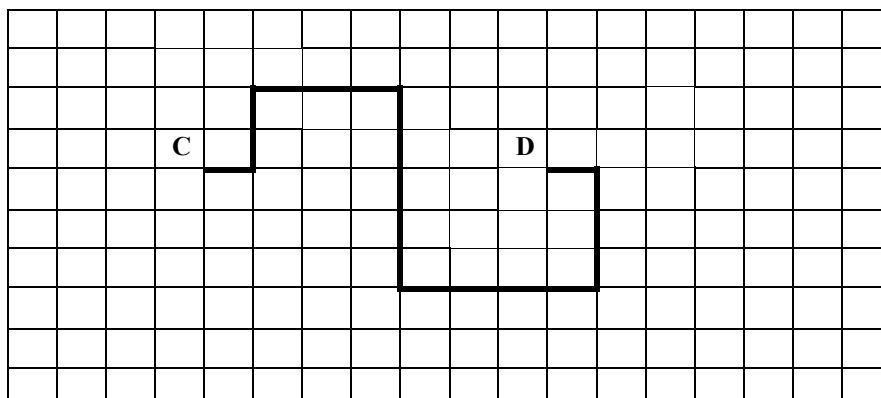


Žáci mohou určit i délku této procházky (20).

Procházku lze zapsat i úsporněji:

A 3→ 2↓ 3→ 3↓ 3→ 2↑ 2→ 2↑ 1← **B**

- 2) Dále budou žáci řešit úlohu obrácenou, kdy mají zakreslenu cestu ve čtvercové síti a budou zapisovat popis této cesty z **C** do **D** z vnějšího pohledu:



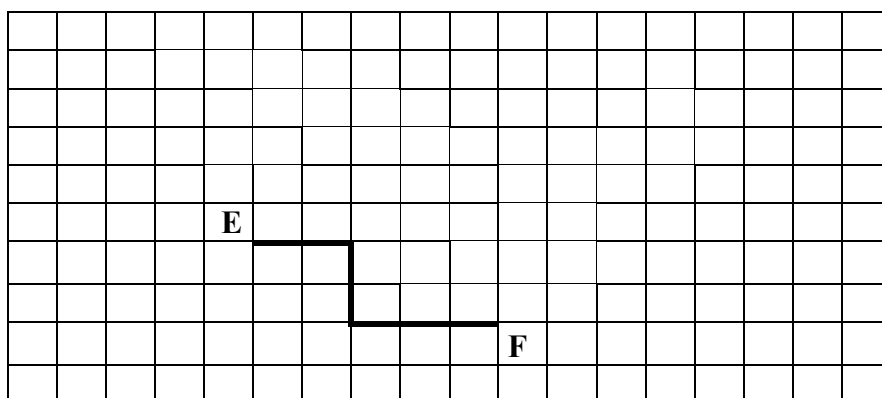
- a) Popis cesty z **C** do **D** z vnějšího pohledu je:

C → ↑ ↑ → → → ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ → → → ↑ ↑ ↑ ← **D**

nebo **C** 1→ 2↑ 3→ 5↓ 4→ 3↑ 1← **D**

- b) Popis cesty z **C** do **D** z vnitřního pohledu (jako bychom seděli v autě a po dané cestě z **C** do **D** jeli) :
- rovně, doleva, rovně, doprava, rovně, rovně, doprava, rovně, rovně, rovně, rovně,
doleva, rovně, rovně, doleva, rovně, rovně, doleva,
nebo rovně, doleva, rovně, doprava, 2 krát rovně, doprava 4 krát rovně, doleva,
2krát rovně, doleva, 2 krát rovně, doleva.
- c) Dále můžeme na žácích žádat popis cesty z **D** do **C** a to jak z vnějšího, tak vnitřního pohledu.

3) Žáci hledají a zapisují z vnějšího pohledu všechny možné nejkratší cesty z **E** do **F**.

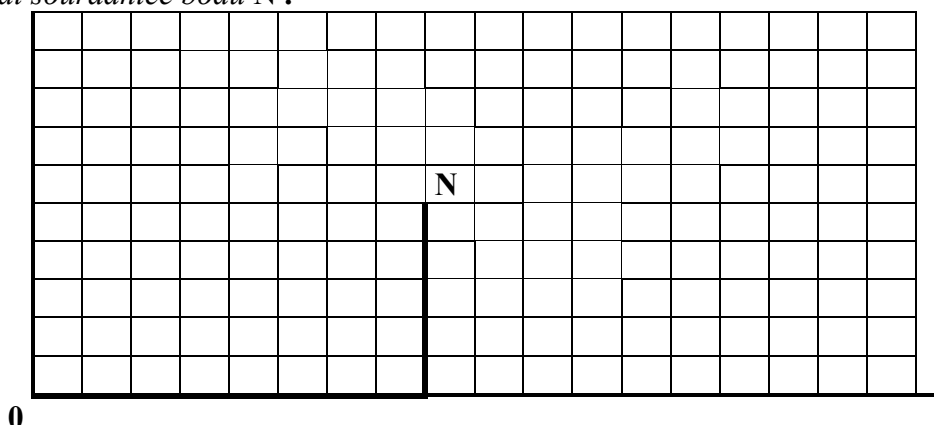


Žáci zjistí, že délky cest jsou 7 a jsou to například tyto cesty:

1. **E** 2→ 2↓ 3→ **F**
 2. **E** 5→ 2↓ **F**
 3. **E** 2↓ 5→ **F**
- atp.

4) Ve 3. ročníku základní školy již mohou hledat souřadnice bodů, určením počátku **0**, zavedením os souřadnic a určením počtu šipek → (vpravo) a ↑ (nahoru).

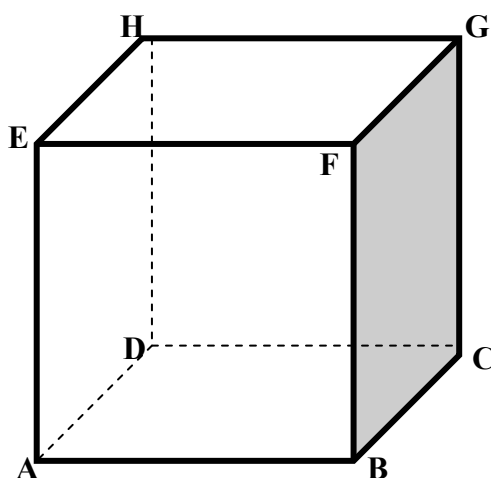
*Najdi souřadnice bodu **N**.*



Popis cesty z **0** do **N** pomocí → (vpravo) a ↑ (nahoru) je **0** 8→ 5↑ **N**.
Souřadnice bodu **N** jsou [8; 5]. Zapisujeme **A**[8; 5].

Procházký po hranách krychle

Přineseme žákům model krychle, krychli narýsujeme na tabuli a označíme její vrcholy A, B, C, D, E, F, G, H.



Žáci mají před sebou model krychle na kterém mohou vyznačit vrcholy A, B, C, D, E, F, G, H dle nákresu na tabuli. Prstem přejíždějí hrany krychle a uvádí, kterými vrcholy krychle procházejí. (Například ABFEHG.) Jmenují sousední vrcholy například vrcholu F. (Sousední vrcholy vrcholu F jsou vrcholy B, E, G.)

Žákům schováme model krychle a nákres krychle na tabuli smažeme. A nyní opět zadáváme úkoly:

- 1) Jmenuj sousední vrcholy vrcholu C, jmenuj sousední vrcholy vrcholu E, atp.
- 2) Putuj po hranách krychle a jmenuj vrcholy, kterými procházíš. Začni vrcholem B, začni libovolným vrcholem, atp.
- 3) Jmenuj čtverce stěn ve kterém je bod A, ve kterém je bod C.
- 4) Jmenuj úsečky, které tvoří hrany krychle a mají společný bod A. Atp.

Vlastnosti krychle

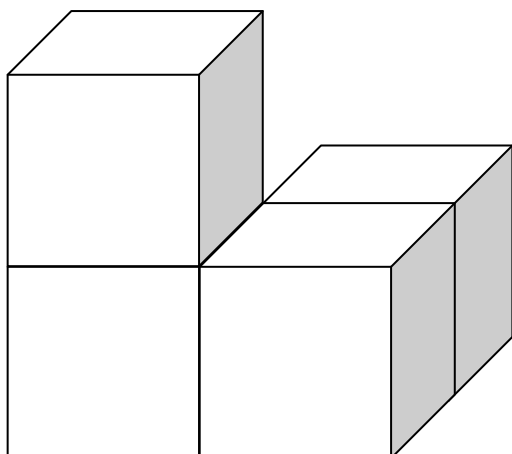
Žáci již nemají model krychle a ani nemají nákres krychle na tabuli. Učitel zadává úkoly:

- 1) Kolik vrcholů má krychle?
- 2) Kolik stěn má krychle?
- 3) Kolik hran má krychle?
- 4) Když délka hrany krychle je 1 cm, jaká je délka všech hran této krychle, jaký je obsah pláště této krychle, jaký je objem této krychle.
- 5) Když délka hrany krychle je 2 cm, jaká je délka všech hran této krychle, jaký je obsah pláště této krychle, jaký je objem této krychle.
- 6) Když délka hrany krychle je 3 cm, jaká je délka všech hran této krychle, jaký je obsah pláště této krychle, jaký je objem této krychle.

Atp.

Krychlová stavebnice

Na školách bývá krychlová stavebnice, což je soubor 200 stejných krychlí z umělé hmoty. Z této stavebnice budou žáci sestavovat prostorové stavby a stavbu budou zakreslovat půdorysem s uvedením počtu krychlí, které na daném poli půdorysu stojí. Například:



0	1
2	1

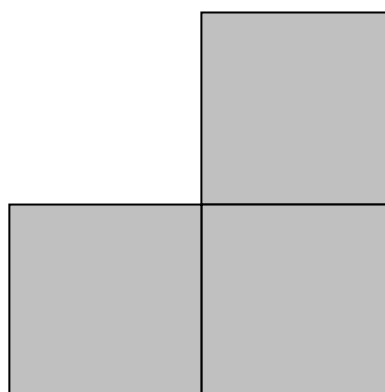
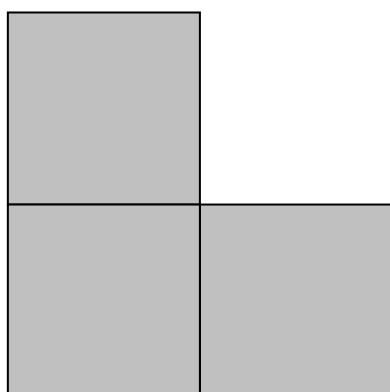
Žáci sestavují další stavby z krychlí dle své fantasie a kreslí jejich půdorysy s údajem o počtu krychlí. Obráceně učitel zadává půdorysy s údajem počtu krychlí a žáci dané stavby sestavují.

Dále žáci kreslí, jak vypadá daná stavba zepředu, zprava a zleva.

Například naše stavba vypadá

ze předu i zprava

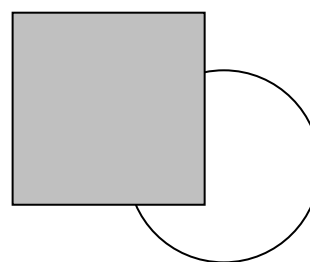
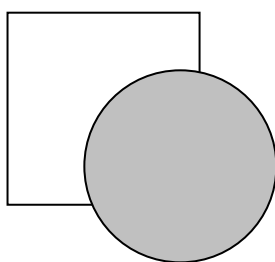
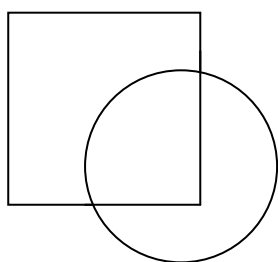
zleva



Krychle lze i obarvit i tím i pohledy zepředu, zleva i zprava jsou náročnější.

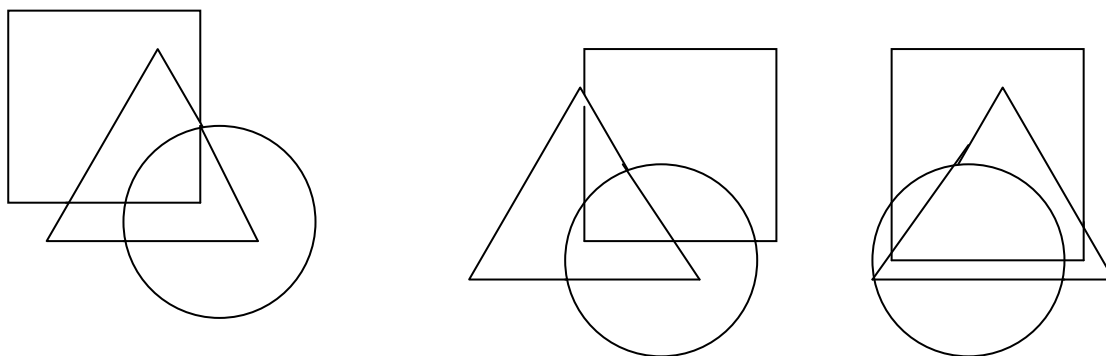
Překrývání geometrických útvarů

Překrývání v rovině

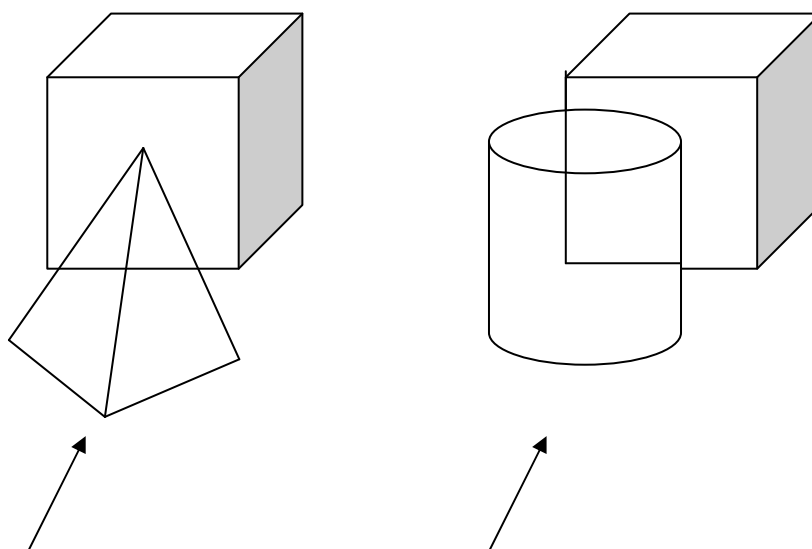


Žáci vybarvením určí, který útvar je první a který je pod ním.

Například úloha : *Vybarvením urči toto pořadí útvarů: 1. kruh, 2. čtverec, 3. trojúhelník.*



Obdobně lze vybarvovat i prostorové útvary, který útvar je vpředu a který vzadu.



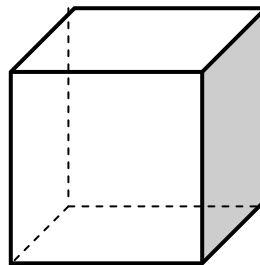
Volné rovnoběžné promítání

Při zobrazování prostorových geometrických útvarů do roviny ve volném rovnoběžném promítání dodržujeme tato jednoduchá pravidla:

- 1) Body zobrazujeme jako body.
- 2) Přímký zobrazujeme jako přímký nebo jako body.
- 3) Zachováváme incidenci bodů a přímek.
- 4) Rovnoběžné přímký zobrazujeme jako rovnoběžky nebo jako body (proto rovnoběžné promítání).
- 5) Zachováváme poměr velikostí rovnoběžných úseček.
- 6) Obrazce ležící v rovinách rovnoběžných s průmětnou zobrazujeme jako útvary shodné.
- 7) Obrazy přímek kolmých k průmětně (tyto přímký nazýváme *hloubkové*) rýsujeme tak, aby svíraly s vodorovnou přímkou zvolený úhel, tzv. úhel zkosení. Většinou volíme úhel o velikosti 45° .
- 8) Obrazy úseček na hloubkových přímkách zkracujeme či prodlužujeme podle tzv. koeficientu změny. Většinou volíme polovinu jejich skutečné velikosti.

Body 7) a 8) uvádí, že můžeme volit koeficient zkosení a koeficient změny, proto volné promítání. Tak zvané volné rovnoběžné promítání není určeno průmětnou a směrem, nejedná se tedy o promítání, ale o zobrazení, kdy bodům prostoru jsou přiřazeny jisté body nákresny. Přesto můžeme uvažovat, že domnělá průmětna je průčelná, tedy svislá. Zobrazované přímký, které jsou s touto domnělou průmětnou rovnoběžné, nazýváme *průčelné*.

Ukázka volného rovnoběžného promítání :

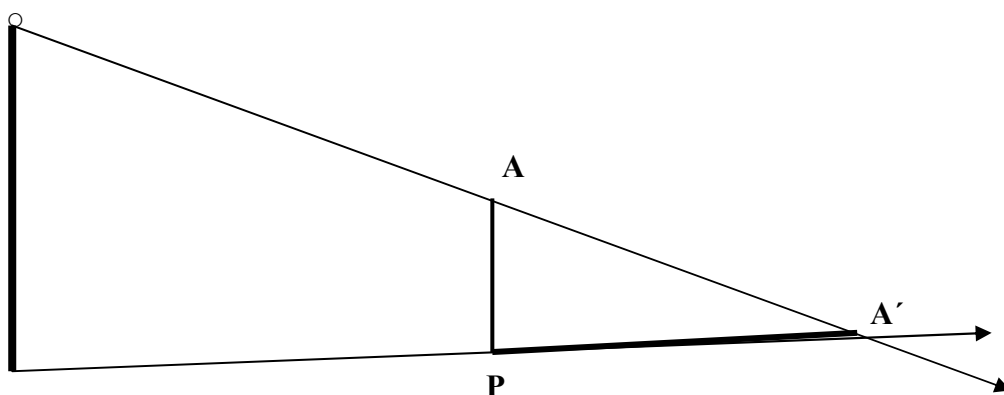


Stíny

Zobrazování stínů má velmi jednoduchý algoritmus:

- 1) určíme směr stínů,
- 2) určíme délku stínu.

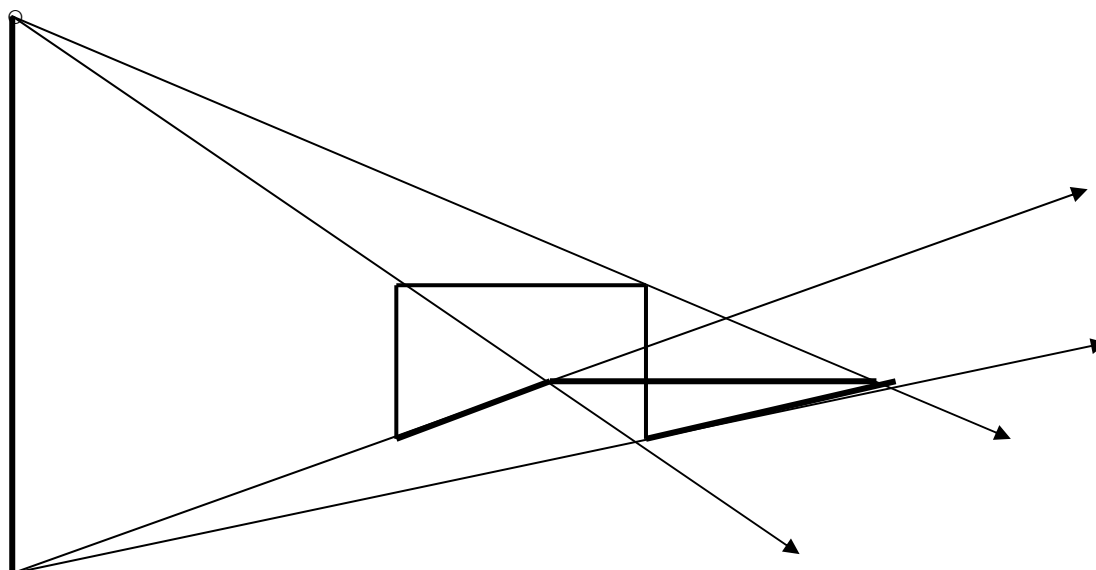
Je dána lampa, která je zdrojem paprsku světla a tyč, jejíž stín určujeme:



Žákům zadáváme úlohy:

- 1) Je jedna lampa a více tyčí.
- 2) Je více lamp a jedna tyč.
- 3) Zadáváme stín branky.
- 4) Zadáváme stín cedule.
- 5) Zadáváme stín trojúhelníka.

Ukážeme si stín branky:



10. Kompetence komunikativní. Myšlení a jazyk v matematice. „Matematictina“.

Již dříve jsme si uvedli úzkou souvislost mezi myšlením a jazykem. Nyní se zaměříme na správnou gramatickou výstavbu našeho vyjadřování v matematice.

Mateřský jazyk ve vyučování matematice

Vyučovací hodina matematiky je současně vyučovací hodinou mateřského jazyka. Jedním z předních úkolů matematiky je rozvoj logického myšlení. Logické myšlení úzce souvisí s jazykem, neboť základním pojmem logického myšlení je pojem výroku a my víme, že výrokem nazveme každou oznamovací větu, která srozumitelně oznamuje něco, co může být jen pravdivé, anebo nepravdivé a věta je slovní vyjádření myšlenky. Zde tedy vidíme úzkou souvislost mezi matematikou a mateřským jazykem. Naší povinností je tedy zabezpečit správné vyjadřování žáků v mateřském jazyce. Kromě obsahové stránky jazyka věnujeme pozornost i jeho formální stránce.

Rád vzpomínám na klasika české didaktiky matematiky Prof. Karla Hrušu, který říkal. Pamatujte si studenti. „Na blbou otázku blbá odpověď“. Jako příklad uváděl. Na tabuli je napsán zlomek $\frac{16}{20}$. Učitel se ptá žáka. „Co s tím zlomkem uděláš?“ Žák odpověděl: „Smažu

ho.“ Učitel samozřejmě předpokládal, že žák odpoví, že bude zlomek krátit. Ptám se žáka: „Kdy je číslo dělitelné pěti?“. Žák odpoví „Číslo je dělitelné pěti, má-li na konci nulu a pětku“. Správná odpověď by měla znít: „Číslo je dělitelné pěti, je-li jeho číslice řádu jednotek nula nebo pět.“ Jeho první odpověď je nepřesná. Co je to na konci? Nemůže mít číslici řádu jednotek současně nulu a pět. Musí být použita spojka „nebo“, nikoliv spojka „a“.

Jazyk se obohacuje, spolu s novými pojmy se objevují nová slova: videorekordér, mobil, atp. Současně i jazyk stárne, některá slova zanikají: šafář, drožka, klokočí, přehršle, atp.

Přízvuk:

V českém jazyce je přízvuk na předložce, anebo na první slabice: **Do** školy, **na** ulici, **domov**, **kružnice**, **úsečka**, **dělitel**. Výjimku tvoří slovo trojúhelník. Přízvuk je na ú a proto nad u je čárka.

Chyby v mateřském jazyku ve vyučování matematice:

1) Obecný jazyk

- 1.1. Výslovnost (ortoepie)
- 1.2. Tvarosloví
- 1.3. Větná skladba (syntax)

2) Odborný jazyk

- 2.1. Odborná terminologie
- 2.2. Odborná frazeologie

1.1. Výslovnost (ortoepie)

Dbáme na to, aby žáci neuhňali, nepolykali slabiky, nepatlali, atp.

Učitel musí být ve výslovnosti příkladem, proto každý uchazeč o studium učitelství pro 1. stupeň základní školy musí mít potvrzení lékaře- foniatra, že nemá problémy ve výslovnosti.

Příklady špatné výslovnosti v matematice: „ščitání“ (správně sčítání), „ci“ (správně tři), atp.

2.1. Tvarosloví

Chyby jsou ve tvaru číslovek

1 žák, koruna, sto	jeden žák, jedna koruna, jedno sto	nominativ singuláru
2 žáci, koruny, stě	dva žáci, dvě koruny, dvě (stě)	nominativ plurálu (duál)

3 žáci, koruny, sta	tři žáci, tři koruny, tři sta	nominativ plurálu
4 žáci, koruny, sta	čtyři žáci, čtyři koruny, čtyři sta	nominativ plurálu
5 (mnoho) žáků, korun, set	pět žáků, pět korun, pět set	genitiv plurálu
6 žáků, korun, set	šest žáků, šest korun, šest set	genitiv plurálu atd.

Auto stálo 41 021 korunu. Čteme: Auto stálo čtyřicet jeden tisíc dvacet jednu korunu.
 Auto stálo 42 122 koruny. Čteme: Auto stálo čtyřicet dva tisíce sto dvacet dvě koruny.
 Auto stálo 45 237 korun. Čteme: Auto stálo čtyřicet pět tisíc dvě stě třicet sedm korun.
 Auto stálo 52 003 koruny. Čteme: Auto stálo padesát dva tisíce tři koruny.
 Atp.

Plán byl splněn na 91 procento. Čteme: Plán byl splněn na devadesát jedno procento.
 Plán byl splněn na 92 procenta. Čteme: Plán byl splněn na devadesát dvě procenta. Atp.

Problémem je i čtení zlomku : $1/21$ Čteme: Jedna jednadvacetina.
 $3/54$ Čteme: Tři čtyřiapadesátiny,
 $7/153$ Čteme: Sedm stotřiapadesátin. Atd.

1.3. Větná skladba (syntax)

Pozor při tvorbě slovních úloh.

Například text slovní úlohy: „Žáci jeli plavat autobusem.“

2.1. Odborná terminologie

V matematice pro týž pojem různá slova. Například bod-průsečík, vrchol, střed úsečky, atp.
 Číslo- sčítanec, menšenec, menšitel, součet, součin, atp.

Žáci si pletou pojmy objem a obsah. I dříve se špatně uvádělo: Obsah válců automobilu.
 Správně: Objem válců automobilu. Čtverec a kosočtverec. Žáci říkají, že čtverec je speciální případ obdélníků. To není pravda. Obdélník již má v názvu, že jde o „obdélník“.

Na 1. stupni je třeba používat českých slov. Hovoříme o vlastnosti záměny čísel, vlastnosti sdružování čísel. Na vyšším stupni základní školy je třeba cizí slova dobře vysvětlit.
 Například: diskriminant, od slova diskriminuji, což je česky rozlišuji, česky „rozlišitel“.
 Rozlišuje počty řešení kvadratické rovnice, atp.
 Pozor!

3 je číslo, zapsané číslicí a vyslovené číslovkou.

2.2. Odborná frazeologie

Matematika má svůj přesný jazyk. Má svoje ustálené obraty-fráze.

Například:

Říkáme: „Sestrojíme kružnici k se středem S a poloměrem r . Neříkáme: „Zapíchneme kružítka do tabule a uděláme kružnici“.

Říkáme: „Necht' je dán bod A“

Rozlišujeme logické spojky „nebo“, „anebo“, „a“.

Neříkáme: „Nakresli kus přímky“ a myslíme tím úsečku. Atp.

Přehled chyb nám umožní zamyslet se na svém vlastním přístupem k mateřskému jazyku.

Do matematiky patří samozřejmě vyjadřování počtu tj. zápis mohutnosti množin. Podívejme se na různé formy zápisu při změně základu číselné soustavy:

Zápis přirozeného čísla v různých číselných soustavách

Při zápisu přirozeného čísla v různých číselných soustavách vycházíme z definice obecného zápisu přirozeného čísla v z-adické číselné soustavě

Definice : Přirozené číslo a má rozvinutý zápis v oboru přirozených čísel a nuly v číselné soustavě o základu z :

$$a = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + a_{n-2} \cdot z^{n-2} + a_{n-3} \cdot z^{n-3} + \dots + a_1 \cdot z^1 + a_0 \cdot z^0,$$

kde $0 \leq a_i < z$ ($i = 0$ až n) a $z > 1$.

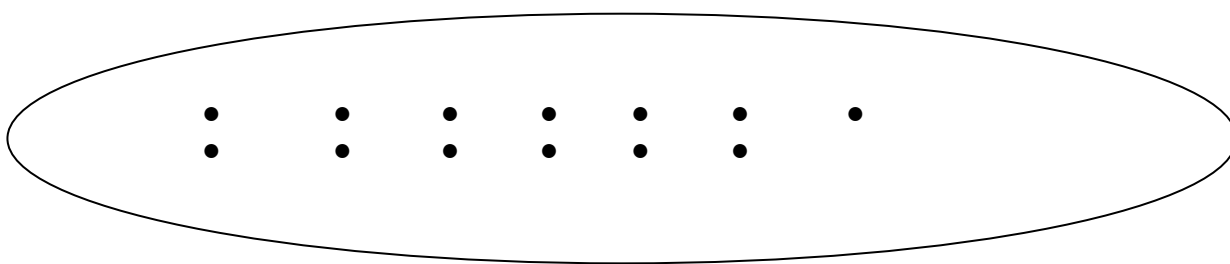
Zápis přirozeného čísla v různých číselných soustavách o základu přirozeného čísla $z > 1$ lze na 1. stupni základní školy zavádět čtyřmi způsoby a to:

- 1) pomocí seskupování,
- 2) pomocí krychlové stavebnice,
- 3) pomocí minikalkulátoru,
- 4) pomocí výpočtu.

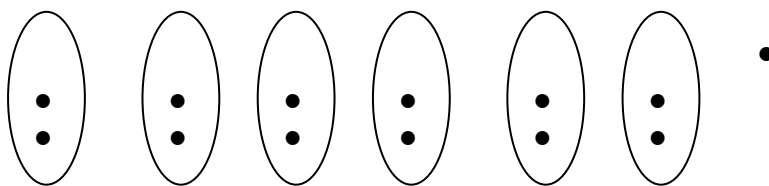
Všechny čtyři způsoby si ukážeme na zápisu čísla 13 ve dvojkové číselné soustavě:

- 1) Seskupování:

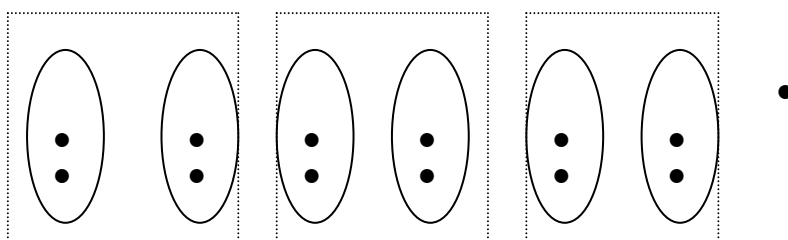
Znázorníme (vizualizujeme) číslo 13



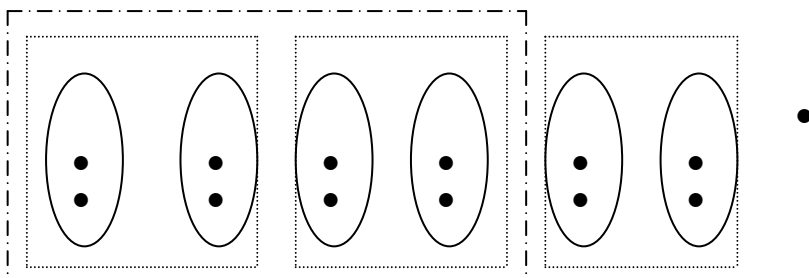
Vytvoříme, tak zvané 1. seskupení, tvoříme skupiny prvků po dvou (dvojice), neboť jde o dvojkovou číselnou soustavu (číselná soustava o základu dvě)



Vytvoříme, tak zvané 2. seskupení, tvoříme skupiny prvků po dvou dvojicích, neboť jde o dvojkovou číselnou soustavu (číselná soustava o základu dvě)



Vytvoříme, tak zvané 3. seskupení, tvoříme skupiny prvků po dvou dvojicích, neboť jde o dvojkovou číselnou soustavu (číselná soustava o základu dvě)



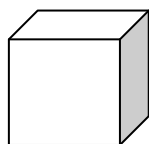
Zapišeme do tabulky:

3. seskupení	2. seskupení	1. seskupení	neseskupeno
-----		_____	•
1	1	0	1

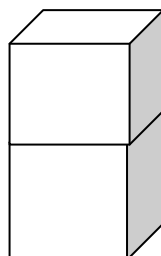
Zápis čísla 13 ve dvojkové soustavě je $(1101)_2$.

2) Krychlová stavebnice

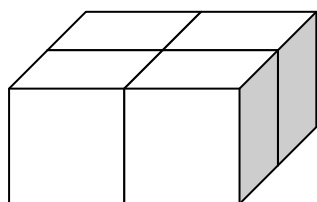
Učitel má krychlovou stavebnici. Jde o 200 stejných krychlí z umělé hmoty. Tato učební pomůcka je na většině základních škol. Učitel rozdává každému žákovi 13 krychlí. Žáci sestavují z krychlí tyto prostorové útvary:



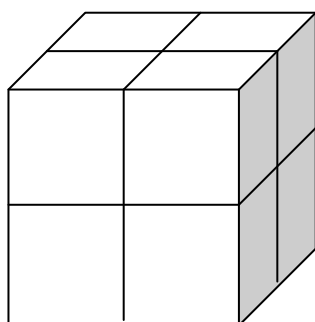
krychli (K)



sloupek (S)



plošku (P)



velkou krychli (VK)

Dále mohou sestavovat velkou krychli (VK), velký sloupek (VK), velkou plošku (VK), atd.

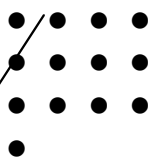
Žáci mají za úkol ze 13 krychlí sestavit co nejmenší počet výše uvedených prostorových útvarů. Žáci sestaví 1 velkou krychli, 1 plošku a 1 krychle jim zbude.
Vyplní tabulku:

VK	P	S	K
1	1	0	1

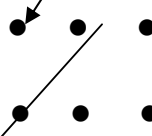
a mohou zapsat $13 = (1101)_2$.

3) Minikalkulátor

Žáci si nakreslí na čtvrtku minikalkulátor a na poslední pole vpravo položí 13 početních kaménků (kalkulů). Lze použít malé kaménky, čočku, košilové knoflíky, patentky, atp.

				
--	--	--	--	---

U dvojkové číselné soustavy smění dva kaménky nižšího řádu za jeden kamének nejbližšího vyššího řádu (při této činnosti mohou říkat HOP!).

				
--	--	--	--	---

Opět smění dva kaménky nižšího řádu za jeden kamének nejbližšího vyššího řádu

				
--	--	---	--	---

Opět smění dva kaménky nižšího řádu za jeden kamének nejbližšího vyššího řádu

				
--	---	---	--	---

1

1

0

1

Žáci zapíší výsledek $(1101)_2$.

4)Výpočet

Při dvojkové číselné soustavě stále dělíme dvěma.

$$\begin{array}{rcll} 13 & : & 2 & = 6 \\ & \swarrow & & \\ & 1 & & \\ & & 6 & : 2 = 3 \\ & & \swarrow & \\ & & 0 & \\ & & & 3 : 2 = 1 \\ & & & \swarrow \\ & & & 1 \\ & & & & 1 : 2 = 0 \\ & & & & \swarrow \\ & & & & 1 \end{array}$$

Algoritmus končí, když výsledek neuplného podílu je 0. Opíší se zbytky dělení se zbytkem a dostaneme zápis čísla 13 ve dvojkové soustavě, tj. **(1101)₂**.

Při zápisu čísla v jiné číselné soustavě než je dvojková počet dvě nahradíme základem číselné soustavy.

11. Kompetence komunikativní : Jazyk matematiky a matematická logika

Výrokem nazveme každou oznamovací větu, která srozumitelně oznamuje něco, co může být jen pravdivé, anebo nepravdivé.

Zde vidíme, proč jsme popsali v minulých lekcích druhy vět a k čemu je nám oznamovací věta k užítu.

Slovo „výrok“ se běžně chápe jako pamětihodná věta nějaké osobnosti, anebo jako usnesení soudu, anebo jako sdělení komise znalců, a podobně. To vzbuzuje dojem, je pravdivé, nevyvratitelné tvrzení. I Slovník spisovné češtiny pro školu a veřejnost (Akademia Praha 1978, 501-21-857) uvádí na str.649 **výrok 1. vyjádření myšlenky slovy:** ve svých výrocích je unáhlený; slavný výrok řeckého filozofa; okřídlený výrok, **sentence 2. rozhodnutí, rozsudek:** soudní výrok, výrok komise.

Většina lidí je v domněn, že výrok je vždy pravdivý. Výrokem je však i oznamovací věta nepravdivá. Oznamovací věta „Jedna a jedna rovná se pěti“ je výrokem. Jde o oznamovací větu, která srozumitelně oznamuje něco co je nepravdivé. Tuto oznamovací větu lze zapsat místo slov číselnými symboly „ $1 + 1 = 5$ “. Zápis je různý, ale slovní vyjádření je stejné.

Věty „Přeskoč!“, „Kolik je hodin?“ nejsou výrokem, neboť nejde o oznamovací věty. Na druhé straně oznamovací věta „Kočka je násobkem psího ocasu“ není výrokem neboť srozumitelně nic neoznamuje.

Jak zjišťujeme pravdivost, anebo nepravdivost výroků? Je zřejmé, že na základě svých životních zkušeností, z odborné literatury, dnes i z Internetu a na základě informace od věrohodných osob. I zde však vidíme, že by mohlo dojít k omylu. Jeden ze známých příkladů jsou dějiny, kdy například vynález knihtisku je v různé literatuře uváděn různým datem. Říká se, že kritériem pravdy je praxe. Jak však zde například rozhodnout o pravdivosti data vynálezu knihtisku praxí.

Negace výroku

Podívejme se na negaci výroku.

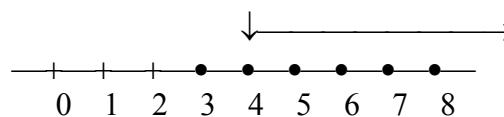
Jestliže označíme určitý výrok písmenem q , pak výrok „Není pravda, že q “ nazýváme **negací výroku q** .

Slovo negace je odvozeno z latinského slovesa *negare* což znamená popřít. Výrok „Praha je hlavním městem České republiky“ popřeme neboli negujeme „Není pravda, že Praha je hlavním městem České republiky“. V matematických symbolech „Není pravda, že $1 + 1 = 5$ “. Vidíme, že z pravdivého výroku se negací stal výrok nepravdivý a z nepravdivého pravdivý. Negaci výroku vyjadřujeme tak zvaným zkráceným způsobem. Mám bílý svetr. Není pravda, že mám bílý svetr. Zkrácený způsob :Nemám bílý svetr. Zde se můžeme dopustit chyby. Mohli bychom výrok „Mám bílý svetr“ negovat „Mám modrý svetr“, ale to není negace výroku „Mám bílý svetr“. Uvedu-li výrok „ $6 > 2$ “, pak negace je „Není pravda, že $6 > 2$ “ a zkrácený způsob je „ $6 \leq 2$ “. Tedy nikoliv „ $6 < 2$ “.

Shrneme-li vše do závěru pak: „**Jestliže se uvádí ve výroku jedna z několika možností, musí jeho negace zahrnovat všechny ostatní možnosti.**“.

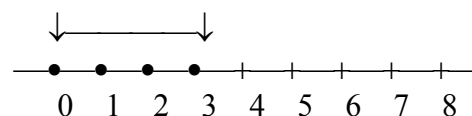
V některých výrocích se udává **počet nebo odhad počtu osob, věcí, matematických objektů** a podobně, které mají jistou vlastnost. Jde o údaje vyjádřené slovy: aspoň jeden, aspoň dva, aspoň tři, atd., právě jeden, právě dva, právě tři, atd., nejvýše jeden, nejvýše dva, nejvýše tři, atd., každý, všichni, žádný. Vysvětlíme si stručně význam těchto slov aspoň, právě, nejvýše, každý, všichni, žádný. Využijeme znalostí o nule a přirozených číslech a jejich znázornění na číselné ose.

Aspoň třiznamená 3 a více



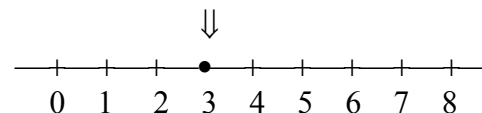
Obr. 1

Nejvýše tři ...znamená 0, 1, 2, 3
a ne více



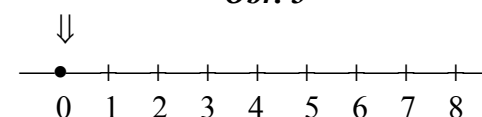
Obr. 2

Právě třiznamená 3 a ne více
a ne méně



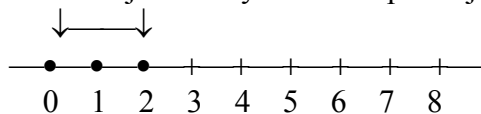
Obr. 3

Žádný.....znamená 0 a ne více



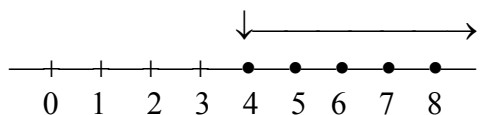
Obr. 4

Výše uvedené výroky můžeme negovat pomocí slov „Není pravda, že.....“ nebo můžeme použít výše uvedené věty : „Jestliže se uvádí ve výroku jedna z několika možností, musí jeho negace zahrnovat všechny ostatní možnosti.“ a pak negace výroků znázorněných na obrázcích 1 až 4 udávají počty osob nebo věcí, které nejsou znázorněny černou tečkou. Tyto případy znázorňují obrázky 5 až 8 a vpravo jsou vyjádřeny slovy.



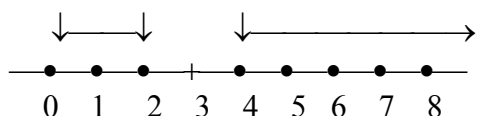
Obr. 5

0, 1, 2 a ne více nejvýše dva



Obr. 6

4 a víceaspoň čtyři



Obr. 7

0, 1, 2 nebo 4 a více ...nejvýše dva nebo aspoň čtyři



Obr. 8

1 a víceaspoň jeden

Uveďme si několik příkladů na negace výroků.

Příklad 1:

1)

Aspoň čtyři žáci měli vyznamenání. Negace je „Není pravda, že aspoň čtyři žáci měli vyznamenání.“ nebo „Nejvýše tři žáci měli vyznamenání.“

2)

Nejvýše pět dní byla teplota pod bodem mrazu. Negace je „Není pravda, že nejvýše pět dní byla teplota pod bodem mrazu.“ nebo „Aspoň šest dní byla teplota pod bodem mrazu.“

3)

Právě čtyři dni přšelo. Negace je „Není pravda, že právě čtyři dni přšelo.“ nebo „ Nejvýše tři dni nebo aspoň pět dní přšelo.“.

Pozor! Problémy jsou s negacemi výroku se slovy žádný nebo všichni.

4)

Jestliže mám výrok „Žádné dítě nemá kašel.“, znamená to vlastně, že „Žádné dítě má kašel.“. Počet dětí, které mají kašel je tedy nula a negace je „Není pravda, že žádné dítě má kašel.“ nebo dle obr. 8 „Aspoň jedno dítě má kašel.“.

5)

Negací výroku „Každé okno je zavřené.“ není výrok „Každé okno není zavřené.“ tedy „Všechna okna jsou otevřená“, ale „Aspoň jedno okno je otevřené“.

Další problémy jsou se slovy někdo, kdosi, nejméně, bezmála, a podobně. Tato slovy musíme nejdříve „přeložit“ do matematického jazyka, do matematické frazeologie. Například:

6)

Někdo, kdosi „přeložíme“ jako „aspoň jeden“. Tedy výrok „Kdosi zatleskal.“ přeložíme jako „Aspoň jeden zatleskal.“ a negace je podle obr. 1 „Žádný zatleskal.“, tedy v běžné řeči „Žádný nezatleskal“.

7)

Nejméně „přeložíme“ jako aspoň. Tedy výrok „Nejméně dva dny bude nemocný.“ přeložíme „Aspoň dva dny bude nemocný.“. Negace tohoto výroku je tedy „Nejvýše jeden den bude nemocný.“

8)

Bezmála dle Slovníku spisovné češtiny znamená skoro, málem, téměř. Všechna tato slova „přeložíme“ jako nejvýše. Výrok „Bezmála dvacet let zde stojí tato budova.“ přeložíme „Nejvýše dvacet let zde stojí tato budova.“ a to negujeme a dostaneme výrok „Aspoň dvacet jedna let zde stojí tato budova.“.

Složený výrok

Negací daného výroku považujeme za složený výrok, který je utvořen z daného výroku tak, že je nepravdivý, když je daný výrok pravdivý a je pravdivý, když je daný výrok nepravdivý.

Dále můžeme skládat výroky tak, že z oznamovacích vět budeme tvořit souvětí. Nejdříve budeme skládat dvě oznamovací věty.

Složený výrok, který je ze dvou daných výroků utvořen tak, že je pravdivý právě tehdy, když oba výroky jsou pravdivé, se nazývá **konjunkce** daných výroků.

Příklad 2:

Souvětí *Praha je hlavní město České republiky a Bratislava je hlavní město Slovenské republiky* je složeno ze dvou oznamovacích vět spojené spojkou *a*. Z hlediska české mluvnice jde o souvětí souřadné, věty jsou spojeny souřadící spojkou *a*. Složený výrok je pravdivý, právě tehdy, když oba výroky jsou pravdivé.

Souvětí *Praha je hlavní město České republiky a Bratislava je hlavní město Polské republiky* je nepravdivé.

Obdobně můžeme použít k psaní vět i matematickou symboliku. I zde jde o souvětí, zapsané poněkud netradičně. $1 + 1 = 2$ a $3 < 7$ je souvětí souřadné a jako složený výrok dvou oznamovacích vět je pravdivé.

Řekneme-li o určitém trojúhelníku, že *Trojúhelník ABC je pravoúhlý a rovnoramenný*, považujeme tento výrok za pravdivý pouze v tom případě, že má trojúhelník obě uvedené vlastnosti, tzn. , že oba výchozí výroky *Trojúhelník ABC je pravoúhlý*, *Trojúhelník je rovnoramenný* jsou pravdivé. V každém jiném případě je tento složený výrok nepravdivý.

Složený výrok, který je ze dvou daných výroků utvořen tak, že je pravdivý právě tehdy, když je pravdivý aspoň jeden z daných výroků, se nazývá **disjunkce**.

Příklad 3:

Souvětí *Alena plave v bazénu nebo Alena se opaluje* je složeno ze dvou oznamovacích vět, souvětí lze upravit *Alena plave v bazénu nebo se opaluje*. Jde o souvětí souřadné, věty jsou spojeny souřadící spojkou *nebo*. Tento složený výrok je pravdivý, právě tehdy, když je pravdivý aspoň jeden z daných výroků. Netradiční matematický zápis souřadného souvětí dvou oznamovacích vět $3 - 1 = 3$ *nebo* $6 > 3$ je složený výrok a je pravdivý, neboť aspoň jeden z daných výroků je pravdivý.

Řekneme-li o určitém trojúhelníku, že *Trojúhelník ABC je pravoúhlý nebo rovnoramenný*, považujeme tento výrok za pravdivý pouze v tom případě, že má trojúhelník aspoň jednu uvedenou vlastnost, tzn. , že aspoň jeden z výchozích výroků *Trojúhelník ABC je pravoúhlý*, *Trojúhelník je rovnoramenný* je pravdivý. V každém jiném případě je tento složený výrok nepravdivý. Trojúhelník může být jenom pravoúhlý, jenom rovnoramenný, může mít vlastnosti obě.

V českém jazyku lze použít i spojky, které jsou v každé větě. Jsou to spojky dvojité. Jde například o spojovací výraz *bud'-nebo*.

Složený výrok, který je ze dvou daných výroku utvořen tak, že je pravdivý právě tehdy, když je pravdivý právě jeden z daných výroků se nazývá **ostrá disjunkce** někdy **těž vylučovací disjunkce**.

Příklad 4:

Budu-li například oznamovat v dopise sdělení *Ve škole se učíme psát dopisy na počítači nebo na psacím stroji*, tak přesněji bych měl napsat, že *Ve škole se učíme psát dopisy bud' na počítači nebo na psacím stroji*, neboť určitě nepíšeme dopis současně na počítači a na psacím stroji.

Obdobně jde o oznamovací věty *Jan spí nebo se učí*, *Karel se koupe nebo bruslí*. Určitě mají znít *Jan bud' spí nebo se učí*, *Karel se bud' koupe nebo bruslí*.

Řekneme-li o určitém trojúhelníku, že *Trojúhelník ABC je bud' pravoúhlý nebo rovnoramenný*, považujeme tento výrok za pravdivý pouze v tom případě, že má trojúhelník právě jednu uvedenou vlastnost, tzn. , že právě jeden z výchozích výroků *Trojúhelník ABC je pravoúhlý*, *Trojúhelník je rovnoramenný* je pravdivý. V každém jiném případě je tento složený výrok nepravdivý. Trojúhelník může být jenom pravoúhlý, jenom rovnoramenný, nemůže mít vlastnosti obě.

Místo spojek *bud'-nebo*, používáme někdy spojek *bud'-anebo*.

Složený výrok, který je utvořen ze dvou výroků, které jsou dány v určitém pořadí tak, že je nepravdivý právě tehdy, když první z nich je pravdivý a druhý nepravdivý, se nazývá **implikace** daných výroků v daném pořadí. V ostatních případech je výrok pravdivý.

Příklad 5:

V našem případě nás budou zajímat dvě oznamovací věty, které jsou v souvětí podřadném. Věty jsou na sebe závislé jak obsahově, tak mluvnicky. Jde o souvětí podřadné s vedlejší větou příslovečnou podmínkovou. Věta hlavní začíná spojkou *jestliže*, věta vedlejší spojkou *pak*. V matematice se používají spojky *jestliže-pak*. V matematice lze použít i spojkou *když* a spojka *pak* se vynechá.

Implikací jsou například věty: *Jestliže je trojúhelník rovnostranný, pak obsahuje vnitřní úhel o velikosti 60 stupňů.* *Jestliže prší, pak je mokro.* V tomto případě je složený výrok pravdivý. Jestliže změním pořadí vět: *Jestliže trojúhelník má vnitřní úhel o velikosti 60 stupňů, pak je rovnostranný,* *Jestliže je mokro, pak prší* pak vidím, že jde o jinou situaci, neboť trojúhelník může mít vnitřní úhel 60 stupňů a nemusí být rovnostranný a může být mokro a nemusí pršet, třeba mohu zalévat.

Uvedu složený výrok *Jestliže bude venku ve stínu 30 stupňů Celsia tepla, pak já půjdu na koupaliště.* Je venku 30 stupňů Celsia tepla ve stínu, jsem na koupališti, tak mluvím pravdu. Je venku 30 stupňů Celsia tepla ve stínu, nejsem na koupališti, tak mluvím nepravdu. Není venku 30 stupňů Celsia ve stínu ve stínu, nejsem na koupališti, tak mluvím pravdu. Není venku 30 stupňů Celsia tepla ve stínu, jsem na koupališti, tak mluvím také pravdu. Moje činnost je podmíněna podmínkou 30 stupňů Celsia tepla ve stínu.

Složený výrok, který je utvořen ze dvou výroků tak, že je pravdivý právě tehdy, když jsou buď oba výroky pravdivé nebo oba nepravdivé, se nazývá **ekvivalence** daných výroků.

Příklad 6:

U souvětí podřadném s vedlejší větou příslovečnou podmínkovou, kde lze zaměnit větu hlavní s větou vedlejší a pravdivost složeného výroku zůstane zachována jde o případ ekvivalence.

V souvětí *Jestliže $6 > 3$, pak $-6 < -3$* zaměníme větu hlavní za větu vedlejší a dostaneme *Jestliže $-6 < -3$, pak $6 > 3$.* Vidíme, že oba složené výroky jsou pravdivé. Mohu tedy říci matematickou frazeologií *$6 > 3$ právě, když $-6 < -3$.* Místo spojky *právě, když* matematika používá i spojku *právě tehdy, když*, někdy *tehdy a jen tehdy*.

Výrokový počet

Výroky můžeme skládat nejen dva, ale i výroků více. Dostáváme složité složené výroky. Zavedeme si matematický „aparát“, který nám usnadní zjišťování pravdivosti resp. nepravdivosti těchto výroků.

Zavedeme si výrokovou proměnnou za kterou budeme dosazovat libovolný výrok. Výrokovou proměnnou budeme zapisovat písmeny malé abecedy. Pro spojování dvou výroků slova nahradíme znaky, dostaneme **logické spojky** a jejich symboly.

typ složeného výroku	slovní vyjádření spojky	zápis symbolu spojky
negace	není pravda, že	$\neg$
konjunkce	a	$\wedge$
disjunkce	nebo	$\vee$
implikace	jestliže, pak	$\Rightarrow$
ekvivalence	právě když	$\Leftrightarrow$

Poznámka: Pro jednoduchost jsme vynechali ostrou disjunkci

Zavedeme si **abecedu výrokového počtu**.

Abeceda výrokového počtu obsahuje tyto znaky:

- písmena malé abecedy jako znaky pro výrokové proměnné,
- znaky pro logické spojky $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$,
- závorky jako pomocné znaky.

Zavedeme pojem **výroková formule**:

- Každá výroková proměnná je výroková formule,

- 2) jestliže α , β jsou výrokové formule, pak $\neg\alpha$, $\neg\beta$, $\alpha\wedge\beta$, $\alpha\vee\beta$, $\alpha\Rightarrow\beta$, $\alpha\Leftrightarrow\beta$ jsou výrokové formule,
 3) jiný zápis není výrokovou formulí.

Příklad 7:

Výrokové formule: $\neg(a\wedge b)$, $(\neg a \wedge b) \vee (a\Rightarrow b)$, atp.

Pravdivostní hodnota výroku

Ke každému výroku přiřadíme právě jedno z čísel 0,1, tak **zvanou pravdivostní hodnotu výroku** takto: pravdivý výrok má pravdivostní hodnotu 1, nepravdivý výrok má pravdivostní hodnotu 0.

Pod jednotlivé znaky výroků a znaků pro logické spojky budeme zapisovat pravdivostní hodnotu výroku a dostaneme **tabulku pravdivostních hodnot** pro výrokovou formuli:

Příklad 8:

$$\neg(a \wedge b)$$

0	1	1	1
1	1	0	0
1	0	0	1
1	0	0	0

U některých výrokových formulí se ve výsledném sloupci (v příkladu 24 vyznačen tučně) tabulky pravdivostního ohodnocení vyskytují pouze jedničky. Znamená to, že taková výroková formule se stává pravdivým výrokem, dosazujeme-li za všechny její výrokové proměnné jakékoliv výroky bez ohledu to, zda jsou pravdivé nebo ne. Těmto formulím říkáme **tautologie**.

Příklad 9:

$(a \Rightarrow b)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg a) \vee b$
1 1 1	1	0 1 1 1
1 0 0	1	0 1 0 0
0 1 1	1	1 0 1 1
0 1 0	1	1 0 1 0

Jedná se o tautologii. Podíváme-li se na příklad z běžného života, můžeme výrok $a \Rightarrow b$ nahradit jiným výrokiem $(\neg a) \vee b$. Výrok *Jestliže vyběhneš dříve, pak budeš vyloučen* můžeme nahradit výrokiem *Nevybíhej dříve nebo budeš vyloučen*.

Říkáme, že výrokové formule α , β jsou navzájem **logicky ekvivalentní** právě když výroková formule $\alpha \Leftrightarrow \beta$ je tautologií.

Pravidla správných úvah

Budeme říkat, že úvaha je **správná** právě v tom případě, když z pravdivých předpokladů vyplývá na základě tabulek pravdivostních hodnot vždy pouze jen pravdivý závěr.

Příklad 10:

Vyslovme úvahu:

Jestliže je číslo sudé, pak je dělitelné dvěma}	<u>předpoklady</u>
Číslo je sudé	
Je dělitelné dvěma	<u>závěr</u>

Určíme-li logickou stavbu výroku vyskytující se v této úvaze dostaneme schéma:

$a \Rightarrow b$
<u>a</u> <u>předpoklady</u>
b <u>závěr</u>

Tabulka pravdivostních hodnot:	$[(a \Rightarrow b) \wedge a] \Rightarrow b$
	1 1 1 1 1 1 1
	1 0 0 0 1 1 0
	0 1 1 1 1 1 1
	0 0 0 0 0 1 0

Oba výroky tvořící předpoklady úlohy (tj. $a \Rightarrow b$ i a) jsou pravdivé. V obou těchto případech je závěr b pravdivý. (Řádek první a třetí.) Jde o tak zvané **odvozovací pravidlo**. Toto odvozovací pravidlo se nazývá **pravidlo odloučení** (modus ponens).

Vyslovme úvahu: Jestliže budu mít čas, pak půjdu na tenis

Neměl jsem čas

Nešel jsem na tenis

Schéma odpovídající úvaze je následující: $a \Rightarrow b$

$\neg a$

$\neg b$

Tabulka pravdivostních hodnot :

$[(a \Rightarrow b) \wedge \neg a] \Rightarrow \neg b$
1 1 1 0 0 1 1 0 1
1 0 0 0 0 1 1 1 0
0 1 1 1 1 0 0 0 1
0 1 0 1 1 0 1 1 0

V tabulce vidíme, že oba předpoklady ($a \Rightarrow b$, $\neg a$) jsou současně pravdivé, ale závěr ($\neg b$) může být jak pravdivý, tak nepravdivý. Tato úvaha není pravidlem správných úvah.

Podíváme se ještě na další odvozovací pravidla:

Pravidlo negace (modus tollens) $a \Rightarrow b$

$\neg b$

$\neg a$

Pravidlo kontrapozice

$a \Rightarrow b$

$\neg b \Rightarrow \neg a$

Pravidlo sylogismu

$a \Rightarrow b$

$b \Rightarrow c$

$a \Rightarrow c$

Pravidlo disjunkce předpokladů

$a \Rightarrow c$

$b \Rightarrow c$

$a \vee b \Rightarrow c$

Jsou ještě další pravidla, které není nutné uvádět.

Výroková forma

Nyní se budeme zabývat sděleními, které na první pohled vypadají jako výroky, která však za výroky považovat nemůžeme. Například $x > 7$, $y + 5 = 10$, číslo x je liché, pan x je obyvatelem Litoměřic, atp. Podívejme se na sdělení $x > 7$. Nemá smysl se ptát zde je pravdivé, či nepravdivé. Důvod je ve výskytu **proměnné x** . Pokud za proměnnou x dosadíme číslo 9, obdržíme pravdivý výrok $9 > 7$. U každé proměnné je třeba znát množinu **M** z které za proměnnou dosazujeme. Představujme si, že proměnná vždy za sebou táhne vozíček s prvky množiny **M** , které se za proměnnou **dosazují**. Této množině říkáme **obor proměnné**.

Sdělení mohou mít i více proměnných například $x < y$, $a + b + c = 11$, Pan x je obyvatelem města y , atp.

Všechna tato sdělení nazýváme **výrokové formy**. Charakteristické pro ně je, že obsahují aspoň jednu proměnnou a že po vhodném dosazení za všechny proměnné vznikne výrok.

Podíváme se na slovo vhodné dosazení. Asi těžko oborem proměnné ve výrokové formě $x < 10$ bude množina obyvatel České republiky, ale určitě půjde o čísla.

Příklad 11 :

V učebnici pro 1. ročník základní škola je tato úloha:

$$\square < 5 \quad | \quad 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

Podtrhněte čísla, která dají pravdivý zápis.

Jde o výrokovou formou s oborem proměnných přirozených čísel **$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$** .

Obor proměnných se nám rozdělí na **obor pravdivosti**, to jsou čísla 1, 2, 3, 4 a obor **nepravdivosti**, to jsou čísla 5, 6, 7, 8.

Z výrokových forem se skládají složené výrokové formy pomocí logických spojek $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ a závorek.

Příklad 12:

Jestliže $x < y$ a $y < z$, pak je $x < z$, oborem každé z proměnných je množina reálných čísel ($x, y, z \in \mathbf{R}$), lze zapsat

$$x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z, \text{ pro } x, y, z \in \mathbf{R}$$

12. Kompetence komunikativní. Třídění v matematice, definice a věta v matematice.

Zopakujeme pojem třídění:

Třídění (klasifikace) matematických pojmů

Obsah pojmu určujeme pomocí definic, rozsah pomocí třídění (klasifikace).

Prvky mající tytéž charakteristické základní vlastnosti (znaky) a náležejí do rozsahu daného pojmu tvoří množinu, jejíž prvky se mohou lišit vedlejšími (podružnými) znaky nebo jinou kvalitou či kvantitou charakteristické vlastnosti (znaku). Při třídění (klasifikaci) provádíme rozklad dané množiny (rozsahu pojmu) na třídy (podmnožiny) podle vedlejších vlastností (znaků).

Třídění musí splňovat následující podmínky:

- 1) Třídění musí být **úplné** (vyčerpávající)-musí zahrnovat všechny prvky příslušné množiny (rozsahu pojmu).
- 2) Třídění musí být **disjunktní**, což znamená, že každý prvek tříděné množiny je zařazen právě do jedné třídy, to znamená, žádný prvek nemůže být současně prvkem dvou tříd.
- 3) Třídění je nutno provádět vždy podle **téhož znaku** (vlastnosti).

V třídění se často chybí. Například na otázku, jaké druhy trojúhelníků znáte, často slyšíme odpověď: trojúhelníky dělíme na ostroúhlé, pravoúhlé, rovnoramenné a rovnostranné. Třetí podmínka třídění podle téhož znaku je zde porušena.

Úplné rozřazení prvků, které náleží rozsahu daného pojmu se nazývá **klasifikace** daného pojmu.

Nejnámější způsob třídění je **třídění dichotomické**. Zde třídění na prvky, které uvedenou vlastnost mají a na prvky, které tuto vlastnost nemají. (*Dichotomický znamená dvojčlenný*).

Mějme množinu **A** a vlastnost **V₁**, přičemž existují prvky množiny **A**, které vlastnost **V₁** mají i prvky, které ji nemají. Potom

$$A_1 = \{x: x \in A \wedge V_1(x)\} \quad \text{a} \quad A'_1 = \{x: x \in A \wedge V'_1(x)\}.$$

Provedli jsme rozklad množiny **A** na dvě třídy **A₁** a **A'₁**. Platí podmínky třídění:

- 1) $A_1 \cup A'_1 = A$, 2) $A_1 \cap A'_1 = \emptyset$, 3) Třídili jsme dle znaku **V₁**.

Pomocí jiné vlastnosti **V₂** rozložíme množinu **A₁** na dvě třídy

$$A_2 = \{x: x \in A \wedge V_1(x) \wedge V_2(x)\} \quad \text{a} \quad A'_2 = \{x: x \in A \wedge V_1(x) \wedge V'_2(x)\}.$$

Analogicky bychom mohli rozkládat množinu **A₂** pomocí některé vlastnosti **V₃** dvě třídy **A₃** a **A'₃**, atd., až dospějeme k nějaké množině **A_n**, kterou již dále nelze rozložit – provedli jsme **klasifikaci**.

Definice

Podíváme se na způsoby definování pojmů.

1) Definice pomocí specializace jiného pojmu, t. zv. aristotelovská, případně analytická definice, někdy též nazývaná formálně-logická.

Jestliže v množině **A** jsou prvky, které mají jistou vlastnost **V** a zároveň prvky, které ji nemají, tak vlastnost **V** definuje rozklad množiny **A** na dvě třídy

$$B = \{x: x \in A \wedge V(x)\} \quad \text{a} \quad B' = \{x: x \in A \wedge V'(x)\}$$

V(x) značí „*x* má vlastnost **V**“, **V'(x)** značí „*x* nemá vlastnost **V**“.

Tento rozklad splňuje všechny podmínky třídění: Je úplný, disjunktní a podle téhož znaku.

Pomocí vlastnosti **V** jsme definovali množinu **B** jako podmnožinu **A**. Definice **B** je pomocí rodu (rodového pojmu) **A** a druhového znaku **V**.

Příklad 1:

Nechť např. **A** je množina rovnoběžníků, **V** – vlastnost „mít pravý úhel“. Pak **B** je množina pravoúhelníků a definice pravoúhelníků je následující:

Pravoúhelník je rovnoběžník s pravým úhlem.

Jestliže vlastnost **V** nemá ani jeden prvek množiny **A**, tak definice množiny **B** nic nedefinuje. **B** je prázdná množina. Takovou definici nazýváme **protiřečením**.

Příklad 2:

Dvoupřavoúhlý trojúhelník je trojúhelník s dvěma pravými úhly.

2) Syntetická definice

Syntetická definice zavádí pro jistá spojení známých pojmů nové jméno (označení).

Příklad 3:

Přímka mající s kružnicí jediný společný bod se nazývá **tečna kružnice**. Spojením dvou známých pojmů přímka a kružnice vzniká pojem nový.

Mezi syntetické definice patří i tak zvaná definice konstruktivní, ve které popisujeme tvorbu pojmu.

Příklad 4:

Budíž dána rovina ζ (*ró*) a v ní kružnice k a budíž dána přímka p , která není s rovinou ζ rovnoběžná. Množina všech přímek rovnoběžných s přímkou p a protínající kružnici k je **kruhová válcová plocha**.

3) Definice abstrakcí

V určité dané množině platí relace (vztah), který je symetrický, reflexivní a tranzitivní. Všechny prvky této množiny mají určitou vlastnost, která je touto relací vymezena a danou množinu určuje.

Příklad 5:

Je dána množina všech přímek **P**. V této množině zavedeme relaci rovnoběžnost přímek, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní a ta nám způsobí rozklad této množiny na množiny sobě navzájem rovnoběžných přímek. Množina navzájem sobě rovnoběžných přímek se nazývá **směr**.

4) Definice kontextuální

Mnohé matematické definice neuvádějí definovaný pojem izolovaně, ale uvádějí jej v určité souvislosti s jinými pojmy (v kontextu). Tyto definice se nazývají **kontextuální**.

Příklad 6:

n -tá odmocnina z nezáporného čísla a je takové nezáporné číslo x , pro které platí

$$x^n = a.$$

5) Induktivní definice

Mezi nejznámější induktivní definice patří definice posloupností. Principem této definice je, že se určí výchozí prvek definované množiny, která bude pojmenována a formulují se pravidla tvoření nových prvků z prvků již daných. Ukazuje se, že výchozí prvky a vytvořené prvky vyčerpávají všechny prvky definované množiny.

Příklad 7:

Vztahy $a_1 = a$ a $a_{n+1} = a \cdot q$, kde $|q| \neq 1$ a $q \neq 0$ definují **geometrickou posloupnost**.

Matematická věta

Matematická věta (poučka) značí nějaký matematický poznatek vyjádřený slovy nebo symbolickým zápisem, jehož pravdivost je zaručena.

Z hlediska logiky je matematická věta vždy pravdivý výrok. Budeme však hovořit i o větách, které jsou nepravdivé. Takové věty i když se jejich obsah týká matematické látky pochopitelně nebudou matematickými větami (poučkami). Z kontextu (ze souvislosti) je vždy jasné, kdy se pojem „věta“ užívá ve smyslu věta a kdy ve smyslu gramatickém.

Matematické věty mají zpravidla tvar logické implikace nebo se dají na tento tvar převést: $p \Rightarrow t$ (jestliže platí p , pak platí t).

Výrok p nazýváme **předpokladem** (podmínkou) a výrok t **tvrzením** (závěrem) věty. O matematických větách, které mají strukturu implikace, t. zn. $p \Rightarrow t$, říkáme, že jsou v podmínkovém tvaru.

Každá matematická věta má mít jasně vyslovený předpoklad, aby nenastaly nejasnosti. Velmi často se však z jazykových důvodů stává, že tento předpoklad není vysloven podmínkovém tvaru věty.

Příklad 8:

Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180 stupňů. Je třeba větu upravit do podmínkového tvaru: *Jestliže je obrazec trojúhelník, pak součet jeho vnitřních úhlů je 180 stupňů* a pak je jasné vidět co je předpoklad a co je tvrzení.

Nechť matematická věta má tvar $p \Rightarrow t$. Jestliže označíme negace výroků p , t jako $\neg p$, $\neg t$, pak výrok $\neg t \Rightarrow \neg p$ nazýváme **obměněnou větou** případně **negativním vyslovením věty** $p \Rightarrow t$. Platí, že jestliže je $p \Rightarrow t$ je matematická věta, pak i $\neg t \Rightarrow \neg p$ je též matematická věta. Pomocí tabulky pravdivostních hodnot se lze přesvědčit, že vždy platí

$$(p \Rightarrow t) \Leftrightarrow (\neg t \Rightarrow \neg p), \text{ tedy tato ekvivalence je tautologií.}$$

Věty $(p \Rightarrow t)$ a $(\neg t \Rightarrow \neg p)$ říkají totéž.

Výrok $t \Rightarrow p$, který vznikne z věty $p \Rightarrow t$ záměnou předpokladu za tvrzení nazýváme **obrácením věty** $t \Rightarrow p$ k větě $p \Rightarrow t$. Požíváme termín obrácení věty, nikoliv obrácená věta, neboť obrácením věty nemusíme dostat pravdivý výrok a tudíž nejde o matematickou větu. O pravdivosti věty $t \Rightarrow p$ se musíme vždy přesvědčit.

Příklad 9:

Jestliže jsou-li obrazce shodné, pak mají též obsah ($p \Rightarrow t$). Jestliže nemají obrazce též obsah, pak nejsou shodné ($\neg t \Rightarrow \neg p$). Výrok je pravdivý, jde o matematickou větu. *Jestliže mají obrazce též obsah, pak jsou shodné ($t \Rightarrow p$).* Výrok je nepravdivý, nejedná se o matematickou větu.

Příklad 10:

Jestliže je ciferný součet přirozeného čísla dělitelný 3, pak je toto přirozené číslo dělitelné 3 ($p \Rightarrow t$). Jestliže není přirozené číslo dělitelné 3, pak ciferný součet tohoto přirozeného čísla není dělitelný 3 ($\neg t \Rightarrow \neg p$). Výrok je pravdivý, jde o matematickou větu.

Jestliže je přirozené číslo dělitelné 3, pak ciferný součet tohoto přirozeného čísla je dělitelný 3 ($t \Rightarrow p$). Výrok je pravdivý, jde o matematickou větu. Příklad ukazuje, že existují matematické věty, jejichž obrácení je rovněž matematická věta, to znamená, že platí $(p \Rightarrow t) \wedge (t \Rightarrow p)$.

Tabulkou pravdivostních hodnot se lze přesvědčit, že složený výrok $(p \Rightarrow t) \wedge (t \Rightarrow p)$ je ekvivalencí a lze tedy napsat $p \Leftrightarrow t$. Třetí větu lze tedy vyslovit: *Přirozené číslo je dělitelné 3, právě když jeho ciferný součet je dělitelný 3.*

Matematické věty dokazujeme. Jsou však matematické věty, které nedokazujeme, jejichž pravdivost je ověřena naší zkušeností a praxí, jejich použití dosud nevedlo k rozporu. Tyto matematické věty se nazývají **axiomy**.

Kvantifikátory

Již jsme se setkali s udáváním počtu osob nebo věcí, matematických objektů. Velmi důležitá jsou v matematice rčení „Pro každé x platí.....“ a „Existuje aspoň jedno x pro které platí.....“. Sdělení „Pro každé x z množiny $\mathbf{M}$ “ a „Existuje aspoň jedno x z množiny $\mathbf{M}$ “ nazýváme po řadě **obecným a existenčním kvantifikátorem** vázajícím proměnnou x z množiny $\mathbf{M}$.

Pro **obecný kvantifikátor** se používá tento symbolický zápis: $\forall x \in \mathbf{M}$ (čteme: pro každé x z množiny $\mathbf{M}$).

Pro **existenční kvantifikátor** se používá tento symbolický zápis: $\exists x \in \mathbf{M}$ (čteme: existuje aspoň jedno x z množiny $\mathbf{M}$).

Máme-li výrokovou formu proměnné x $V(x)$ a umístíme-li před tuto výrokovou formu $V(x)$ kvantifikátor, tak dostaneme z výrokové formy výrok **obecný**, v případě použití obecného kvantifikátoru

$$\forall x \in \mathbf{M} : V(x)$$

(čteme: pro každé x z množiny $\mathbf{M}$ platí $V(x)$)

případně výrok **existenční**, v případě použití existenčního kvantifikátoru

$$\exists x \in \mathbf{M} : V(x)$$

(čteme: existuje aspoň jedno x z množiny $\mathbf{M}$ pro které platí $V(x)$).

Většina matematických vět má právě strukturu obecného, případně existenčního výroku. Jde o věty tvaru: $\forall x \in \mathbf{M} : P(x) \Rightarrow T(x)$, případně $\exists x \in \mathbf{M} : P(x) \Rightarrow T(x)$, kde $P(x)$ je předpoklad a $T(x)$ tvrzení věty.

Máme-li matematickou větu tvaru $\forall x \in \mathbf{M} : P(x) \Rightarrow T(x)$, potom

$\forall x \in \mathbf{M} : \neg T(x) \Rightarrow \neg P(x)$ je obměněná věta k dané větě a výrok

$\forall x \in \mathbf{M} : T(x) \Rightarrow P(x)$ je obrácení dané věty, musíme však dokázat, zda obrácení je, či není matematickou větou.

Dohodneme se, že budeme označovat množinu všech přirozených čísel $\mathbf{N}$, množinu všech celých čísel $\mathbf{C}$, množinu všech racionálních čísel $\mathbf{Q}$ a množinu všech reálných čísel $\mathbf{R}$.

Příklad 11:

$\forall x \in \mathbf{R} : x^2 \geq 0$, čteme: pro každé reálné číslo x platí, že x^2 je větší nebo rovno nule. Jde o obecný výrok, který je pravdivý.

$\exists x \in \mathbf{R} : x^2 = 4$, čteme: existuje aspoň jedno reálné číslo x pro které platí, že x^2 je rovno čtyřem. Jde o existenční výrok, který je pravdivý.

$\exists x \in \mathbf{C} : \neg x > 0$, čteme: existuje aspoň jedno celé číslo x pro které platí, že x je větší než nula. Jde o existenční výrok, který je pravdivý.

$\forall x \in \mathbf{C} : x \leq 0$, čteme: pro každé celé číslo x platí, že x je menší nebo rovné nule. Jde o obecný výrok, který je nepravdivý.

Negaci obecného či existenčního výroku lze vyjádřit tak, že

- 1) změníme kvantifikace původního výroku, tj. zaměníme obecný kvantifikátor za existenční a naopak; obor proměnné se nemění,
- 2) zapíšeme negaci původní výrokové formy.

Příklad 12:

Negace obecného výroku $\forall x \in \mathbf{R} : x^2 \geq 0$ je $\exists x \in \mathbf{R} : x^2 < 0$. Opravdu původní obecný výrok je pravdivý a existenční výrok je nepravdivý.

Negace existenčního výroku $\exists x \in \mathbf{R} : x^2 = 4$ je $\forall x \in \mathbf{R} : x^2 \neq 4$.

Jsou-li všechna okna zavřená a chceme-li tuto skutečnost negovat opravdu řekneme existuje aspoň jedno okno, které je otevřené. Nemusíme otvírat všechna okna.

Axiomatická definice

K této definici dojdeme tak, že budeme popisovat vztahy postřehnuté ve skutečné situaci. Víme, že tyto konkrétní vztahy postřehnuté ve skutečné situaci a ověřené našimi zkušenostmi, jejich použití dosud nevedlo k rozporu jsou matematickými větami, které nedokazujeme a nazývají se **axiomy**. Příslušné axiomy postřehnuté ve skutečné situaci nám udávají **axiomatickou definici matematické struktury**.

Matematická struktura je souhrn objektů charakterizovaných jen přesně formulovanými vztahy mezi nimi, ale jinak zcela libovolných. Každou jejich konkretizaci nazýváme **modelem struktury**.

Příklad 13:

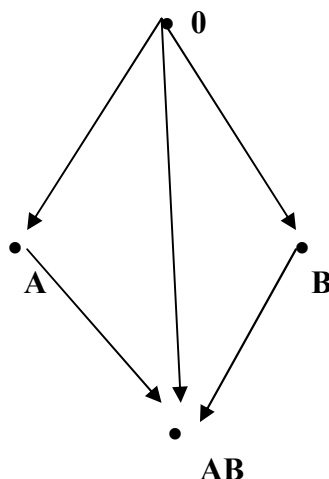
Od roku 1919 se rozlišují v lékařství čtyři hlavní krevní skupiny: A, B, AB, 0, k jejichž objevení přispěl podstatnou měrou český lékař MUDr. Jan Janský (1873 – 1921). Krevní transfuze lze provádět právě jen v těchto případech:

- 1) Dárce i příjemce mají stejnou krevní skupinu.
- 2) Má-li dárce krevní skupinu 0, může mít příjemce libovolnou krevní skupinu (univerzální dárce).
- 3) Má-li příjemce krevní skupinu AB, může mít dárce libovolnou krevní skupinu (univerzální příjemce).

Označíme-li $\mathbf{M} = \{ A, B, AB, 0 \}$ množinu krevních skupin a vztah $x \mathbf{R} y$ „osoba krevní skupiny x může dát krev osobě krevní skupiny y “ a $x, y \in \mathbf{M}$, lze zákony krevní transfuze zapsat takto:

- 1) $\forall x \in \mathbf{M} : x \mathbf{R} x$.
- 2) $\forall x \in \mathbf{M} : 0 \mathbf{R} x$.
- 3) $\forall x \in \mathbf{M} : x \mathbf{R} AB$.
- 4) Platí právě jen vztahy 1) až 3).

Informace 1) až 4) lze v množině $\mathbf{M}$ krevních skupin znázornit graficky uzlovým grafem: (dokreslete, že $x \mathbf{R} x$)



Na základě informací 1) až 4) se dá například teoreticky ověřit, aniž bychom trápili pacienty, zda platí tranzitivnost dárcovství krve:

$$\forall x, y, z \in \mathbf{M} : [(x \mathbf{R} y) \wedge (y \mathbf{R} z)] \Rightarrow x \mathbf{R} z.$$

Máme-li informace 1) až 4) můžeme dát symbolům jiný význam a dostáváme **model matematické struktury**.

a) $\mathbf{M}$ je množina čísel 1, 2, 3, 6 $\mathbf{M} = \{ 1, 2, 3, 6 \}$

$x \mathbf{R} y$ označíme vztah „ x je dělitelem y “ a $x, y \in \mathbf{M}$

- b) **M** je systém množin $\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}$
M = $\{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}\}$
 $x \in \mathbf{R} \ y$ označíme vztah $x \subset y$ (čteme : x je podmnožina y)
 Lehce se přesvědčíme, že informace 1) až 4) jsou pravdivé.

13. Kompetence sociální a personální. Konvergentní a divergentní slovní úlohy.

Zopakujme si pojem konvergentní a divergentní myšlení:

Konvergentní (sbíhavé) myšlení

Konvergentní myšlení se uplatňuje v úlohách s jedním správným řešením nebo v úlohách s konečným počtem správných řešení. Správná řešení vždy logicky vyplývají z daných informací v úloze. Je to tedy takové myšlení, při kterém se logicky a algoritmicky postupuje ke správnému závěru.

Úlohy založené na konvergentním myšlení formují zejména vnímání, rozlišování a poznávání věcí, analýzu a syntézu, indukci a dedukci, paměť a také schopnost aplikace – použití informací, definic a poznatků při řešení školní úlohy nebo řešení nějakého problému.

Divergentní (rozbíhavé nebo též tvůrčí) myšlení

Divergentní myšlení nabízí žákům příležitost jak objevit, jak objevit v každé situaci více než je běžné.

Divergentní myšlení se využívá v úlohách, ve kterých není z daných informací přesně známo jaké bude správné řešení. Žák musí hledat, objevovat a tvořit různé alternativní řešení. Úlohy musí doplňovat o další informace a záleží především na samotném žákovi, jaké informace si do úlohy dodá. Toto myšlení klade důraz na rozmanitost, množství a vhodnost odpovědí. Nevede k jednomu správnému řešení, ale vyžaduje produkci mnoha řešení, která vedou k originálním výsledkům.

Příklad :

Zadejme žákům 4. ročníku slovní úlohu. *V obchodě mají dva druhy kapesníků a to za 4 Kč a za 6 Kč. Kolik kterých kapesníků mohla maminka koupit, když chtěla za ně utratit přesně 50 Kč.*

Z matematického hlediska jde o řešení diofantovské rovnice $4x + 6y = 50$. Žáci 4. ročníku mohou řešit tuto úlohu zkoumáním a to v našem případě postupným dosazováním.

Když maminka koupila jeden kapesníček za 6 Kč, tak ji zbylo $50 \text{ Kč} - 6 \text{ Kč} = 44 \text{ Kč}$ a to je násobek 4 a mohla tedy ještě koupit 11 kapesníků za 4 Kč. Máme již první možné řešení. Když koupila 2 kapesníčky po 6 Kč, tak ji zbylo $50 \text{ Kč} - 12 \text{ Kč} = 38 \text{ Kč}$ a to není násobek 4. V tomto případě řešení neexistuje. Když koupila 3 kapesníčky po 6 Kč, tak ji zbylo $50 \text{ Kč} - 18 \text{ Kč} = 32 \text{ Kč}$ a to je násobek 4, mohla tedy ještě koupit 8 kapesníků po 4 Kč. Když koupila 4 kapesníčky za 6 Kč, tak ji zbylo $50 \text{ Kč} - 24 \text{ Kč} = 26 \text{ Kč}$ a to není násobek 4. V tomto případě řešení neexistuje. Když koupila 5 kapesníků za 6 Kč, tak ji zbylo $50 \text{ Kč} - 30 \text{ Kč} = 20 \text{ Kč}$ a to je násobek 4, mohla tedy ještě koupit 5 kapesníků po 4 Kč. Když koupila 6 kapesníků po 6 Kč, tak ji zbylo $50 \text{ Kč} - 36 \text{ Kč} = 14 \text{ Kč}$ a to není násobek 4. V tomto případě řešení neexistuje. Když koupila 7 kapesníků za 6 Kč, tak ji zbylo $50 \text{ Kč} - 42 \text{ Kč} = 8 \text{ Kč}$ a to je násobek 4, mohla tedy ještě koupit 2 kapesníčky po 4 Kč. Když koupila 8 kapesníků za 6 Kč, tak ji zbylo $50 \text{ Kč} - 48 \text{ Kč} = 2 \text{ Kč}$ a to není násobek 4. V tomto případě řešení neexistuje. Dále již není nutné uvažovat, neboť cena kapesníků po 6 Kč převyšuje 50 Kč.

Našli jsme čtyři řešení této úlohy.

Můžeme sestavit tabulku:

Počet kapesníků za 6 Kč	1	2	3	4	5	6	7	8
Cena kapesníků za 6 Kč	6 Kč	12 Kč	18 Kč	24 Kč	30 Kč	36 Kč	42 Kč	48 Kč
Počet kapesníků za 4 Kč	11	-	8	-	5	-	2	-
Cena kapesníků za 4 Kč	44 Kč	-	32 Kč	-	20 Kč	-	8 Kč	-

Odčítali jsme násobky 6, neboť jich je do 50 méně než násobků 4. Těž jsme mohli odčítat násobky 4.

Další možný způsob řešení je, že si žáci napíší řadu násobku 4 a řadu násobků 6 a zkusmo hledají, kdy je jejich součet roven 50.

Při tomto řešení jsme použili **konvergentního** myšlení.

Nyní využijeme **divergentního** myšlení a zadáme úlohu takto:

V obchodě mají dva druhy kapesníků a to za 4 Kč a za 6 Kč. Kolik kterých kapesníků mohla maminka koupit, když měla v peněžence 50 Kč.

Po přečtení úlohy dáme prostor žákům, aby se ptali na další podmínky slovní úlohy. Úlohu jsem zadal žákům a žáci se ptali.

Dostala maminka nějaké peníze nazpátek?

Chtěla maminka koupit kapesníčky jen za 4 Kč?

Chtěla maminka koupit kapesníčky jen za 6 Kč?

Chtěla maminka koupit oba druhy kapesníků?

Mohla si maminka koupit jen jeden kapesníček?

Mohla maminka v obchodě zanechat dluh?

Žáci zde mají velké množství řešení. Nechal jsem žáky hledat různá řešení.

Zde jsou ukázky:

Maminka koupila jeden kapesníček za 4 Kč a vrátili ji 46 Kč.

Maminka koupila jeden kapesníček za 4 Kč a jeden za 6 Kč a vrátili ji 40 Kč.

Maminka koupila 10 kapesníků za 4 Kč a jeden za 6 Kč a vrátili ji 4 Kč.

Maminka koupila 8 kapesníků za 6 Kč a vrátili ji 2 Kč.

Maminka koupila 5 kapesníků po 4 Kč a 5 kapesníků po 6 Kč a nevrátili ji žádné peníze.

Atp.

Zajímavé bylo i zjišťovat kolik žáků vymyslelo alespoň jednu úlohu, kdy nevrátili mamince žádné peníze.

14. Kompetence občanská. Dějiny matematiky a jejich využití v současnosti

V nejranějším údobí vývoje lidstva tvořily přírodovědné, technické i matematické poznatky, jež si člověk osvojil v každodenní boji s přírodou, různorodou směs. Teprve, když se nakupilo dost poznatků ze stejného oboru, počaly se vyčleňovat jednotlivé nauky. Tak se také poznatky o kvantitě o prostorových formách poněkud seskupovaly v zárodek matematické vědy. Právě jako všechny ostatní vědy vznikla matematika z praktických potřeb lidí, jako z měření ploch pozemků a objemů nádob, z počítání času a z mechaniky.

V dějinách matematiky můžeme rozeznat **čtyři vývojová období**:

První období sahá od úsvitu kultury asi do 6. století před naším letopočtem a vyznačuje se empirickým způsobem získávání jednotlivých matematických poznatků, které netvořily jednotný systém. (Empirie – zkušenost)

Člověk kdysi zřejmě využíval primitivní aritmetiku. Zjišťoval-li například počet ovcí, které ráno vyháněl na pastvu, položil za každou ovci na hromádku kamínek. Večer pomocí kamínku kontroloval, zda se všechny ovce vrátily. Za každou vřátivší se ovci opět jeden kamínek odebral. Aniž uměl kamínky počítat, tvořil vlastně vzájemně jednoznačné přiřazení mezi dvěma množinami - mezi stádem ovcí a hromadou kamínků. Určoval, zda množiny jsou navzájem ekvivalentní. Znal metodu, jejíž pomocí zjistil, zda má všechny ovce, tak jako dítě dnes v mateřské škole dokáže porovnat početnost dvou množin bez „počítání“. Jiný způsob, jak člověk zjišťoval počet věcí, bylo dělení zářezů nebo vrubů do hole nebo do kosti. Je pro nás potěšitelné, že nejstarší doklad na světě o tomto způsobu číselného záznamu byl nalezen u nás v roce 1937 prof. Absolonom ve Věstonicích na Moravě. Je to záznam asi 30 000 let starý. Je to asi 18 cm dlouhá kost mladého vlka, na níž je vyřiznuto 55 hlubokých zářezů, z nichž prvních 25 je uspořádáno do skupin po 5. Této kosti se říká „vrubovka“.

Číselné zprávy se uchovávaly i jinými způsoby: uzlíky, uzly na provaze, oblázky nebo lasturami, většinou seřazenými do skupin po pěti. Při tomto způsobu numerace se užíval jeden číselný znak – čárka, zářez, uzel a podobně, který značil číslo 1. Opakováním čárky, zářezu nebo vrubu se dalo zapsat číslo větší než 1. Při větších číslech se čárky sdružovaly do skupin po pěti, čímž se dosáhlo toho, že zápis byl přehlednější.

Počítání na prstech, po pěti a po deseti, se vyvinulo až na jistém stupni společenského vývoje. Počet deseti prstů na ruce dal základ dnešnímu způsobu zapisování čísel. Jeden z nejstarších zápisů čísel je numerace Egyptanů. Byl užíván již před 5 000 lety. Staří Egyptané tvořili skupinu znaků po deseti. V této numeraci nezáleželo na tom, v jakém pořadí byly znaky uspořádány. Šlo a tak zvanou nepoziční číselnou soustavu-nezáleželo na pozici znaku. Egyptané nepotřebovali znak pro nulu. Znak pro jedničku představoval měřicí tyč. Znak pro desítku podkovu. Znak pro stovku stočený provaz nebo svinutý list palmy. Znak pro tisíc lotosový květ, symbol řeky Nilu, kterému Egypt vděčí za svůj život. Znakem deseti tisíc byl prst. Znakem pro sto tisíc pulec, protože v Nilu bylo po záplavách tisíce pulců. Znak pro milion představoval žasnoucího muže.

////////// = 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 = C

Číslo 234 Egyptané zapsali takto: C C 0 0 0 //

V historii se lze setkat i s dalšími zápisy. U některých i záleželo na pozici znaků a proto šlo o poziční zápis. Náš dnešní zápis arabskými číslicemi (často se uvádí indickými číslicemi) je poziční, neboť záleží na pozici znaku. Numerace Mayů byla založena na základu 20. Základ 20 vznikl patrně proto, že použili všechny prsty na ruce a nohou. Bylo teplo, tak asi chodili Mayové bosí.

Symbole arabských (resp. indických) číslic byly pravděpodobně odvozeny od rychlého přepisu počtu čárek:

.....1	⎓5
= ≥2	
≡ ≧3	⎓6
+ 44	

Jedním s dalších zápisů přirozených čísel je římský zápis. Protože se s římskými číslicemi setkáváme i v našem denním životě, je vhodné s nimi seznámit i žáky ve škole.

Římská čísla

Pravidla tvorby římských čísel

Při převodu "našich" čísel na římská čísla v podstatě **neexistuje žádná směrodatná norma**. Rozhodující byly vesměs obecně uznávané zvyklosti.

Základní pravidla

1. Římská čísla se zapisují kombinací znaků **I, V, X, L, C, D, M**.
2. Římská čísla se skládají psaním **od znaků pro nejvyšší hodnoty k nejnižším** (MDL = 1550). Většinou se kombinují **nejvýše 3 stejné římské číslice** (XXX = 30, III = 3). Někdy mohou být kombinovány i čtyři stejné římské číslice (IIII = 4 bylo běžné na starých slunečních hodinách).
3. **Menší římská číslice před větší znamená odečet** (IV = 4). Takto se odečítá jen jediná římská číslice.
4. **Pro odčítání** podle bodu 3 se používají pouze římské číslice **I, X, C**; v matematickém kontextu zcela výjimečně také M. Nikdy nebyly používány římské číslice V, L, D (správně: XC = LXXXX = 90, MCM = 1900; nesprávně: VC = 95).
5. Číslice **I se pro odečítání většinou užívá jen před V, X**. Není tedy správně MIM pro 1999 (lépe je MCMXCVIII nebo MCMXCIX).

Znaky pro římská čísla

Tabulka převodu *římských čísel*

Římsky	Arabsky	Poznámka
I	1	
V	5	
X	10	
L	50	
C	100	Centum
D	500	
M	1000	Mille

Převod římských čísel na arabská čísla

Pokud je větší římská číslice následovaná menší nebo stejnou, tak se hodnoty sčítají:

CII = 100 + 1 + 1 = 102

Když menší římská číslice předchází větší, tak se menší číslo odečítá:

$$IX = -1 + 10 = 10 - 1 = 9$$

$$MCM = 1000 + (-100) + 1000 = 1000 + (1000 - 100) = 1900$$

Převod arabských čísel na římské

Pokud se v čísle **nevyskytují číslice 4 a/nebo 9** je situace jednoduchá. Číslo se rozepíše na římské tisíce, (pětistovky,) stovky, (padesátky,) desítky a jednotky (tj. od nejvyšších po nejnižší):

$$1763 = 1000 + 700 + 60 + 3 = 1000 + 500 + 100 + 100 + 50 + 10 + 1 + 1 + 1 = MDCCLXIII$$

Pokud se v čísle **vyskytují 4 a/nebo 9** je nutné uplatnit pravidlo o odečítání (např. $900 = 1000 - 100 = M - C = CM$). Pro odečet se používají římské číslice I, X, C:

$$1940 = 1000 + 900 + 40 = M + CM + XL = MCMXL$$

Velká římská čísla

Největší římská číslice bylo **M** (1000). Největší číslo, které se vyjadřovalo pomocí římských čísel bylo **3999**. Pro vyjádření vyšších čísel se používaly různé způsoby, které ale nebyly používány jednotně a nenašly větší rozšíření do současnosti.

Někdy používali vodorovnou čárku (tzv. *vinculum*) nad číslem, což značilo vynásobení napsaného čísla tisícem:

$$\overline{VIII} = 8000$$

Dalším způsobem zápisu bylo uvedení menšího čísla před větším a jejich vynásobení. Pro zápis se někdy používalo oddělení tečkou nebo zápis s horním indexem:

$$VM \text{ nebo } V.M \text{ nebo } V^M = 5000$$

$$VIIC \text{ nebo } VII.C \text{ nebo } VII^C = 700$$

Původ vzniku římských čísel

I
Římská čísla vznikla přirozenou cestou. Římané počítali na prstech. Číslo jako 1, 2 a 3 a jím odpovídající znaky I, II a III graficky vyjadřují jednotlivé prsty.

V a X

Také tato dvě římská čísla mají svůj původ v lidské ruce:



Římská číslice V (5) je vyjádřením dlaně s pěti prsty - V tvoří tvar mezi palcem a malíčkem



Římská číslice X (10) jsou dvě dlaně u sebe (10 prstů).

L a C

Latinsky sto je *centum*. Odtud C. Padesát je polovina ze stovky. L tedy vzniklo "rozpůlením" znaku pro 100 (C):



Římská číslice L (50) vznikla rozpůlením C (100 = lat. *centum*)

D a M

Tisíc je latinsky *mille* (odtud M pro 1000). Znak D pro 500 vznikl opět grafickým "půlením" znaku M, tentokrát svisle. Vznikl tak znak podobný písmenu D:



Římská číslice D (500) vznikla rozpůlením M (1000 = lat. *mille*)

Chronogramy

Jedná se o latinské nápisy s několika zvýrazněnými velkými písmeny, které je třeba mechanicky sečíst bez ohledu na uvedená pravidla. Součet dá letopočet zveřejnění nápisu. Např. nápis "CLangere sepVLtos VoX Mea CVncta petIt" na zvonu říká "Můj hlas touží jen vyzvánět mrtvým" a zároveň vyjadřuje letopočet $C+L+V+L+V+X+M+C+V+C+I = 1426$.

Microsoft Excel a římská čísla

Nejrozšířenější tabulkový procesor Microsoft Excel má v sobě zabudovanou funkci pro převod na římské číslice:

=ROMAN(cislo;forma)

Funkce převede číslo vyjádřené pomocí arabských ("našich") číslic na římské číslice ve formátu textu. Další informace najdete např. v nápovědě k Excelu.

Metodická poznámka: Jednotlivé znaky pro římská čísla si děti zapamatují říkankou
Ivan **V**ezl **X**enii **L**esní **C**estou **D**o **M**ěsta.

Nejstarší známou učebnici z tohoto období je Ahmesova egyptská početnice ze 17. století před naším letopočtem. Ahmes byl královský písař a matematik, který žil na dvoře faraóna Amenemhata III. V roce 1853 objevil Angličan Rhind v blízkosti chrámu Ramsese II. v Thébách jeden Ahmesův papyrus. Papyrus má tvar pásku širokého 33 cm a dlouhého více než 5 metrů. Papyrus obsahuje 84 problémů a jejich řešení.

Druhé období, které trvá od 6. století před naším letopočtem do konce 16. století našeho letopočtu lze charakterizovat jako **období statické matematiky**. Toto období lze rozdělit na dvě etapy: a) vytvoření matematiky jako vědy v Řecku,

b) rozvoj matematiky ve středověku do konce 16. století.

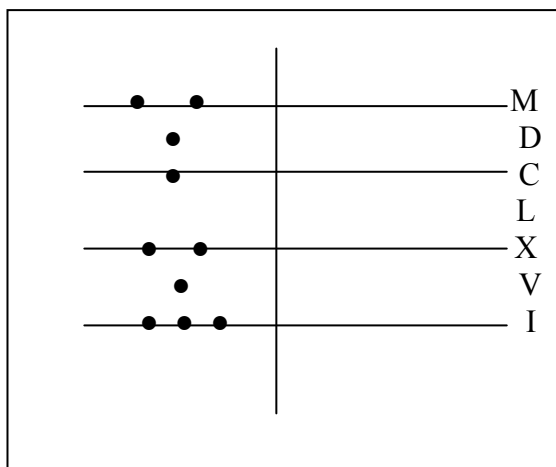
a) Podstatným znakem řecké matematiky je, že matematické poznatky nezískává už jen experimentální cestou, ale stále výrazněji se uplatňuje jejich logické zdůvodňování. Z **empirické nauky**, čerpající své poznatky ze zkušenosti a z pozorování, se matematika mění v **nauku deduktivní**. Největší podíl na tom měli matematikové jako byl Thales z Milétu (?624-?548), Pýthagorás ze Samu (?580-?500), Eukleidés (?365 - ?280), Archimédés ze Syrakús (?287-?212), Apollonios z Pergy (?260-?170), Heron (mezi ?150 až 250 n.l.) Diofantos (kolem 250 n.l.), Hypatia Alexandrijská (370-415).

Nejslavnějším dílem tohoto období jsou Eukleidovy „**Základy**“ (řecky **Stoicheia**, latinsky **Elementa**). Základy jsou prvním výkladem matematiky spojujícím a transformujícím starší matematické teoretické výsledky v organický a systematicky deduktivně budovaný celek. Staly se vzorem pro logickou výstavbu jakékoliv teorie a dodnes ovlivňují školskou matematiku a jsou po bibli nejvíce vydávanou a studovanou knihou všech dob. Ve třinácti knihách jsou systematicky uspořádány všechny tehdy známé matematické poznatky s přesnými důkazy. Staly se učebnicí matematiky na dvě tisíciletí.

b) Mnoho matematicky cenného vytvořila indická matematika, jejíž dědictví převzala v 8. století našeho letopočtu spolu s řeckou matematikou arabská kulturní oblast, která se tak stala zprostředkovatelkou mezi východem a západem. K nejvýznamnějším arabským matematikům patřil Abú Abdalláh Muhammad ibn Músá al- Chwárizmí (asi 780 – 850). Žil v Bagdádu v t.zv. Domě moudrosti, významném vědeckém centru s knihovnou a observatoří. Kromě matematiky se zabýval astronomií, geografií a chronologií. Zachovaly se opisy jeho pěti spisů, ostatní díla byla ztracena. Jeho aritmetický traktát známý v latinské verzi *De numero indorum* popisuje „indické číslice“, vykládá desítkovou poziční soustavu a popisuje číselné algoritmy základních početních operací, prováděné právě v desítkové soustavě. Text začíná slovy „*Algorismi dixit*“ (Algorizmi řekl). Algorizmi je polatinštěné jméno autora. Pro přesně popsany početní postup se později začal užívat termín algoritmus, to znamená, že se postupuje podle pravidel, které stanovil al-Chwárizmí. Název algebra se odvozuje od jeho spisu *Kitáb muchtasar min chisáb al-džabr wa-l-muqabály* (Ve volném překladu „*Kniha o rovnicích*“).

Západní Evropa si osvojovala v době od 12. do 15. století starou řeckou a indickou matematiku prostřednictvím překladů z řečtiny a arabštiny do latiny, která se stala mezinárodním vědeckým jazykem. Významným spísem této doby je kniha „*Liber abaci*“ (Kniha o abaku) od italského matematika Leonarda Pisánského, zvaného Fibonacci (1170-1250).

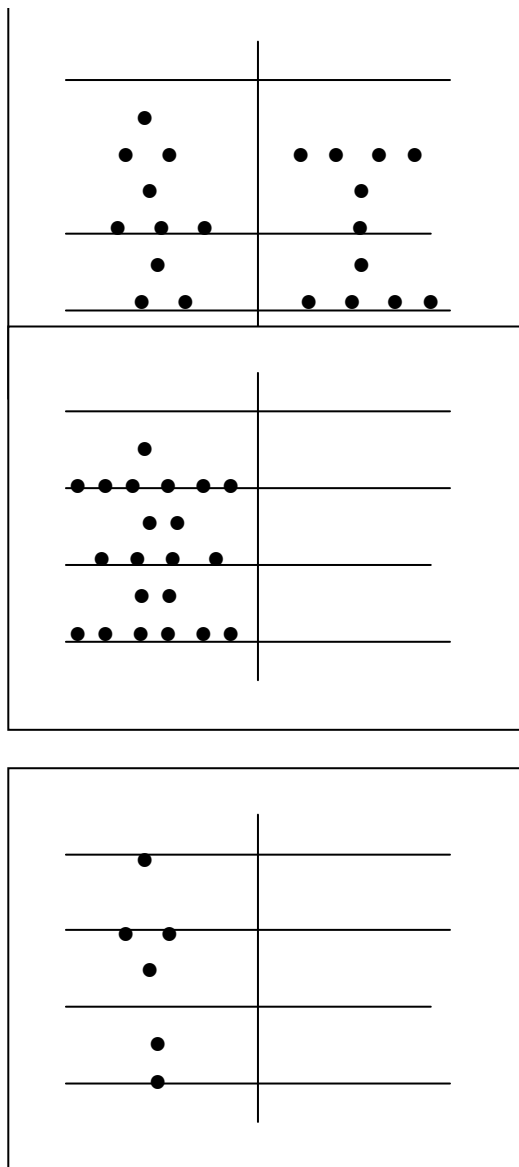
Abakus měl tvar desky ze dřeva nebo z kamene a počítalo se na něm ve vodorovné poloze. Na abaku se počítalo pomocí početních kamenů, které se nazývaly kalkuly. Číslo se zapisovalo pomocí římských čísel. Kalkuly se kladly na linky popsané příslušnými číselnými znaky. Kalkuly znamenající hodnoty V, L a D, čili 5, 50, 500 se kladly mezi linky (viz obrázek)



Zápis čísla
MMDCXXVIII
(2628)

Sčítání na abaku se provádělo ve třech krocích:

- 1) Vyznačily se jednotlivé sčítance na levém a pravém poli abaku
 - 2) Sjednotily se kaménky znázorňující oba sčítance, přemístěním pravého sčítance k levému
 - 3) Směnily se kaménky nižších hodnot za kaménky vyšších hodnot
- Například: Sečtěte pomocí abaku DCCLXXXVII a CCCCLXVIII.



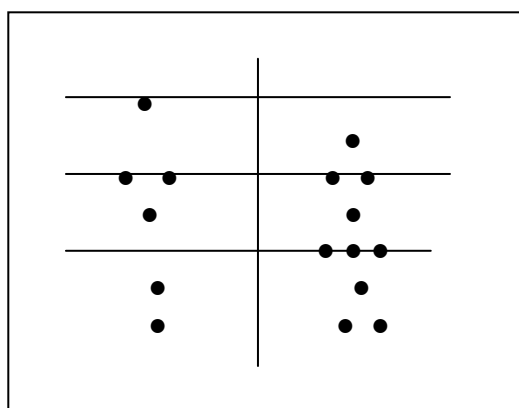
Zkouška: DCCLXXXVII a CCCCLXVIII = MCCLVI
 787 + 469 = 1 256

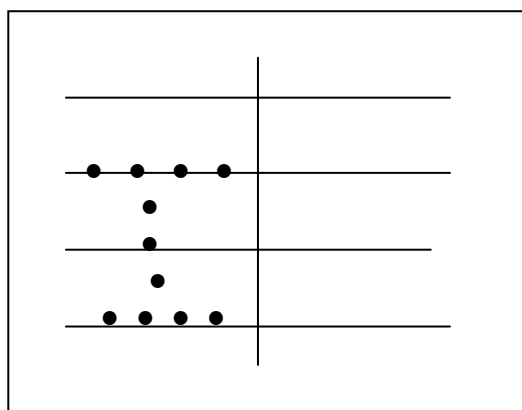
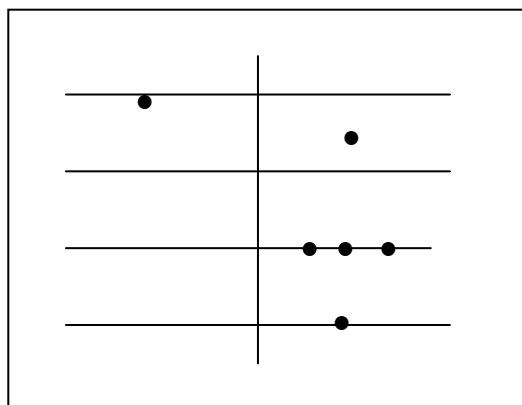
Odčítání na abaku se provádělo ve třech krocích:

- 1) Vyznačily se menšence a menšitel na levém a pravém poli abaku
- 2) Od menšence i od menšitele odebíráme kaménky stejných hodnot (požíváme přitom vlastně pravidla, že rozdíl se nezmění, zmenšíme-li menšence i menšitele o stejné číslo)
- 3) Rozměníme na levém poli abaku kaménky vyšších hodnot za kaménky nižších hodnot, tak, abychom mohli splnit bod b).

Odebíráme a rozměňujeme tak dlouho, až na pravém poli abaku není žádný početní kamének.

Například: Odečtete pomocí abaku MCCLVI a DCCLXXXVII





Zkouška: MCCLVI - DCCLXXXVII = CCCCLXVIII
 1256 - 787 = 469

Na abaku se nenásobilo, ani nedělilo.

Pro násobení byly další zajímavé způsoby násobení. Zajímavý byl algoritmus, který vznikl v Indii a používaly jej vlašští kupci v 15. století a nazývali jej „per gelosia“ (žaluziový nebo mřížový).

Například chceme vynásobit 74 x 68.

Zapíšeme do schématu, výsledky násobení se píší celé do konkrétních čtverců

	7	4	
5	4	2	6
0	5	3	8
	3	2	



$$74 \times 68 = 5\,032$$

Například : 9 453 x 769

		9	4	5	3	
7	5	6	2	3	2	7
2	5	4	2	3	1	6
6	8	1	3	4	2	9
	9	3	5	7		

$$9\,453 \times 769 = 7\,269\,357$$

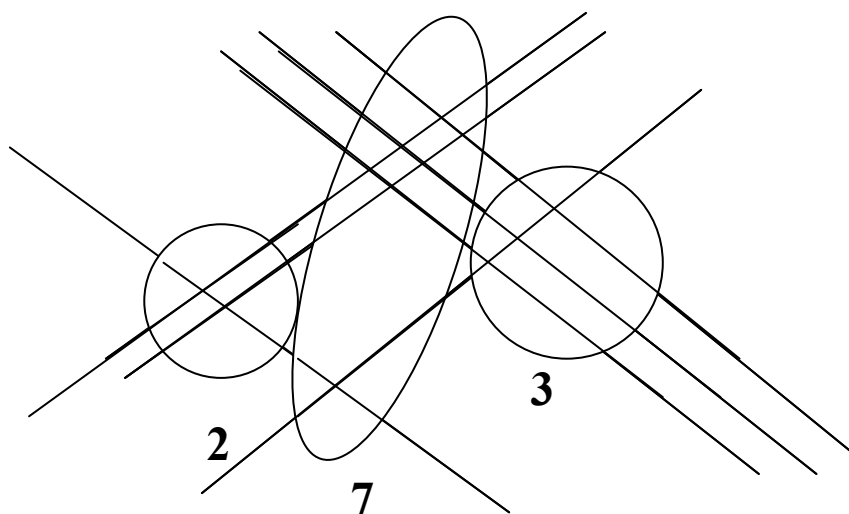
Násobení pomocí sčítání:

13 x 873 = ?	1873	873
	21 746	<u>873</u>
	43 492	1 746
	86 984	<u>1 746</u>
	1613 968	3 492
		<u>3 492</u>
		6 984
		<u>6 984</u>
		13 968

$$13 \times 873 = 873 + 3\,492 + 6\,984 = 11\,349$$

Velmi zajímavé je i násobení pomocí geometrické vizualizace:

Máme násobit **21 x 13**



Součin $21 \times 13 = 273$ (Jde o počet průsečíků v jednotlivých oválech, pokud je počet průsečíků dvojmístné číslo, tak se počet desítek přičítá k počtu průsečíků vlevo).

K rychlejšímu šíření matematických myšlenek přispěl vynález knihtisku v roce 1436 Johannem Gutenbergem.

Podrobnosti najdete na Internetu : <http://www.glumbert.com/media/multiply>

V **třetím období** od začátku 17. století do 19. století proniká do matematického myšlení **dynamické pojetí**. Rozvoj výrobních sil a bouřlivý vzestup přírodních věd způsobily, že se hlavním předmětem matematického vyšetřování staly závislosti mezi veličinami, tedy pojem funkce. První krok k tomu učinil francouzský matematik a filosof René Descartes (1596 – 1650) (Prý se zúčastnil jako dobrovolník bitvy na Bílé hoře, jako důstojník císařských vojsk a prý tu byl i zraněn, při probírání z bezvědomí prý pronesl tuto větu: „*Ego dubito, ergo cogito, ergo cogito, ergo sum*“, česky „Pochybuji, tedy myslím, myslím, tedy jsem.“) vytvořením analytické geometrie a vlastně objevem proměnné. Jelikož psal latinsky, tak používal i latinského přepisu svého jména – Cartesius, podle něhož se dnes nazývá jeho soustava pravoúhlých souřadnic kartézskými souřadnicemi.

Brzo byl i objeven infinitesimální počet (to je vlastně využití velmi malé proměnné) k němuž dospěli nezávisle na sobě anglický fyzik, matematik a filozof Isaac Newton (1642 – 1727) a německý matematik Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). Tím matematika přešla od jednotlivých okamžiků existence věcí (fotografie) ke studiu jejich změn a vývoje (filmový záběr). V Newtonovi a Leibnizovi díle pokračovala řada slavných matematiků např. švýcarský matematik, fyzik a astronom Leonhard Euler (1707-1783). Na rozvoj technických věd měla velký vliv deskriptivní geometrie, jejímž zakladatelem byl francouzský matematik Gaspard Monge (1746 – 1818). (je zajímavé, že byl po výbuchu francouzské revoluce ministrem námořnictva a kolonií (1792-1793), byl stoupencem Napoleona I. Bonaparta, roku 1799 byl jmenován senátorem, 1806 hrabětem z Pelusie. Po restauraci Bourbonů v červenci 1816 byl zbaven všech hodností a úřadů.)

Čtvrté období od první poloviny 19. století do současnosti se vyznačuje nebývale vysokým stupněm abstrakce a generalizace. V úsilí o zpřesnění základů matematiky vynikl český matematik a logik Bernard Bolzano (1781 – 1848). (Narodil a zemřel v Praze, byl synem italského obchodníka a dívky z německé rodiny, studoval na pražské univerzitě matematiku, stal se knězem a roku 1805 univerzitním učitelem náboženství. Kromě mnoha oblastí matematiky se zabýval teorií nekonečna.). Matematika se stává vědou o velmi obecných pojmech a vztazích, jejichž zvláštními případy jsou vztahy veličin a čísel. Zvratem v geometrii byl objev neeukleidovské geometrie, k níž dospěli nezávisle na sobě ruský matematik Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792 – 1856), maďarský matematik János Bolyai (1802 – 1860) a německý matematik, fyzik, geofyzik a astronom Karl Friedrich Gauss (1777-1855). (O Gaussovi se vykládá, že když mu bylo 9 let, tak pan učitel si potřeboval jít něco zařídit a uložil dětem sečíst čísla od 1 do 100, malý Gauss se okamžitě přihlásil a řekl, že součet je 5 050, pan učitel se divil, jak tak rychle mohl vše sečíst, Gauss mu řekl: „Pane učiteli součet čísla 100 + 1 je 101, součet čísel 99 + 2 je 101, atd.. takových součtů je 50 a 50 x 101 = 5 050.“) Matematické úvahy se rozšířily na vícerozměrné prostory. Do nejrůznějších oborů matematiky proniká teorie množin vybudovaná německým matematikem Georgem Ferdinandem Ludwigem Philippem Cantorem (1845 – 1918). (Narodil se v ruském Sankt Petěrburgu, studoval matematiku v Zurichu, Göttingenu a Berlíně. Zemřel v Halle). O českou množinovou terminologii se zasloužil český matematik Matyáš Lerch (1860 – 1922) (Zavedl český termín množina, byl docentem pražské techniky, později řádným profesorem na univerzitě ve švýcarském Fribourgu a v roce 1920 se stal prvním profesorem matematiky na Masarykově univerzitě v Brně. Zemřel o prázdninách 1922 v Sušici na zápal plic). Vzniká

mnoho nových disciplín, jako matematická logika, k níž základy položil anglický matematik George Boole (1815-1864), kybernetika vybudovaná americkým matematikem Norbertem Wienerem (1894 – 1964) (Jeho stěžejním dílem v oblasti kybernetiky je „Kybernetika neboli řízení a přenos informací v živém organismu a ve stroji“, které bylo vydáno v roce 1948 v Paříži.).

Mnohé matematické disciplíny mají stejnou vnitřní strukturu, společnou abstraktní strukturu a matematika se tak stává vědou o strukturách nejrůznějšího druhu. Na tomto principu se snaží sjednotit všechnu matematiku skupina francouzských matematiků, která pod společným pseudonymem „Bourbaki“ vydává od roku 1939 monumentální dílo „Základy matematiky“.

Moderní matematika řeší stále větší množství nově se vynořujících praktických problémů, proniká do většího počtu oborů lidské činnosti: do ekonomie, medicíny, lingvistiky, vojenství, sociologie atd. Obrazně se hovoří o **matematické invazi** nebo matematizaci života moderní společnosti.

Pro jednotlivé období vývoje matematiky se ustálily tyto názvy: První období se nazývá **období předvědeckým**, druhé **obdobím elementární matematiky**, třetí **obdobím klasické vyšší matematiky** a čtvrté **obdobím moderní matematiky**.

Literatura:

Cihlár J., Melichar J., Zelenka M.: Matematika pro čtvrtou třídu, 2. díl, Fortuna Praha, 1995

Koval V.: Kamarádi čísla, SPN Praha, 1973

Folta J.: Svět čísel, SPN Praha, 1973

Balada F.: Z dějin elementární matematiky, SPN Praha, 1960

Encyklopedická edice, listy, Matematici, Encyklopedický dům, Praha, 1997

Internet:

<http://www.glumbert.com/media/multiply>

<http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/BiogIndex.html>

Matematický machiavelismus

Niccolo Machiavelli (1469 - 1527) byl florentský spisovatel, politik a filozof. Jak již bylo zvykem za renesance se dalo vynikat v mnoha oborech. Jedním z jeho nejznámějších děl je Vladař (Il Principe), ve kterém uvažuje mj. o sjednocení Itálie a o prostředcích jak toho dosáhnout. Odtud také pochází výraz machiavelismus-označení pro politické kroky, při nichž účel světí prostředky, a přeneseně pak pro manipulaci s lidmi.

Časopis Chip (viz literatura) uvádí velice vtipné postřehy, jak pomocí matematiky manipulovat s davem, ať už skrytě a nepozorovaně, či zcela veřejně a na nejvyšších postech.

Podívejme se tedy do statistiky, vědu, která vždy byla potřebná státu, o čemž svědčí i její název.

Jedna moudrost praví, že existuje několik druhů lži- malá lež, větší lež, největší lež a statistika. Ve státě byly sloupce čísel, které měly výpovědní hodnotu blízkou nule, zavedlo se několik vzorců a odborných výrazů a vznikla samostatná matematická disciplína-statistika. Věda je to exaktní, tedy její závěry považujeme za nenapadnutelné a samozřejmě za pravdivé. Je však nutno mít na paměti, že stejně jako vše ostatní, co člověk vytvořil pro své potřeby, tedy i statistika je pouze prostředek. Prostředek, který je lidmi využíván a stejně jako vše ostatní může být i zneužíván pro potřeby těch, kteří mu rozumí a dokonale znají všechny aspekty a možnosti, které skýtá.

Asi nejznámějším pojmem z oblasti statistiky je průměr. Obvykle jde o průměr aritmetický. Zde vždy záleží jaký budeme volit statistický soubor. Zda si za statistický soubor zvolíme dva občany, kde jeden snědl kuře a druhý občan byl hladový, pak oba občané se najedli v průměru půlkou kuřete. Když budu zjišťovat průměrný plat železničářů, zda si do statistického souboru zahrnu i pracovníky různých ředitelství železnic a příslušného ministerstva. V nedávné statistice jsem četl, že průměrný plat na vysokých školách je 16 000

korun, nevím kdo byl do statistického souboru zařazen. Je to plat jen učitelů, patří do statistického souboru provozní zaměstnanci?

Další známý pojem ze statistiky je medián a modus. Samozřejmě i procenta. Podívejme se na příklad z Chipu.

Představme si společnost XYZ, jejichž 500 000 akcií je rozděleno takto: Majoritní vlastník má 378 900 akcií. Deset menších vlastníků má po 10 000 akcií. Sto lidí má po 100 akciích. Tisíc lidí vlastní po 10 akciích a tisíc sto lidí získalo v kupónové privatizaci po 1 akcii. O firmě XYZ lze teď zcela klidně a pravdivě tvrdit, že typický akcionář má 10 akcií (medián), typický akcionář má jen jednu akcii (modus), více než 90 procent akcionářů vlastní méně než 20 akcií. Stejně tak, více než 50 procent akcionářů má méně než 100 akcií nebo, že téměř 95 procent akcionářů vlastní nejvýše 10 akcií. Záleží jen na tom jakých chceme dosáhnout výsledků. Žádná z těchto výpovědí vlastně nevypovídá nic o vlastnické struktuře podniků, i když se tak tváří. Majoritní vlastník, který celou společnost řídí se nám v záplavě pravdivých a přesných údajů zcela ztratil. Pokračujme v procentech. Vychází vysoká inflace? Nebudeme tedy do základu počítat uvolňování cen nájemného a energií a nazveme to třeba "čistá inflace" a výsledek hned vypadá lépe.

Velmi často se ukazuje, že například výroba něčeho vzrostla o 300 procent, tedy na čtyřnásobek, zatím co v zemi s rozvinutým průmyslem pouze o 3 procenta. No když vyrábím jedno auto a pak vyrobím čtyři, tak výroba vzrostla o 300 procent, když však vyrábím 100 aut a pak vyrobím 103 auta, tak výroba vzrostla jen o 3 procenta. V obou případech vzrostla výroba o 3 auta. Ostatně hovořit o procentech a neuvádět základ je tradiční propagandistický manévr.

Podobná manipulace je i dnes, podívejme na rok 1994, kdy byly již problémy s financováním zdravotnictví. Kdosi Významný sdělil v televizi, no samozřejmě, že chybí peníze, když počet zdravotnických zařízení vzrostl ve srovnání s rokem 1989 o plných 900 procent. Znamená to, že se zdesateronásobil počet lékařů, počet sester, ale vůbec ne, sester spíše ubylo. Prostě Okresní ústavy národního zdraví (známé jako OÚNZ) se rozdělily na řadu menších zařízení. Například všichni zubaři v našem městě se zařídili jako soukromníci. Vlastně stejný dům, stejní lidé, vlastně ne, protože ubylo administrativa, ale počet zdravotnických zařízení vzrostl, vždyť každý zubař má své vlastní IČO.

Dalším problémem jsou absolutní čísla. Například se uvedlo, že vláda vynaloží na zvýšení důchodů 2 miliardy korun. Vypadá to ohromně, ale při jednom miliónu důchodců a 12 měsících v roce to představuje zvýšení v průměru o necelých 170 korun měsíčně.

Zprávy jsou to hezké, ale vždy je třeba se nad nimi zamyslet.

Snad ještě jeden příklad z novin, kde je uvedeno: Pachatelé byli za svoji trestnou činnost odsouzeni k úhrnnému trestu celkem na 115 let. Není řečeno kolik jich bylo, jak byl trest rozdělen, za co, zda je to trest mírný nebo tvrdý. Zpráva neříká vlastně nic, ale zní hezky jak jsme s kriminalitou zatočili.

Podívejme se na závěr na počítač, někdo moudrý řekl: Počítač je úžasná věc. Pomáhá mi mnohem rychleji dělat věci, které bych býval dělat nemusel, nemít počítač. Lze rozeznávat dva přístupy k počítači a to bezmeznou důvěru v počítačovou přesnost a neovlivnitelnost a to, že na počítač lze svést jakoukoliv chybu. Jako statistika, tak i počítač je pouze nástroj. Nedokáže zázraky, záleží zase na nás na lidech, jak jej použijeme. Existuje dokonce i speciální pojem pro chybnou aplikaci a to GIGO - z anglického "garbage in, garbage out", česky smetí dovnitř, smetí ven. Často slyšíme oblíbený argument "Je to tak v počítači...", ale, že nastoupil chybný lidský faktor, nechce nikdo přiznat.

V předmětu statistika mne jde tímto tématem nejen o stránku vzdělávací, ale i o stránku výchovnou. K čemu by nám byly některé znalosti, když se dají zneužít.

Literatura: Virius Miroslav: Machiavelli by záviděl, In Chip 11/98 (str. 69-72), 12/98 (str.38-42)

15. Kompetence občanská. Environmentální výchova, výchova k myšlení v evropských a globálních souvislostech

V **Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání** je uvedeno průřezové téma **Environmentální výchova**. Je zde uvedeno, že *environmentální výchova vede jedince k pochopení komplexnosti a složitosti vztahů člověka k životnímu prostředí, tj. k pochopení nezbytnosti postupného přechodu k udržitelnému rozvoji společnosti a k poznání významu odpovědnosti za jednání společnosti a každého jedince.*

Environmentální výchova umožňuje sledovat a uvědomovat si vyvíjející se vztahy mezi člověkem a prostředím při přímém poznávání aktuálních hledisek ekologických, ekonomických, vědeckotechnických, politických a občanských, hledisek časových (vztahů k budoucnosti) i prostorových (souvislosti mezi lokálními, regionálními a globálními problémy), i možnosti různých variant řešení problémů. Vede žáky k aktivní účasti na ochraně a utváření prostředí a ovlivňuje v zájmu udržitelnosti rozvoje lidské civilizace životní styl a hodnotovou orientaci žáků.

Učitel musí být účastníkem děje, by mohl úspěšně působit v dané dějové oblasti. Má-li vést žáka k environmentální výchově ve vzdělávací oblasti matematika a její aplikace musí sám hledat cesty a oblasti co vše do environmentální výchovy s integrací s matematikou a jejími aplikacemi patří.

Učitelé sami vytváří slovní úlohy, zábavné úlohy a projekty na environmentální výchovu.

Nejdříve slovní úlohy :

Třídění odpadu z domácnosti:

Ivan pečlivě třídí odpad. Ivan vhodil do kontejneru na sklo 3 lahve z barevného skla a 2 lahve z bílého skla. Do kontejneru na plast vhodil 4 plastové lahve.

- a) Kolik vyhodil Ivan všech skleněných lahví?
- b) Kolik lahví celkem Ivan vyhodil?
- c) Jakou má barvu kontejner na sklo?
- d) Jakou má barvu kontejner na plasty?
- e) Proč se třídí odpad ?

Marek se dočetl, že 50 kg sběrového papíru může ve výrobě papíru nahradit jeden strom. Rozhodl se, že se pokusí každý měsíc alespoň jeden strom zachránit. Tento měsíc má k odevzdání tři balíky papíru. Jeden váží 21 kg, druhý 16 kg, třetí 19 kg.

- a) Podařilo se mu shromáždit dost papíru a zachránil aspoň jeden strom?
- b) Také zachraňuješ stromy? Nakresli obrázek stromu.

V novinách byla tato zpráva: „Přesně 380 kilogramů alobalu z obalů potravin nasbírali domažlické děti ve 13. ročníku soutěže o největší alobalovou kouli. Podařilo se jim o 20 kilogramů překonat loňský výsledek.“

- a) Kolik kilogramů alobalu nabírali loni ?
- b) Sbíráš alobal nebo jej vyhazuješ do netříděného odpadu ?
- c) Proč je dobré sbírat alobal ?

Znečišťování našeho okolí:

Ivan měl 8 žvýkaček, 3 vyžvýkal.

- a) Kolik žvýkaček Ivanovi zbylo ?
- b) Kam se vyhazují použité žvýkačky ?

Občané města Litoměřice platí za osobu za provoz systému shromažďování, sběru, přepravy, třídění, využívání a odstraňování komunálního odpadu 498 korun ročně.

- a) Kolik zaplatí v Litoměřicích čtyřčlenná rodina ?
- b) Kolik by zaplatila vaše rodina, když byste žili v Litoměřicích ?

Na louce u jihočeské vesnice, kde se o víkendu konala technopárty, se v pondělí sešlo 84 příznivců techna, kteří po sobě přijeli uklidit odpadky. Louka má 3 hektary.

- a) Kolik m² musí uklidit každý z nich, aby byla celá louka uklizena ?
- b) Počet účastníků technopárty byl 4 200 osob. 1/100 je jedno procent. Kolik setin (procent) přijelo z celkového počtu účastníků uklízet ?

Péče o zvířata:

Adam koupil pro jejich kocoura Macka celkem 7 pytlíků kompletního krmiva pro kočky značky Kitekat po 10 Kč a 8 pytlíků kompletního krmiva značky Dein Bestes (čti „dajn bestes“) po 8 Kč za kus.

- a) Kolik korun zaplatil celkem za Kitekat ?
- b) Kolik korun zaplatil celkem za Dein Bestes ?
- c) Kolik korun zaplatil celkem ?
- d) Kocour sežere za den dva pytlíky. Na kolik dní kocourovi stačí potrava ?
- e) Máš doma nějaké domácí zvíře. Čím zvíře krmíš ?

3.B byla na výletě v lesoparku, žáci se rozhodli, že adoptují pelikána. Adopce spočívá v tom, že vybírají peníze, za které potom lesopark koupí krmení, očkování a čištění adoptovaného zvířete. Na chov pelikána je potřeba 260 Kč měsíčně.

- a) Kolik musí každý z 20 žáků našetřit do třídního fondu, aby se mohli o pelikána jeden rok starat a každý žák přispěl stejnou částkou ?
- b) Adoptovali jste někdy nějaké zvířátko ?

Šetření benzínu:

Pan Bystrý jezdí každý všední den do práce autem. Cesta ho autem stojí denně 60 Kč. Při vyhlášení dne „Den bez aut“ jel do práce vlakem. Cesta ho stála o 20 Kč méně než když jel autem.

- a) Kolik pan Bystrý tento den zaplatil za jízdné ?
- b) Kolik korun by ušetřil za pracovní týden, když by jezdil vlakem?
- c) Dáváš přednost jízdě autem nebo autobusem?

Rybníky, jezera, přehrady :

Nejznámější české rybníky mají tyto rozlohy v hektarech:

Rybník	Rozloha v ha
Svět	201
Rožmberk	490
Dvořiště	337
Komorník	40
Vajgar	49
Jordán	50
Bezdrav	450

- a) Seřaď rybníky dle jejich rozlohy v hektarech od největší po nejmenší rozlohu.

Motivace:

Hledat možnosti úspor spotřeby vody

Postup:

- 1) Žáci odhadují, kolik litrů vody spotřebuje jeden žák ve škole za jeden den. Odhady zapisují.
- 2) Žáci měří stopkami, kolik vteřin teče voda při mytí rukou. Kolik vteřin teče voda z kohoutku, když se chtějí napít.
- 3) Učitel zjistí kolik litrů vody se spotřebuje při splachování na záchodě. Většinou na jedno spláchnutí 6 litrů. Úsporné spláchnutí 3 litry.
- 4) Žáci naměří kolik litrů vody nateče z kohoutku za 10 vteřin.
- 5) Žáci spočítají každý svoji potřebu vody. Určí svoji spotřebu za školní týden – 5 dní.
- 6) Žáci spočítají spotřebu celé třídy za jeden den a školní týden.
- 7) Žáci zjistí cenu vody za 1 metr krychlový, t.j. cena za 1000 litrů a určí kolik stojí cena vody za školní týden.
- 8) Žáci počítají spotřebu vody ve své domácnosti. Počítají s průměrnou spotřebou vody na osobu a den (jídlo a pití-5 litrů, mytí – 12 litrů, koupání a sprchování-50 litrů, záchod – 24 litrů, praní-35 litrů, úklid – 8 litrů, mytí nádobí – 35 litrů). Spočítají svoji spotřebu a spotřebu vody celé rodiny.
- 9) Zjistí si cenu vody za 1 metr krychlový a spočítají cenu spotřeby vody celé rodiny za jeden den.
- 10) Určí spotřebu vody a její cenu za týden.
- 11) Spočítají kolik desetilitrových kbelíků vody by museli přinést za jeden den, aby rodina měla potřebné množství vody.
- 12) Kolik litrů vody by ušetřili za jeden rok, kdyby denně ušetřili 5 litrů. Jakou by ušetřili peněžní částku?
- 13) Žáci zjistí skutečnou spotřebu vody rodiny za celý rok a porovnájí se svými výpočty.
- 14) Žáci navrhnou úspory vody.
- 15) Žáci se budou zabývat vodou v českém jazyku-slohová práce na téma „Využití vody v domácnosti, v přírodovědě-koloběh vody v přírodě, vlastivědě-vodstvo ČR, vodní přehrady, vodní elektrárny, výtvarné výchově-kresba na téma „voda“, pracovní činnosti-výroba sněhových vloček, tělesná výchova-plavecký výcvik,základy plaveckých stylů,potápění, hudební výchova-téma vody v českých lidových i moderních písních.

Dále se podíváme na výchovu k myšlení v evropských a globálních souvislostech:

Z této oblasti nás bude zajímat příprava učitelů základní školy na vstup evropské měny do České republiky.

Proč? – Nejčastější dětská otázka, kterou nám učitelům děti kladou. A naším úkolem, tedy nás učitelů, je na tuto otázku neustále pomáhat hledat odpověď. Zavedení evropské měny je

výzvou pro nás učitele stát dítěti po boku jako pomocník a dítě nechat hledat odpověď na tuto všetečnou otázku proč.

Učitelé musí reagovat na změny ke kterým dochází v naší společnosti. Připravujeme se na vstup do Evropské unie a je nutné reagovat i na existenci nové měny, která se chystá na vstup do České a Slovenské republiky a která je realitou v zemích Evropské unie. Z těchto důvodů se učitelé i žáci musí připravit na znalosti o Euru, jako měně Evropské unie. Při této příležitosti je třeba využít i všechny možné současné informační zdroje. Učitelé vedou i své žáky k využití těchto informačních zdrojů. Nebudou-li tyto informační zdroje používat učitelé, nepovedou k jejich využívání i svoje žáky. Při hledání znalostí o euroměně je třeba využívat Internet, mobilní telefony, pevnou telefonní linku a teletext. Všechny tyto informační zdroje nám umožní poznat euroměnu, včetně jejich kursů vůči koruně i ostatním měnám. Pro žáky je významné se seznámit s euroměnou, zvláště mají-li již dnes možnosti této měny v zahraničí používat. Na Internetu je možné využít stránky provozované Evropskou komisí: <http://www.europa.eu.int>, stránky Delegace Evropské komise v České republice: <http://www.evropská-unie.cz>, stránky Ministerstva zahraničních věcí ČR o Evropské unii: <http://euroskop.cz> a další informační stránky: <http://beranova.com/euromena/>, <http://www.euro-info.sk>, <http://www.europskaunia.sk> a <http://uvtip.sk/isen>.

Dále je možné v České republice získat informace pomocí zelené linky o evropské unii (EU). Linku zřídilo v rámci komunikační strategie ČR před vstupem do EU Ministerstvo zahraničních věcí a byla uvedena do provozu 1. října 2001. Zaškolení operátoři jsou schopni odpovědět na základní otázky týkající se EU a přípravy ČR na vstup. Telefon linky: 800 200 200. Dále je možné zjišťovat kurzovní lístek přes mobilní telefon. Zjištění aktuálního kurzu mobilním telefonem se liší v závislosti na používaném mobilním operátorovi. Kurzovní lístek lze zjistit i pomocí teletextu. Zjištění aktuálního kurzu pomocí televize je jednoduché, postupujeme z hlavního menu zadáváním stránek. Je vhodné i využít kapesní kalkulač pro výpočet kursů jednotlivých měn.

Podívejme se na některé informace. Evropská unie vznikla prohlubováním hospodářské spolupráce v západní Evropě po druhé světové válce. Se svými patnácti zeměmi (Belgie, Dánsko, Finsko, Francie, Itálie, Irsko, Nizozemsko, Lucembursko, Německo, Portugalsko, Rakousko, Řecko, Španělsko, Švédsko, Velká Británie) a téměř 380 miliony obyvatel je Evropská unie jedním z nejvýznamnějších světových ekonomických uskupení. Na počátku devadesátých let byl v tomto integračním celku završen proces vytváření jednotného trhu, pro který je charakteristický volný pohyb zboží, služeb, pracovních sil, kapitálu a princip svobodného podnikání. K integraci jednotného trhu však chyběl důležitý jednotící prvek - společná měna. Existence různých národních měn vytvářela rizika při vzájemném obchodu a dodatečné náklady související se směnou národních měn.

I když už od konce šedesátých let existovala snaha o vytvoření měnové unie, teprve ke konci osmdesátých let byly vytvořeny předpoklady pro úspěšné dosažení tohoto cíle. Politicky směr k vybudování Hospodářské a měnové unie potvrdilo nejvyšší zasedání Evropské unie v Maastrichtu v prosinci 1991. Tam byl také později podepsán komplex smluv, které novelizovaly a doplňovaly zakládající akty Společenství, který nese název Smlouva o Evropské unii, běžně označovaná jako Maastrichtská smlouva.

V současné době se procesu přistoupení účastní třináct zemí ucházejících se o členství: Estonsko, Lotyšsko, Litva, Česká republika, Slovensko, Maďarsko, Rumunsko, Bulharsko, Malta, Kypr, Turecko. Přístupová jednání probíhají s prvními dvanácti a Evropská rada v Goteborgu potvrdila cíl, aby s těmi zeměmi, které budou připraveny k přistoupení, byla jednání dokončena tak, aby se mohly zúčastnit voleb do Evropského parlamentu v roce 2004 jako právoplatní členové. Pro zajímavost hymnou Evropské unie je „Óda na radost“. Je převzata z poslední části Beethovenovy 9. symfonie a schválena v roce 1986. Hymnu si je možno poslechnout na http://www.europa.eu.int/abc/symbols/anthem/index_en.htm.

Summit Evropské unie v Madridu v roce 1995 rozhodl, že název společné jednotné měny bude euro. Zvláštní vrcholné zasedání Evropské unie v květnu roku 1998 konstatovalo, že pro zavedení jednotné měny euro se kvalifikovalo 11 zemí Evropské unie (Belgie, Finsko, Francie, Itálie, Irsko, Nizozemsko, Lucembursko, Německo, Portugalsko, Rakousko, Španělsko). Od roku 2001 k těmto zemím přistoupilo Řecko. Jednotná měna euro ve formě bankovek a mincí byla k 1.1. 2002 zavedena ve dvanácti zemích Evropské unie. Skupina těchto zemí je označována jako oblast eura či eurozóna. Mimo zůstávají tři země (Velká Británie, Dánsko a Švédsko), které si zatím ponechávají vlastní národní měny.

V polovině roku 1998 zahájila činnost Evropská centrální banka, která je řídícím místem pro měnovou politiku zemí eurozóny. Ta také koordinovala práce k zavedení jednotné měny euro včetně přípravy oběživa v nové měně. S ní spolupracují národní centrální banky zemí eurozóny. Evropská centrální banka a národní centrální banky všech 15 zemí Evropské unie tvoří dohromady Evropský systém centrálních bank..

Mince a bankovky v euroměně mají standardní podobu. Mince mají pro všechny země stejný rozměr, hmotnost, sílu, tvar, provedení hrany, jednu stejnou (*tzv. evropskou*) stranu s uvedením hodnoty a jsou zhotoveny ze stejného materiálu. Druhá strana (*tzv. národní*) je v jednotlivých zemích různá. To však nemá vliv na použití mincí v jiných zemích eurozóny.

Zadní strana těchto mincí nese národní symboly, které si ta která zúčastněná země sama zvolila. Přední strana mincí je ve všech členských státech stejná a je na ní znázorněna mapa Evropy na pozadí příčných čar s hvězdami z vlajky Evropské unie. Na mincích o hodnotě 1, 2 a 5 centů se zdůrazňuje místo Evropy ve světě a na mincích o hodnotě 10, 20 a 50 se prezentuje Unie jako shromáždění národů. Mince, které mají hodnotu 1 a 2 eur zobrazují Evropu bez hranic.

Národní strany mincí: Řecko - Obrázek sovy převzatý ze starověké aténské tetradrachmy (mince z 5.stol. př.n.l.), Francie - strom symbolizující život, kontinuitu a růst v šestiúhelníku, kolem je nápis "Liberté, égalité, fraternité" (Volnost, rovnost, bratrství), motto republiky. Autor: Joaquim Jimenez, Irsko - Irsko má stejný motiv na euromincích všech denominací: keltská harfa – tradiční symbol Irska, rok vydání a slovo "Eire" (Irsko). Autor: Jarlath Hayes, Itálie - Znamá kresba Leonarda da Vinci ilustrující ideální proporce lidského těla. Obraz je umístěn v galerii Akademie v Benátkách., Finsko - Dvě letící labutě, převzato ze soutěže o minci u příležitosti 80. výročí nezávislosti Finska. Autor: Petti Maekinen, Rakousko - Portrét Wolfganga Amadea Mozarta, symbolizující Rakousko jako zemi hudby.

Bankovky jsou pro všechny země stejné. Měnová jednotka euro má mezinárodní zkratku EUR. Jako symbol používá stylizované řecké písmeno epsilon, odrážející evropský charakter měny. Dvojitá vodorovná čára uvnitř tohoto písmene symbolizuje stabilitu nově vznikající měny. Navrhl je Robert Kalina z rakouské centrální banky. Náměty jsou výrazně symbolické povahy a vycházejí z jednotlivých historických fází, ve kterých se vytvářelo architektonické dědictví Evropy. Na přední straně (aversu) každé bankovky dominují okna a brány jako symboly ducha otevřenosti a spolupráce v EU. Na zadní straně (reversu) bankovek je znázorněn most z určité historické epochy – jde o metaforické vyjádření komunikace mezi lidmi v Evropě a mezi Evropou a ostatním světem. Bankovky jsou různě velké a jsou vtištěny v odstínech zelené, žluté, modré, nafialovělé (lila) a oranžové barvy.

Euro jako jednotná měna Evropské unie není vnitřní měnou České republiky.

Ukázky úloh:

Úloha č. 1 : Kterým státům patří tyto měny?

Euro -	Dolar -
Libra -	Jen -
Zlotý -	Frank -
Rubl -	Kuna -

Úloha č. 2:

Které státy mají jako měnu korunu ? Urči hodnotu této koruny vůči České koruně.

Úloha č. 3:

Doplň aktuální kurz světových měn v Kč (zaokrouhli na dvě desetinná místa):

1 Euro EUR =Kč	1 Dolar USD =Kč
1 Libra GBP =Kč	100 Jenů JPY =Kč
1 Zlotý PLN =Kč	1 Frank CHF =Kč
1 Rubl RUB =Kč	1 Kuna HRK =Kč

Úloha č. 4:

Máš 400 Čk. V jaké měně budeš platit v těchto městech? A jakou částku budeš mít na útratu?

Davos.....	Novgorod	Birmingham
Tokio	Brusel	Poznaň
Primošten	Luzern.....	

Úloha č. 5:

Zapiš aktuální kurz 1 EUR =Kč

Odhadni co si koupíš za mince v hodnotě 1, 2, 5 EU (Roztříd' věci podle ceny).

časopis, lístek do kina, tričko, cola, knížka, ponožky, telefonní karta, růže, šála, tempery, 1 kg vuřtů, hamburger

1 EU.....	
2 EU.....	
5 EU.....	

Řešení:

1 EU.....	časopis, ponožky, cola, hamburger
2 EU.....	lístek do kina, tempery, 1 kg vuřtů, růže
5 EU.....	tričko, knížku, telefonní kartu, šálu

Úloha č. 6:

Přepočti z Eura na Kč podle aktuálního kurzu.

1000 EU =	10 EU =	20 EU =
50 EU =	2 EU =	5 EU =
200 EU =	500 EU =	100 EU =

Úloha č. 7:

Kolik by činilo tvé dnešní kapesné v Eurech? (zaokrouhli na jednotky)

Úloha č. 8:

Odhadni kolik EU by si potřeboval na nákup:

10 rohlíků, 1 mléka, 15 dg salámu, 2 jogurtyKč ,EU

Úloha č. 9:

Přepočti hodnotu z Kč na EU pomocí kalkulačky. Zaokrouhli na dvě desetinná místa!

1 Kč =EU	10 Kč =EU	100 Kč =EU	1000 Kč =EU
2 Kč =EU	20 Kč =EU	200 Kč =EU	2000 Kč =EU
5 Kč =EU	50 Kč =EU	500 Kč =EU	5000 Kč =EU

Úloha č. 10:

Porovnej hodnoty znaménky $>$, $<$, $=$:

280 Kč ☐ 5 EU 40 EU ☐ 15000 Kč

2 EU ☐ 45 Kč 9 00 Kč ☐ 50 EU

7 EU ☐ 500 Kč 500 Kč ☐ 9000 Kč

90 EU ☐ 3600 Kč

8000 Kč ☐ 200 EU

Úloha č. 11:

1 euro má 100 centů. Zjisti v jaké hodnotě jsou vydané mince.

Úloha č. 12 :

Vytvoř návrh národní strany eura České republiky.

16. Kompetence pracovní. Kalkulátor dříve a dnes. Pracovní činnost žáků.

Kalkulátor – název je odvozen od latinského názvu početního kaménku, který se používal při počítání na abaku a který se nazýval **kalkul**.

Ve vyučování existují dvě hlavní použití počítačů, které mají opačné filozofie. Jsou to:

1. CAL, CAI – instrukce pomocí počítače
2. PS – řešení problémů

Ad 1) CAL – Computer Aided Learning (počítač pomáhá učení)

CAI – Computer Asistent Instruction

tj. využití počítačů k podpoře a řízení výuky učení

Počítač je využíván **jako učitel**.

Počítač kontroluje nebo řídí činnosti žáka při řešení úloh, případně ho přímo učí (počítač slouží jako vyučovací stroj)

Ad 2) PS – Problem Solving (řešení problému)

K řešení problému je počítač využíván **jako žák**.

U způsobu řešení problémů hraje počítač roli „modelovaného žáka“. Je to velice náročný „žák“, jelikož Vás nutí vyjadřovat zadání tak, aby ho bylo možno chápat jako algoritmus. Jestliže Vás počítač dokáže pochopit, pak si můžete být jisti, že jste opravdu pochopili daný problém.

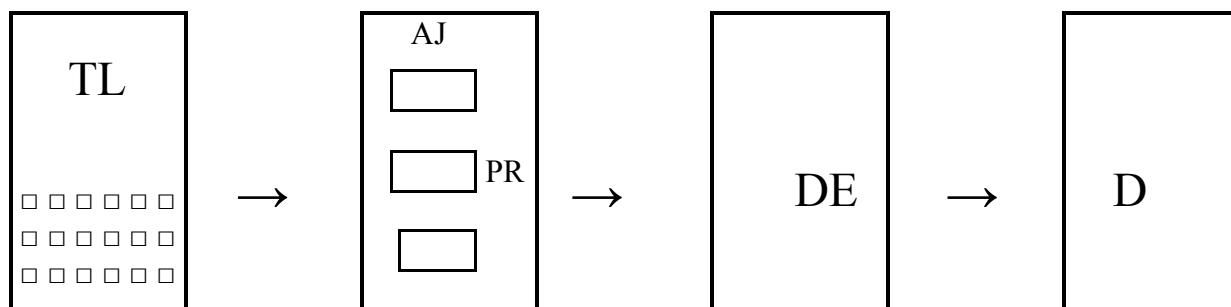
Hlavní důvody pro používání kalkulátorů ve vyučování na základní škole jsou:

1. V praktickém životě stále více lidí používá kalkulatory. Proto je třeba, aby se s nimi žáci naučili pracovat již ve škole.
2. Kalkulátor odstraňuje zdlouhavé písemné výpočty a tím obecně likviduje strach z numerických výpočtů.
3. Žáci se použitím kalkulatoru pouštějí do řešení složitějších úloh než bez nich.
4. Zvyšují zájem o matematiku.
5. Pozornost může být více soustředěna na formulaci úloh a nalezení postupu řešení.
6. Žáci získávají čas pro důkladnější osvojení látky.
7. Používání kalkulatorů zesiluje mezipředmětové vztahy.
8. Kalkulátor rozvíjí induktivní myšlení žáků.

Vy vyučování matematice rozlišujeme trojí použití kalkulatorů:

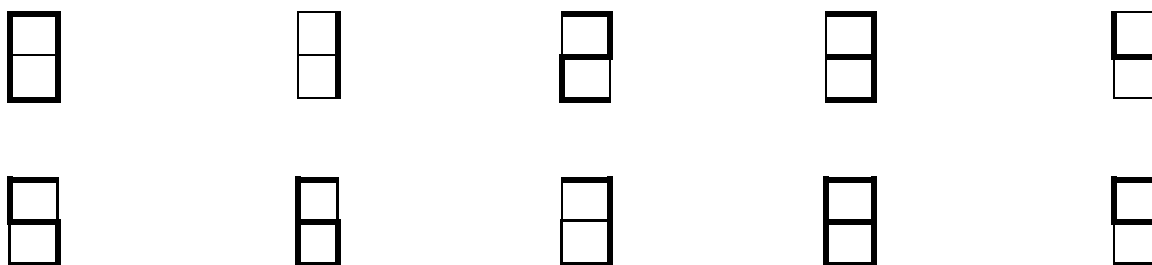
- a) Jako výpočetní pomůcky, tzn. k použití výpočtů všude tam, kde je to vhodné a možné,
- b) jako badatelské pomůcky, umožňující žákům objevovat (pro žáky) nové poznatky,
- c) jako metodické pomůcky, umožňující výuku některých témat novým (s použitím kalkulatoru) způsobem.

Základní informace o kalkulatorech



Základem kalkulatoru je aritmetická jednotka AJ vybavena několika pracovními registry (PR). Data do registru vstupují tlačítka TL, operace se provádí na pokyn obsluhy stisknutím

operačního tlačítka. Obsah určeného registru je v každém okamžiku dekodován dekodérem DE a zobrazován v desítkové soustavě na displeji D.



Kalkulátory můžeme dělit podle nejrůznějších hledisek. Základním údajem, podle něhož můžeme určit kvalitu kalkulátoru, je počet a druh funkcí, které může kalkulátor vykonávat. Rozeznáváme:

1. Kalkulátory jednoduché (elementární)

Jsou zařízeny pro základní aritmetické operace (+, -, x, :); často mají automatickou konstantu, druhou mocninu a odmocninu, tlačítko pro změnu znaménka, tlačítko pro výpočet % a někdy i paměť.

2. Kalkulátory střední (inženýrské)

Počítají exponenciální, logaritmické, goniometrické a cyklometrické funkce; mívají obecnou mocninu, závorky, umožňují převod úhlu z míry stupňové na obloukovou a naopak, případně další funkce.

3. Kalkulátory programovatelné

Umožňují na základě předem vloženého programu a vstupních údajů automaticky provádět výpočet.

Jedním z dalších technických parametrů je počet „pamětí“, tj. počet registrů do nichž lze vložit mezivýsledek.

Z hlediska praktické použitelnosti ve výuce matematiky má rozhodující význam operační systém, ve kterém kalkulátory pracují. Existují tři operační systémy:

1. Algebraický systém
2. RPN (Revers Polish Notation) systém (RPN-vylepšit znaky)
3. Aritmetický systém.

Ilustrujeme si na jednoduchých příkladech rozdíly v zavádění čísel a operací v jednotlivých systémech.

Mějme tyto tři jednoduché úlohy:

1. $8 - 3 = ?$
2. $2 \times 9 - 5 = ?$
3. $30 + 18 : 6 = ?$

Jejich zavádění na kalkulátorech pracujících v jednotlivých operačních systémech bude následující:

a) Algebraický systém

1. $8 - 3 = \underline{5}$
2. $2 \times 9 - 5 = \underline{13}$
3. Před řešením úlohy musíme zjistit, zda kalkulátor zachovává přirozenou hierarchii operací, tzn. nejprve provádí výpočet hodnot funkcí, pak umocňování, dále násobení (dělení) a nakonec sčítání (odčítání), či nikoliv, tzn. operace se provádějí v tom pořadí, jak byly zavedeny.

Jestliže kalkulátor nezachovává hierarchii operací, je třeba úlohu upravit takto:

$$30 + 18 : 6 = 18 : 6 + 30$$

$$18 : 6 + 30 = \underline{33}$$

Jestliže kalkulačtor hierarchii zachová, pak se úloha řeší v původním tvaru

$$30 + 18 : 6 = \underline{33}$$

b) RPN systém

Pro kalkulačtory v RPN systému je typické, že jejich tlačítkový panel (klávesnice) neobsahuje tlačítko (klávesu) = a často používané tlačítko ENTER- „vstoupit“ je větší než tlačítka ostatní. Nejznámější kalkulačtory tohoto systému jsou Hewlett – Packard.

1. 8 ENTER 3 – 5

2. 2 ENTER 9 x 5 – 13

3. 18 ENTER 6 : 30 + 33

c) Aritmetický systém

1. 8 $\boxed{+}$ 3 $\boxed{-}$ 5

2. 2 $\boxed{\times}$ 9 $\boxed{+}$ 5 $\boxed{-}$ 13

3. 18 $\boxed{:}$ 6 $\boxed{+}$ 30 $\boxed{+}$ 33

Aritmetický systém je zastaralý a používá se již málo. Kalkulačtory tohoto typu poznáme dle tlačítek. += nebo -=.

První vstup kalkulačtorů do českých škol.

Kalkulačtory byly zavedeny po prvé do českých škol v roce **1979** a to v učebnici **Cvičení z matematiky pro 5. ročník základní školy** (Státní pedagogické nakladatelství Praha, str. 102 – 115, SPN 51 – 90 – 15/1) autory Melichar, Červinka, Divíšek, Koman, byly to právě kalkulačtory s aritmetickým systémem, které byly dodávány do českých škol pod značkou ELKA, šlo o bulharskou výrobu a kalkulačtory tehdy sovětské výroby BZ – 04..

Dalším rozlišujícím znakem kalkulačtoru je displej (indikační registr), na němž se zavádění čísla a výsledky operací zobrazují:

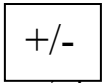
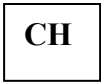
Většina běžných kalkulačtorů má 8-místný displej s jedním dalším místem pro znaménko, lepší kalkulačtory mají 10-místný displej s jedním dalším místem pro znaménko. Lepší kalkulačtory mají na displeji symbol pro velmi velká nebo velmi malá čísla například ($\times 10^{15}$) resp. ($\times^{-02}$) nebo uvádějí pouze exponent 15 resp. –2.

Dalším rozlišujícím znakem je přesnost výpočtu.

Přesnost výpočtu se pozná například na $(\sqrt{2})^2 = 2$. U méně kvalitního kalkulačtoru displej ukáže 1,99999998. Nebo $(1:3) \times 3$ a nevyjde 1, ale 0,9999999. Tyto kalkulačtory nezaokrouhlují a pracují nepřesně.

Pokud kalkulačtor neumí zobrazit velké číslo, tak většinou se objeví na displeji písmeno E od anglického slova error – chyba. Říkáme, že kalkulačtor přetéká.

Klávesnice kalkulátoru:

Tlačítka pro zavádění čísel: Jsou to tlačítka s číslicemi 0 až 9, tlačítko s desetinnou čárkou, resp. desetinnou tečkou, tlačítko pro změnu znaménka čísla, které bývá zpravidla označeno  , resp,  nebo  (od anglického „change sign“ –

změna znaménka.

Do skupiny těchto tlačítek patří i tlačítko pro zápis čísel v exponenciálním tvaru, které bývá označeno **XPF**, **EE** nebo **EEX** (z anglického „enter exponent“ – vstup exponentu).

Někdy existuje i samostatné tlačítko π .

Operační tlačítka:

Mají symboly početních operací $+$, $-$, $\times$, $:$, znaménko pro $=$. Patří sem i tlačítka pro závorky $($, $)$, $[($, $)]$.

Tlačítka pro výmaz uložených informací :

Zpravidla jsou to tlačítka označená **C**, případně **CE**, **C** nebo jsou dvě tlačítka označená **CE** (někdy **CI**) a **C** od anglického „clear“ – čistý nebo „clear entry“ – čistý vstup. Též bývá tlačítko **AC** – „absolute clear“ – úplně čistý.

Má-li kalkulátor jen jedno tlačítko na kterém jsou symboly **CE**, **C**, tak při prvním zmáčknutí se vymaže poslední zavedené číslo (to, které je zobrazeno na displeji) a ostatní informace zůstávají zachovány, zmáčkne-li dvakrát vymažou se všechny informace s výjimkou čísla uloženého v paměti.

Funkční tlačítka:

Jsou to tlačítka pro výpočet $\%$, $1/x$, $\sqrt{x}$, $\sin$, $\cos$, $\tan$, atp.

Tlačítka pro práci s pamětí kalkulátoru:

Na těchto tlačítkách je písmeno **M** – anglicky „memory“ – paměť.

Nejčastěji se vyskytují tyto tlačítka:

X $\rightarrow$ **M** číslo, které je na displeji se přepíše do paměti kalkulátoru

M $+$ číslo, které je na displeji se přičte k číslu v paměti

M $-$ číslo, které je na displeji se odečte od čísla v paměti

MR (anglicky „memory return“ – česky paměť dát zpět).....číslo, které je v paměti se zapíše na displej

MC (anglicky „memory clear“ – česky čistá paměťpaměť se vynuluje

Pokud kalkulátor nemá tlačítko **MC** nulujeme paměť tak, že pomocí tlačítka **X** $\rightarrow$ **M** do paměti pošleme **0**.

To, že v paměti se nachází nějaké číslo různé od nuly je na displeji signalizováno zpravidla písmenem **M**.

Co kalkulátor nedělá:

Neumí dělit nulou. Při dělení nulou se objeví na displeji **E** (error – chyba).

Nepočítá druhé odmocniny ze záporných čísel, opět se objeví na displeji error.

Automatické uchování konstanty:

Některé kalkulátory mají tuto vlastnost, která je užitečná, ale může i zapříčinit chybu, když omylem dvakrát zmáčkne tlačítko $=$.

Například při provádění operace **A** $+$ **B** $=$ **C**, si kalkulátor zapamatuje poslední operaci tj. $+$, poslední operand tj. **B** a výsledek poslední operace tj. **C**. Při dalším zmáčknutí tlačítka $=$ se provede operace **C** $+$ **B**, atd. To se nazývá automatické uchování konstanty, v našem případě konstantou je **B**.

$3 + 7 = 10 = 17 = 24 = 31 = 38$

Obdobně při provádění operace - :
 $20 - 3 = 17 = 14 = 11 = 8 = 5$

Pokud nezadáme druhého sčítance nebo menšitele, tak automatická konstanta se projevuje takto:

$7 + = 14 = 21 = 28 = 35 = 42$ (dostávám násobky čísla 7)
 $8 - = 0 = -8 = -16 = -24 = -32$

Při násobení uchovává se jako konstanta první činitel :
 $3 \times 5 = 15 = 45 = 135 = 405$

Při dělení uchovává se jako konstanta dělitel:
 $80 : 2 = 40 = 20 = 10 = 5$

Při nezadání druhého činitele dostáváme:
 $9 \times = 81 = 729 = 6\,561$ (jde o umocňování)

Při nezadání dělitele:
 $2 . = 1 = 0,5 = 0,25$ (jde o stále dělení 2)

Zábavná forma práce s kalkulatorem:

1) Kalkulátor píše

$0 = O, 1 = I, 2 = Z, 3 = E, 4 = h, 5 = S, 7 = L, 8 = B, 9 = G$

Při otočení kalkulatoru o 180 stupňů lze na kalkulatoru zapisovat slova. Chceme-li zapsat slovo SELE, tak písmeno E na konci slova bude číslice 3 na začátku, pak bude písmeno L a číslice 7, poté písmeno E číslice 3 a na závěr písmeno S a číslice 5. Píšeme tedy pořadí číslic obráceně než je pořadí písmen. Každé slovo se vlastně dvakrát transformuje, jednou pořadí a po druhé převádíme písmena na číslice. Pokud slovo končí písmenem O, vypomůžeme si desetinnou tečkou (resp. desetinnou čárkou.)
LEO – 0,37.

a) Zadáme žákům najít co nejvíce slov, které lze na displeji zapsat

Řešení: BIOLOGIE, GEOLOGIE, SELE, LEO, SOB, SOBOL, LOS, ZLO, LEZE, HESLO, IDOL, ZELI, atp.

b) První žák diktuje slova, která lze napsat na displeji a druhý žák je na kalkulatoru zapisuje.

c) Žáci hledají takové početní výkony, které dají určité slovo.
Například $294 \times 25 = 7350$ (OSEL)

2) Česko-anglický slovník

Žáci v anglickém slovníku vyhledají anglická slova, která přepíší do číselné formy a najdou k nim početní příklad, který dá dané slovo. K českému slovu přiřadí početní úlohu, která dá dané anglické slovo. Anglické slovo je vlastně zakódováno početní úlohou.

Například : OBUV (203 . 2145) : (11 . 13) = 3045 (SHOE)

Žáci se snaží najít početní úlohu co nejsložitější

Například : HUSA $123 . 123 + 124 . 124 + 65 . 65 + 31 . 9 = 35009$ (GOOSE)

Například : VČELA (4037 – 2347) : 5 = 338 (BEE)

3) Měníme a odstraňujeme číslice na kalkulatoru

a) Změň číslici na nulu:

Příklad: Změň v čísle 868 536 číslici 5 na nulu.

Řešení: $868\,536 - 500 = 868\,036$

b) Odstraň v čísle 868 536 číslici 5.

Řešení: $868\,536 - x = 86\,836$ $x = 781\,700$, $868\,536 - 781\,700 = 86\,836$

4) Hádej – pak ověřuj

$$43 \times \underline{\hspace{2cm}} = 2\,408$$

odhad

Žák odhadne výsledek a pak svůj odhad ověří na kalkulátoru.

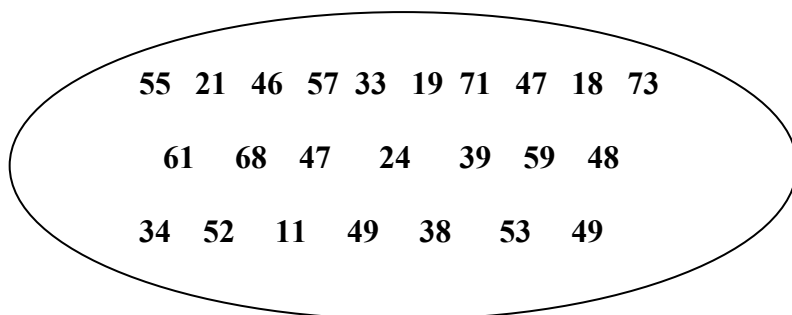
Urči symboly operace:

$$(73 \square 26) \square 23 = 2\,277$$

Žák odhadne symbol operace a pak na kalkulátoru ověří.

5) Hra: Vyškrtávaná

Soutěží dva hráči mezi sebou TY a JÁ. Postupně vybírají z množiny čísel vždy dvě čísla. Odhadnou jejich součin, tak aby získali co nejvíce bodů dle přiložené tabulky. Na kalkulátoru součin vypočítají a zapíší počet získaných bodů. Tato dvě čísla vyškrtnou. V soutěži pokračují s nepřeškrtnutými čísly. Vítězí ten, kdo získá více bodů.



Body:

TY	JÁ

Součet:

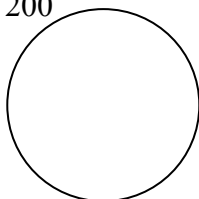
Tabulka:

0 až 999	1 000 až 1 999	2 000 až 2 999	3 000 až 3 999	4 000 až 5 000
1 bod	2 body	3 body	2 body	1 bod

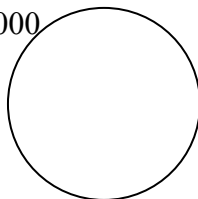
6) Umiš odhadnout výsledek

Obrázky překreslete do svého sešitu. Během tří minut zakreslete do příslušných kruhů písmena příkladů tak, jak se odhadem domníváte, že mají výsledek. Pomocí kalkulátoru ověřte své výsledky.

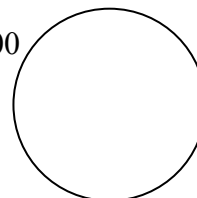
0 až 200



201 až 2 000



2 001 až 20 000



a) 53×41

b) 111×21

c) 32×69

d) 396×49

e) 96×187

f) 4×53

g) 29×67

h) 22×11

i) 9×24

j) 102×23

7) Hra: Nula vyhrává

Hrají dva hráči s jedním kalkulátorem. První hráč si zvolí libovolné číslo od 50 do 150. Druhý hráč odečte libovolné jednociferné číslo, kromě nuly. První hráč může odečíst jednociferné číslo, kromě nuly, sousedící na klávesnici s odečítaným číslem. Druhý hráč opět odečítá sousední číslici různou od nuly. Vítězí ten hráč, který na displeji dosáhne nuly.

Poznámka: Obdobně lze začínat nulou a přičítat jednociferná čísla s výjimkou nuly. Vítězí hráč, který dosáhne na displeji 100. Lze zrušit i podmínku sousedních číslic.

U kalkulátoru jsou číslice rozmístěny takto:

7	8	9
4	5	6
1	2	3

Literatura:

Cihlář J., Melichar J., Zelenka M., Matematika pro čtvrtou třídu, 2. díl, Pracovní učebnice, Fortuna, Praha, 1995, str.78-79, ISBN 80-7168-236-5

V 10. vyučovací hodině jsme si ukázali jak lze pomocí minikalkulátoru převádět zápis čísla z desítkové soustavy do dvojkové číselné soustavy. V této vyučovací hodině budeme převádět zápis čísla v desítkové číselné soustavě do jiných číselných soustav. Postup je naprosto stejný jako u zápisu čísla ve dvojkové číselné soustavě, pouze budeme měnit u čtyřkové číselné soustavy 4 početní kaménky (kalkuly) nižšího řádu za bezprostředně následující jeden kamének vyššího řádu. Například u sedmičkové číselné soustavy 7 početních kaménků (kalkulů) nižšího řádu za bezprostředně následující jeden kamének vyššího řádu, atp.

Ve 14. vyučovací hodině jsme si ukázali sčítání a odčítání na abaku. Procvičíme další příklady.

Obdobně jako se sčítá a odčítá na abaku lze sčítat a odčítat čísla zapsaná v jiných číselných soustavách než v desítkové na minikalkulátoru:

Sčítání na minikalkulátoru

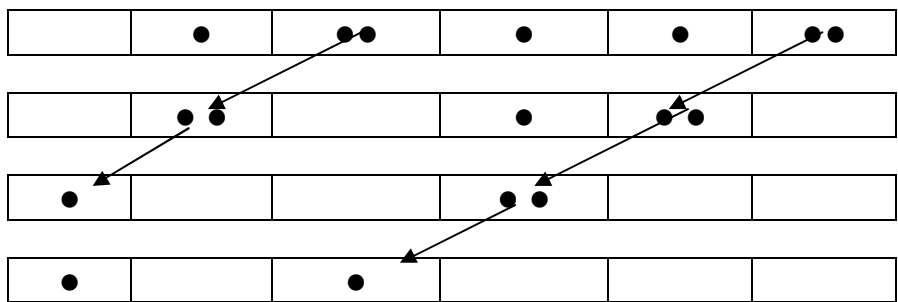
- 1) Zapišeme sčítance na horní a dolní minikalkulátor.
- 2) Početní kaménky ve stejných řádech sjednotíme.
- 3) Směníme.
- 4) Zapišeme výsledek.

Příklad:

$$\text{Sečtěte } (1\ 011)_2 + (11\ 101)_2 = (\quad)_2$$

1. sčítanec					
		•		•	•
2. sčítanec					
	•	•	•		•
součet					
	•	••	•	•	••

Zápis součtu čísla upravíme tak, aby na každém poli byl nejvýše jeden početní kamének:

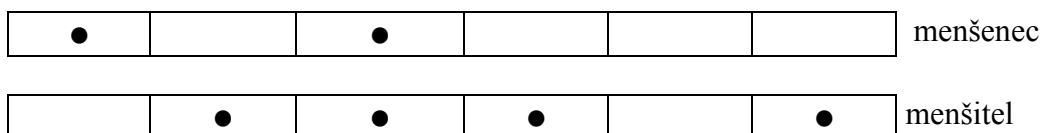


Příklad zapíšeme: $(1\ 011)_2 + (11\ 101)_2 = (101\ 000)_2$

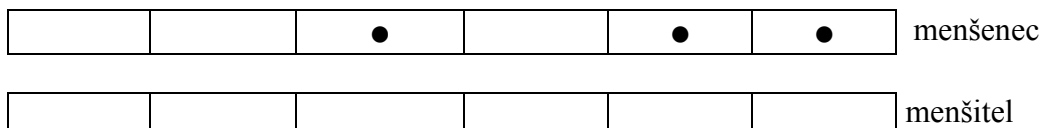
Odčítání na minikalkulátoru

- 1) Zapišeme menšence na horní a menšitele na dolní minikalkulátor.
- 2) Kaménky stejných hodnot odebereme (Rozdíl se nemění, když od menšence i menšitele odečteme stejné číslo).
- 3) Rozměníme a opět odebereme kaménky stejných hodnot a postupujeme tak dlouho až pole menšitele jsou prázdná
- 4) Zapišeme výsledek.

Příklad: $(101\ 000)_2 - (11\ 101)_2 = (\quad)_2$



Po úpravách:



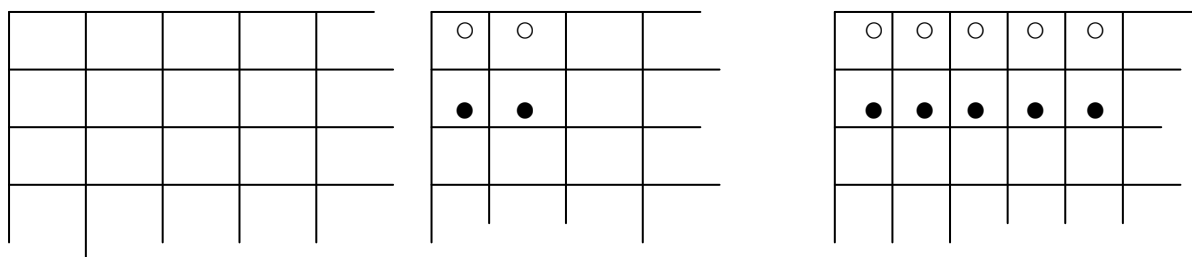
Zapišeme výsledek: $(101\ 000)_2 - (11\ 101)_2 = (1\ 011)_2$

Velmi zajímavé bude i pro nás využití dvoubarevných početních kamének při sčítání a odčítání celých čísel.

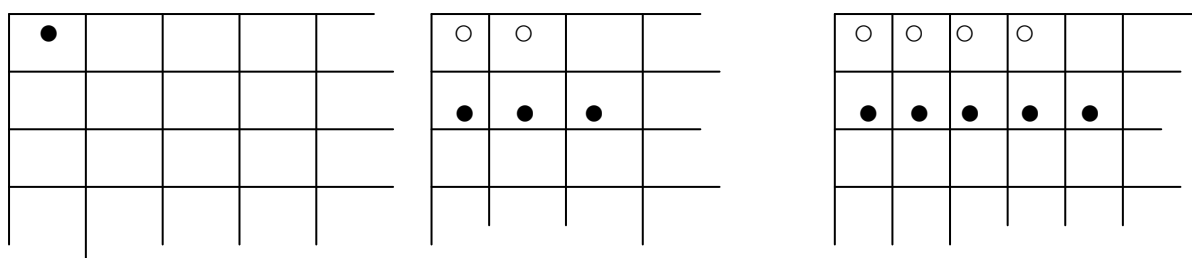
Jako model využijeme šachovnici a početní kaménky bílé a černé nám budou představovat žetony ze hry „Dáma“.

Bílé početní kaménky budou představovat kladná celá čísla a černé početní kaménky záporná celá čísla. Jeden bílý kamének je (+1) a jeden černý kamének je (-1). Je jasné, že když mám (+1) korunu a utratím 1 korunu tedy (-1) dostanu nulu. Z toho vyplývá, že jeden bílý kamének a jeden černý kamének se navzájem „ruší“. Též vidím, že mám-li například (+4) koruny a utratím-li 5 korun (-5), tak mi zůstává dluh 1 koruna, tedy (-1) koruna. Obdobně mám (+6) korun a utratím 7 korun, stále mám 1 korunu dluhu, tedy (-1).

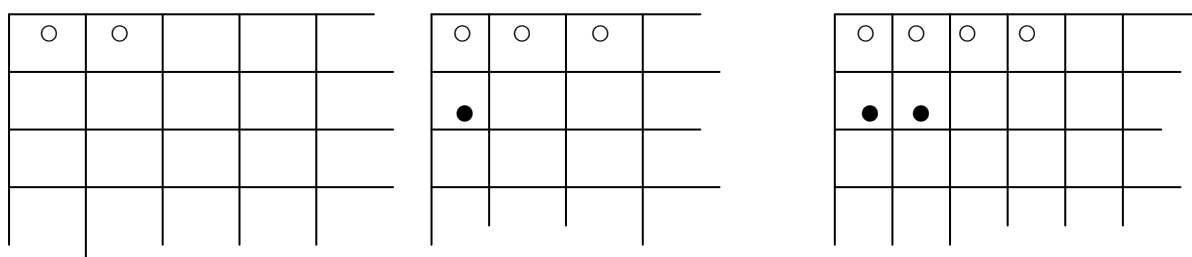
Vidíme, tedy, že prázdná šachovnice nebo šachovnice se stejným počtem bílých a černých kaménku nám představuje nulu:



Obrázky představují číslo (-1):



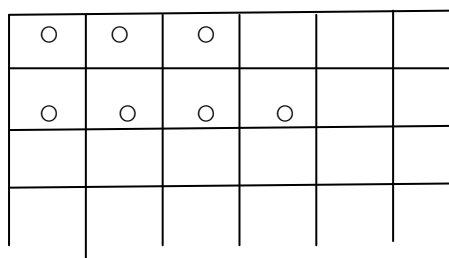
Obrázky představují číslo (+2):



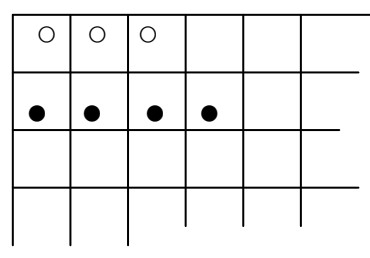
Sčítání:

Sčítání dvou celých čísel se provádí tak, že se vytvoří sjednocení obou množin, které tato čísla reprezentují a zruší se všechny páry tvořené bílým a černým početním kaménkem. Vše se znázorňuje na jedné šachovnici. Všechny čtyři případy $(\pm a) + (\pm b)$, $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ukáží pro konkrétní a, b .

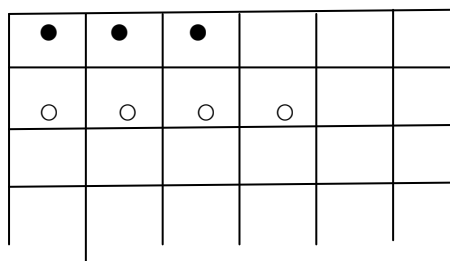
$$(+3) + (+4) = (+7)$$



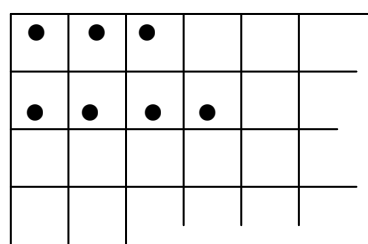
$$(+3) + (-4) = (-1)$$



$$(-3) + (+4) = (+1)$$



$$(-3) + (-4) = (-7)$$

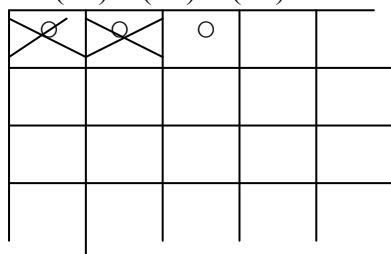


Odčítání

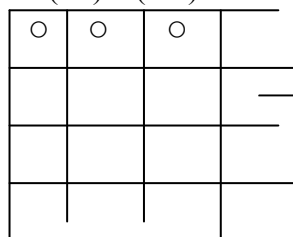
Odčítáním na našem modelu budeme rozumět odstranění příslušného počtu bílých resp. černých početních kamének znázorníme opět všechny možné čtyři případy:

a)

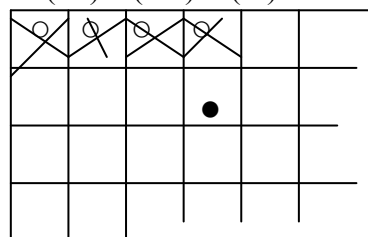
$$(+3) - (+2) = (+1)$$



$$(+3) - (+4) = ?$$



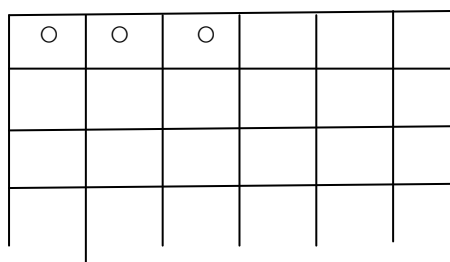
$$(+3) - (+4) = (-1)$$



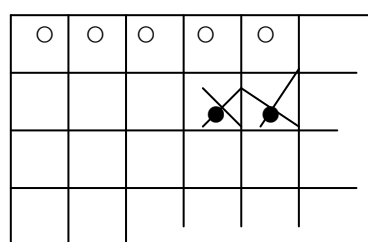
(Zde jsme nemohli odstranit 4 bílé figurky, proto jsme si šachovnici nejprve „upravili“.)

b)

$$(+3) - (-2) = ?$$

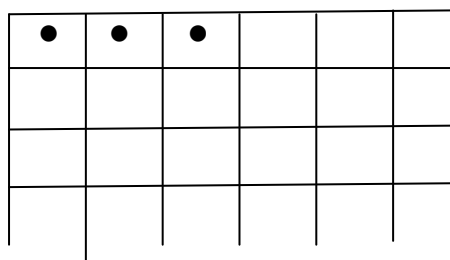


$$(+3) - (-2) = (+5)$$

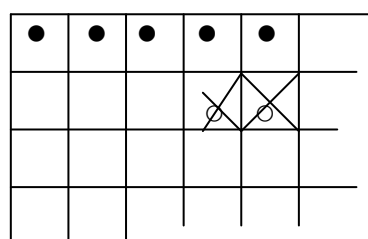


c)

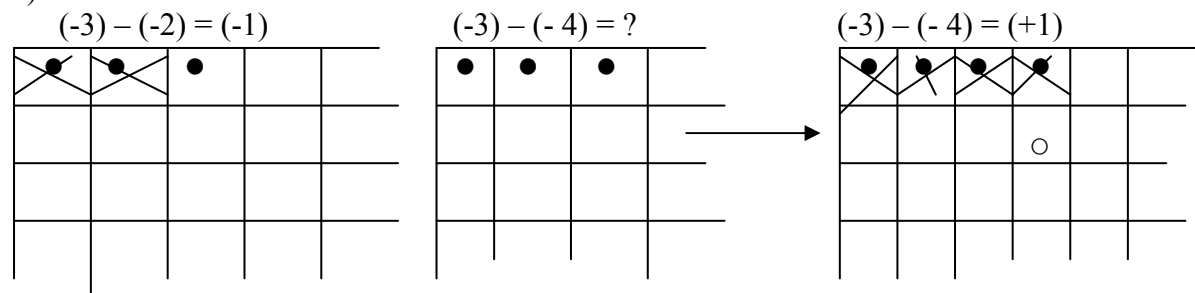
$$(-3) - (+2) = ?$$



$$(-3) - (+2) = (-5)$$



d)



Šachovnici jsme si vždy upravili, tak abychom mohli škrtat.

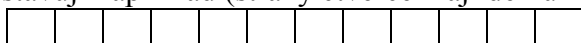
Dělitelnost v oboru přirozených čísel

Další pracovní činností je dělitelnost v oboru přirozených čísel. Žáci pomocí vlastních pracovních činností hledají dělitele daného čísla, resp. hledají násobky čísel.

Žáci si vystříhají ze čtvrtky 50 shodných čtverců. Učitel jim zadá úlohu tak, že jim určí počet čtverců a uloží jim, aby z těchto čtverců sestavili všechny možné obdélníky nebo čtverce.

Například: Sestav všechny možné obdélníky (čtverce) z 12 jednotkových čtverců.

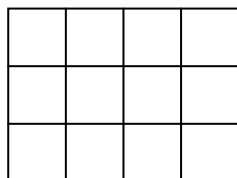
Žáci sestavují například (strany čtverce mají délku 1):



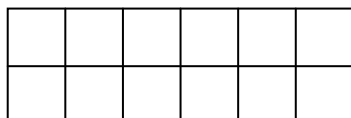
Pomocí názoru (vizualizace) žáci vidí, že dělitele čísla 12 jsou čísla 1 a 12 (tzv. samozřejmí dělitele).

Možné je i sestavit tyto obdélníky:

Rozměry stran 3 a 4:



Rozměry stran 2 a 6:



Našli jsme všechny dělitele čísla 12 a to 1, 2, 3, 4, 6 a 12.

Číslo 12 má i jiné dělitele než jsou dělitele samozřejmí. Jde o číslo složené.

Pokud lze sestavit jen obdélník „jednovrstvý“ jen se samozřejmými děliteli, jedná se o prvočíslo.

Například: Sestav všechny možné obdélníky (čtverce) z 13 jednotkových čtverců.



13 je prvočíslo.

Pro hledání obdélníků o daném počtu shodných čtverců můžeme využít i čtvercové sítě.

Témata absolventských prací

- 1) Transmisivní přístup k předávání poznatků a didaktický konstruktivismus ve výuce matematiky na 1. stupni základní školy (kompetence k učení).
- 2) Čtyři přístupy k vyučování matematice na 1. stupni základní školy (kompetence k učení).
- 3) Logické myšlení ve vyučování matematice na 1. stupni základní školy (kompetence k učení).
- 4) Funkční myšlení ve vyučování matematice na 1. stupni základní školy (kompetence k učení).
- 5) Konvergentní a divergentní myšlení ve vyučování matematice na 1. stupni základní školy (kompetence k učení).
- 6) Pojmotvorný proces ve vyučování matematice na 1. stupni základní školy (kompetence k učení).
- 7) Problémové vyučování v matematice na 1. stupni základní školy (kompetence k řešení problémů).
- 8) Zkoumání ve vyučování matematice na 1. stupni základní školy (kompetence k řešení problémů).
- 9) Jednoduché slovní úlohy ve vyučování matematice na 1. stupni základní školy (kompetence k řešení problémů).
- 10) Analytické a syntetické řešení složené slovní úlohy ve vyučování matematice na 1. stupni základní školy (kompetence k řešení problémů).
- 11) Slovní úlohy na sjednocení dvou množin s neprázdným průnikem ve vyučování matematice na 1. stupni základní školy (kompetence k řešení problémů).
- 12) Rozvoj prostorové představivosti ve vyučování matematice na 1. stupni základní školy (kompetence k řešení problémů).
- 13) Výrok a jeho negace ve vyučování matematice na 1. stupni základní školy (kompetence komunikativní).
- 14) Výrokové formy ve vyučování matematice na 1. stupni základní školy (kompetence komunikativní).
- 15) Třídění ve vyučování matematice na 1. stupni základní školy (kompetence komunikativní).
- 16) Konvergentní a divergentní úlohy ve vyučování matematice na 1. stupni základní školy (kompetence sociální a personální).
- 17) Využití dějin matematiky ve vyučování matematice na 1. stupni základní školy (kompetence občanská).
- 18) Environmentální výchova ve vyučování matematice na 1. stupni základní školy (kompetence občanská).
- 19) Výchova k myšlení v evropských a globálních souvislostech ve vyučování matematice na 1. stupni základní školy (kompetence občanská).
- 20) Možnost využití kalkulátorů jako podpory výuky ve vyučování matematice na 1. stupni základní školy (kompetence pracovní).
- 21) Možnosti využití minikalkulátorů jako podpory výuky ve vyučování matematice na 1. stupni základní školy (kompetence pracovní).
- 22) Možnost využití soustavy shodných čtverců jako podpory výuky ve vyučování matematice na 1. stupni základní školy (kompetence pracovní).
- 23) Hledání možností zneužití matematiky (matematický machiavelismus) ve vyučování matematice na 1. stupni základní školy (kompetence občanská).