

Slovní úlohy v učivu matematiky 1. stupně základní školy

V každé matematické úloze jde o to, abychom dokázali platnost (pravdivost) nějakého výroku. Podle toho, o jaký výrok jde, máme různé druhy úloh. Tak například úlohu, ve které máme dokázat platnost nějaké matematické věty, nazýváme důkazovou, úlohu, v níž máme vypočítat jedno nebo několik neznámých čísel vyhovujícím určitým podmínkám, nazýváme početní, úlohu, v níž máme sestavit určitý geometrický útvar mající dané podmínky, nazýváme konstruktivní apod.

Slovní úlohy jsou takové početní úlohy, ve kterých je souvislost mezi danými a hledanými čísly vyjádřena slovní formulací a v nichž je třeba na základě vhodné úvahy zjistit, jaké početní výkony je třeba provést s danými čísly, abychom došli k číslům, která máme vypočítat.

Poznámka: Mezi slovní úlohy nezahrnujeme úlohy, ve kterých je výslovně udáno, jaké početní výkony máme s danými čísly provést, i když je úloha formulována slovně. Například: Sečti čísla 5 a 7.

Prof. Jan Kopka (UJEP) ve své publikaci „Hrozny problémů ve školské matematice“ uvádí, že problém má tři složky:

Výchozí situace, v níž popisujeme souvislosti a poskytujeme informace nebo údaje.

Cíl, který chce řešitel dosáhnout.

Cesta od výchozí situace k cíli, která pro řešitele může, ale také nemusí být zřejmá či dosažitelná.

Grafické znázornění:



1. Cvičení (rutinní problémy)

- Výchozí situace je přesně popsána (situace je uzavřená),
- cíl je přesně zadán (cíl je uzavřen),
- cesta je známa.

Grafické znázornění:



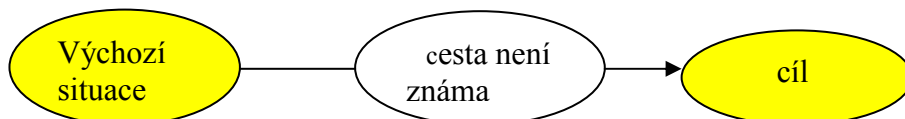
Příklad rutinního problému:

Příklad, žák umí vyřešit rovnici $x + 7 = 10$ a my mu zadáme rovnici $x + 6 = 9$, aby ji vyřešil, zadali jsme mu rutinní problém. Žák umí vypočítat písemně součet dvou dvouciferných čísel bez přechodu přes 10, zadali jsme mu jiný obdobný příklad bez přechodu přes 10.

2. Úlohy (nerutinní problémy)

- Výchozí situace je přesně popsána (je uzavřená),
- cíl je přesně zadán (je uzavřen),
- cesta není známa.

Grafické znázornění:



Slovní úlohy můžeme dle prof. Kopka zařadit jako nerutinní problém, kde je zadána výchozí situace, což jsou podmínky úlohy a otázky slovní úlohy uvádí cíl, ale neznáme cestu, jak k cíli dospět. To je právě problém, který žáci musí řešit.

Každá slovní úloha obsahuje podmínku (podmínky) a otázku (otázky). Podmínkou úlohy rozumíme úplný popis toho, oč v úloze jde, spolu s číselnými údaji, jež popsanou situaci charakterizují; otázka pak udává, co máme vypočítat. Abychom slovní úlohu vyřešili, je třeba vyjádřit hledaná čísla pomocí daných čísel a takto vyjádřená čísla vypočítat. To se může dít dvojím způsobem:

- 1) Aritmeticky (úsudkem) – hledaná čísla vyjádříme pomocí daných čísel přímo.
- 2) Algebraicky (rovnici nebo soustavou rovnic)-hledaná čísla vhodně označíme a sestavíme rovnici nebo soustavu rovnic.

Řešení úsudkem bývá často obtížné, řešení rovnicí nebo soustavou rovnic bývá jednodušší. Proto, nevíme-li si rady, jak řešit danou úlohu úsudkem, můžeme ji řešit nejdříve rovnicí (soustavou rovnic) a z nalezeného výsledku hledat, jak máme úlohu řešit úsudkem.

Příklad:

Bylo koupeno 8 peněženek za 1860 Kč. Některé z nich byly z kůže po 420 Kč za kus, jiné z koženky po 120 Kč za kus. Kolik bylo kterých?

Algebraické řešení:

Zápis (rozbor):

8 peněženek za 1860 Kč

x počet peněženek z kůže po 420 Kč za kus

y počet peněženek z koženky po 120 Kč za kus

Matematizace reálné situace (sestavení soustavy rovnic):

$$\begin{array}{rcl} x & + & y = 8 \\ 420x & + & 120y = 1860 \end{array}$$

Řešení úlohy matematickým aparátem:

$$\begin{array}{rcl} x & + & y = 8 \quad / \cdot 420 \\ 420x & + & 120y = 1860 \\ - \quad \boxed{\rightarrow} & & 420x + 420y = 8 \cdot 420 \\ & & \underline{420x + 120y = 1860} \\ & & 420y - 120y = 8 \cdot 420 - 1860 \\ & & y(420 - 120) = 8 \cdot 420 - 1860 \\ & & y = (8 \cdot 420 - 1860) : (420 - 120) \end{array}$$

Z výsledku lze najít jak úlohu řešit úsudkem:

- 1) Kdyby bylo všech 8 peněženek z kůže, stály by $420 \cdot 8 = 3360$ Kč.
- 2) Zaplacen bylo však méně o $3360 - 1860$ Kč, musely tedy být některé peněženky levnější.
- 3) Rozdíl cen peněženek je $420 - 120 = 300$ Kč.
- 4) Peněženek z koženky je tedy tolik, kolikrát je 1500 více než 300 Kč, tj. 5.
- 5) Peněženek z kůže bylo $8 - 5 = 3$.

Nebo lze postupovat takto:

$$\begin{array}{rcl} x & + & y = 8 \\ 420x & + & 120y = 1860 \\ & & x + y = 8 \quad / \cdot 120 \\ & & \underline{420x + 120y = 1860} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 - \quad \begin{array}{l} \rightarrow \\ \square \end{array} & \begin{array}{r} 120x + 120y = 8 \cdot 120 \\ 420x + 120y = 1860 \\ \hline 420x - 120x = 8 \cdot 420 - 1860 \\ x(420 - 120) = 1860 - 8 \cdot 120 \\ x = (1860 - 8 \cdot 120) : (420 - 120) \end{array}
 \end{array}$$

Z výsledku lze najít jak úlohu řešit úsudkem:

- 1) Kdyby bylo všech 8 peněženek z koženky, stály by $120 \cdot 8 = 960$ Kč.
- 2) Zapláceno bylo však více o $1860 - 960 = 900$ Kč, musely tedy být některé peněženky dražší.
- 3) Rozdíl cen peněženek je $420 - 120 = 300$ Kč.
- 4) Peněženek z kůže je tedy tolik, kolikrát je 900 více než 300 Kč, tj. 3.
- 5) Peněženek z koženky bylo $8 - 3 = 5$.

Kontrola správnosti:

Při dosazení výsledku do textu slovní úlohy jsou splněny podmínky slovní úlohy. Též jsme posoudili reálnost řešení úlohy.

Formulace odpovědi na otázku úlohy:

Bylo koupeno 5 peněženek z koženky a 3 peněženky z kůže.

Zde jsme si zopakovali postup při řešení slovní úlohy:

- 1) **Rozbor slovní úlohy** (stručný záznam zadání úlohy, případně některý způsob grafického znázornění, ujasnění si podmínek a otázek slovní úlohy)
- 2) **Matematizace reálné situace** (vyjádření struktury úlohy matematickou symbolikou, např. rovnicí, nerovnicí, numerickým příkladem).
- 3) **Řešení úlohy matematickým aparátem** (řešení rovnice anebo nerovnice, numerický výpočet, grafické řešení).
- 4) **Kontrola správnosti řešení** (kontrola numerických výpočtů, posouzení reálnosti řešení, kontrola dosazením do textu slovní úlohy, zda řešení odpovídá podmínkám slovní úlohy).
- 5) **Formulace slovní odpovědi na otázku** (otázky) slovní úlohy.

Ukážeme si ještě jednu slovní úlohu, kde si ukážeme aritmetické a algebraické řešení.

Úloha:

Ve třídě je 27 žáků, z toho je děvčat o 7 více než chlapců. Kolik je ve třídě děvčat a kolik chlapců.

Algebraické řešení:

xpočet děvčat

ypočet chlapců

$$\begin{array}{rcl}
 + \quad \begin{array}{l} \square \\ \rightarrow \end{array} & \begin{array}{r} x + y = 27 \\ x - y = 7 \\ \hline 2x = 27 + 7 \\ 2x = 34 \\ x = 34 : 2 \\ \underline{x = 17} \\ y = 10 \end{array}
 \end{array}$$

Aritmetické řešení:

Kdyby bylo chlapců tolik jako děvčat, bylo ve třídě o 7 žáků více, tj. $27 + 7 = 34$, je tedy dvojnásobný počet děvčat 34, takže děvčat je $34 : 2 = 17$.

$$\begin{array}{r}
 x + y = 27 \\
 - \quad x - y = 7 \\
 \hline
 2y = 27 - 7 \\
 2y = 20 \\
 y = 20 : 2 \\
 y = 10 \\
 \hline
 x = 17
 \end{array}$$

Aritmetické řešení:

Kdyby bylo děvčat tolik jako chlapců, bylo ve třídě o 7 žáků méně, tj. $27 - 7 = 20$, je tedy dvojnásobný počet chlapců 20, takže chlapců je $20 : 2 = 10$.

Nadbytečná podmínka slovní úlohy:

Podmínky úlohy mají obsahovat všechny údaje, které jsou k řešení úlohy potřebné. Někdy se však stává, že slovní úloha obsahuje i údaj, který k odpovědi na danou otázku potřebný není. Takový údaj zkonkrétňuje danou situaci nebo usnadňuje řešení úlohy.

Příklad:

Objem nádrže je 600 hl. Prvním kohoutkem se nádrž naplní za 5 hodin, druhým za 6 hodin a třetím za 10 hodin. Za jak dlouho se nádrž naplní, budou-li současně otevřeny všechny tři kohoutky?

Prvním kohoutkem se za 1 hodinu naplní $600 : 5 = 120$ hl nádrže.

Druhým kohoutkem se za 1 hodinu naplní $600 : 6 = 100$ hl nádrže.

Třetím kohoutkem se za 1 hodinu naplní $600 : 10 = 60$ hl nádrže

Všemi třemi kohoutky se za 1 hodinu naplní $120 + 100 + 60 = 280$ hl nádrže

Celá nádrž se naplní za $600 : 280 = 2 \frac{1}{7}$ hodiny.

Řešení bez nadbytečné podmínky:

Prvním kohoutkem se za 1 hodinu naplní $1/5$ nádrže.

Druhým kohoutkem se za 1 hodinu naplní $1/6$ nádrže.

Třetím kohoutkem se za 1 hodinu naplní $1/10$ nádrže.

Všemi třemi kohoutky se za 1 hodinu naplní $1/5 + 1/6 + 1/10$ nádrže.

$$\frac{6}{30} + \frac{5}{30} + \frac{3}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

Celá nádrž se naplní za $1 : 7/15 = 15/7 = 2 \frac{1}{7}$ hodiny

Obecné řešení:

Vobjem, t_1 1. čas naplnění nádrže
 t_2 2. čas naplnění nádrže
 t_3 3. čas naplnění nádrže
 t výsledný čas

$$V : (V/t_1 + V/t_2 + V/t_3) = t$$

$$V : V (1/t_1 + 1/t_2 + 1/t_3) = t$$

$$1 : (1/t_1 + 1/t_2 + 1/t_3) = t$$

V (objem) se vykrátí a tím se ukázala jeho nadbytečnost.

Jednoduché slovní úlohy

Jednoduché slovní úlohy jsou takové slovní úlohy k jejichž řešení stačí právě jeden početní výkon. Jejich typy jsou určeny dle početní operace sčítání, odčítání, násobení a dělení v množině přirozených čísel a nuly $\mathbb{N}_0$. Tyto typy popisuje Prof. RNDr. Karel Hruša. Je důležité tyto typy znát, neboť vedou žáky 1. stupně základní školy metodickou řadou k lepšímu pochopení početní operace.

Typy slovních úloh:

Sčítání (určení součtu, zvětšení o daný počet)

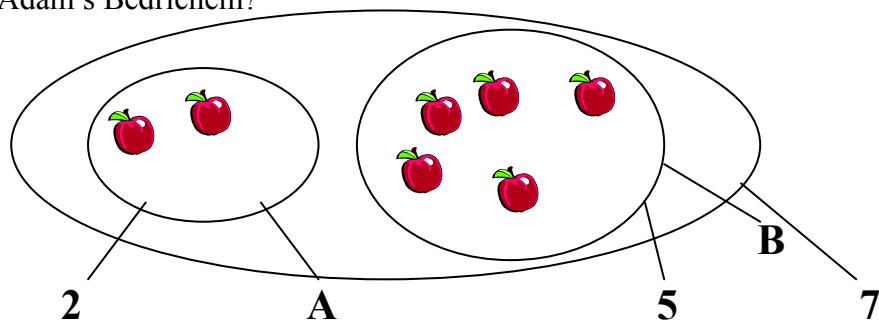
Odčítání (určení rozdílu, zmenšení o daný počet , porovnávání rozdílem a to „o kolik více“ a „o kolik méně“).

Násobení (určení součtu stejných sčítanců, zvětšení čísla několikrát)

Dělení (dělení na stejné části, dělení podle obsahu, zmenšení čísla několikrát, porovnávání podílem a to „kolikrát více“ a „kolikrát méně“).

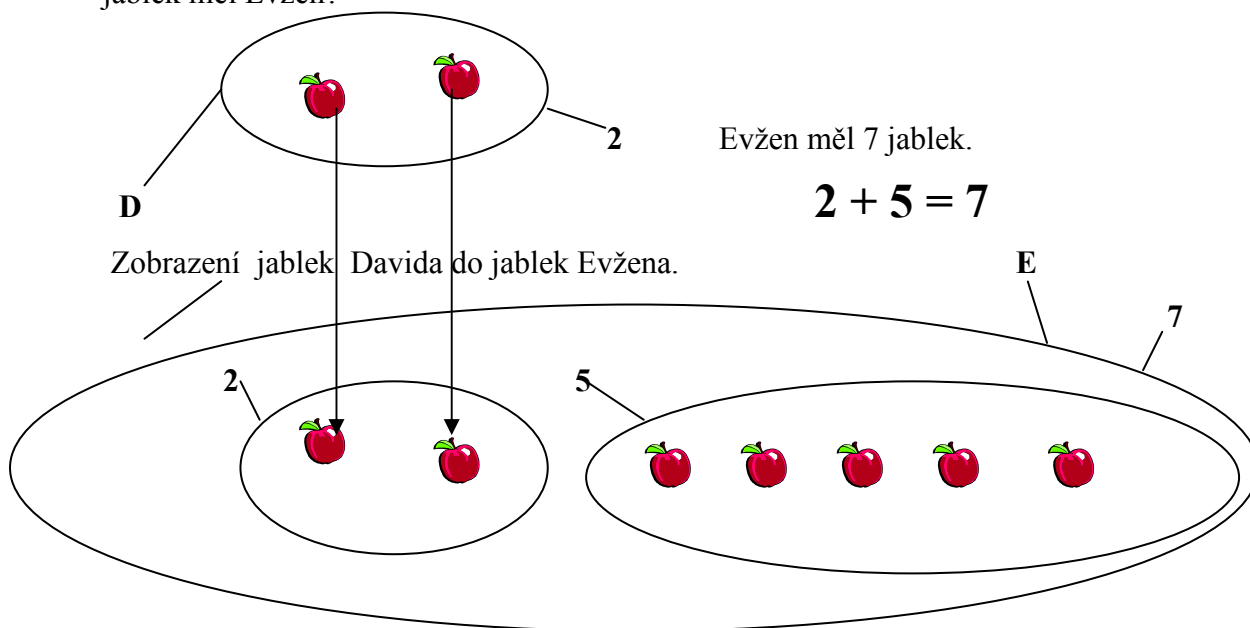
Příklady:

Určení součtu: Adam měl 2 jablka, Bedřich měl 5 jablek. Kolik jablek měli dohromady Adam s Bedřichem?



$$2 + 5 = 7 \text{ Adam s Bedřichem měli dohromady 7 jablek.}$$

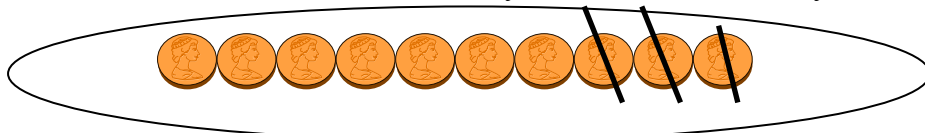
Zvětšení o daný počet: David měl 2 jablka, Evžen měl o 5 jablek více než David. Kolik jablek měl Evžen?



$$2 + 5 = 7$$

Zobrazení jablek Davida do jablek Evžena.

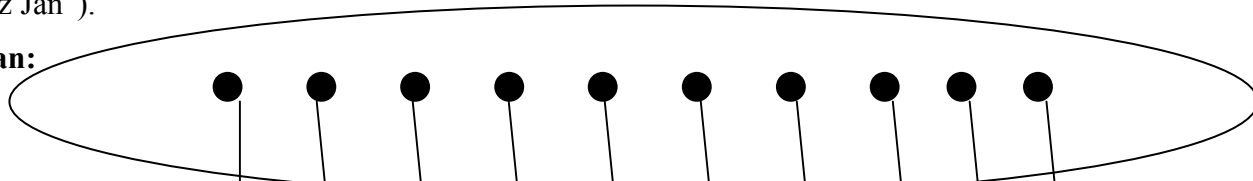
Určení rozdílu: Karel měl 10 korun a 3 koruny ztratil. Kolik korun zbylo Karlovi po ztrátě?



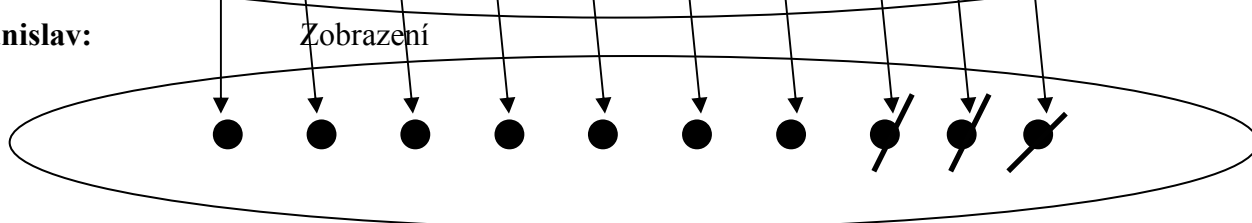
$$10 - 3 = 7 \quad \text{Karlovi zbylo po ztrátě 7 korun.}$$

Zmenšení o daný počet: Jan měl 10 korun. Stanislav měl o 3 koruny méně než Jan. Kolik korun měl Stanislav? (Nemůže být v textu „o 3 koruny méně“, musí být „o 3 koruny méně než Jan“).

Jan:



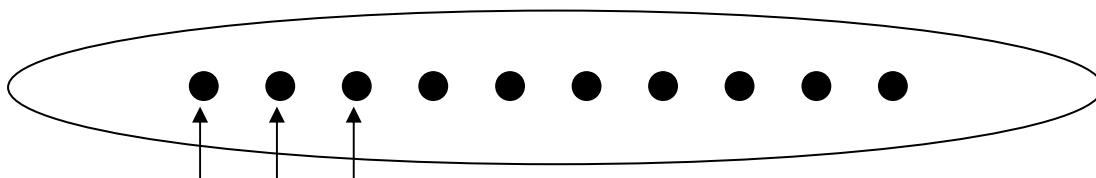
Stanislav:



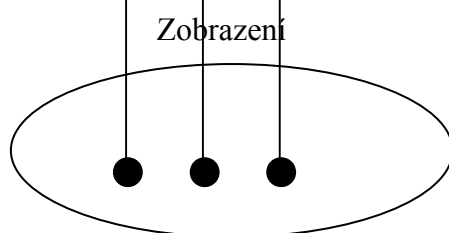
$$10 - 3 = 7 \quad \text{Stanislav měl 7 korun..}$$

Porovnávání rozdílem: Václav měl 10 korun. Zdeněk měl 3 koruny? O kolik korun měl Václav více než Zdeněk ? O kolik korun měl Zdeněk méně než Václav ?

Václav:



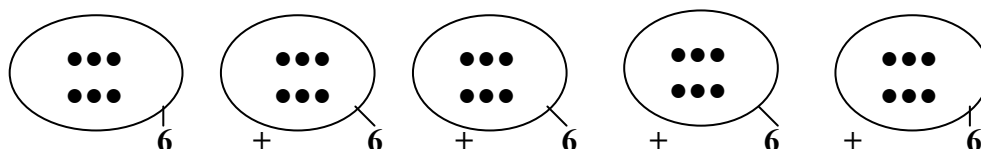
Zdeněk:



$$10 - 3 = 7$$

Václav měl o 7 korun více než Zdeněk. Zdeněk měl o 7 korun méně než Václav-

Určení součtu stejných sčítanců: Jeden kilogram brambor stojí 6 korun. Kolik stojí 5 kilogramů brambor?

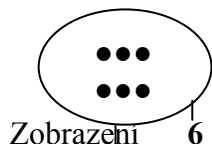


$$6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 5 \cdot 6$$

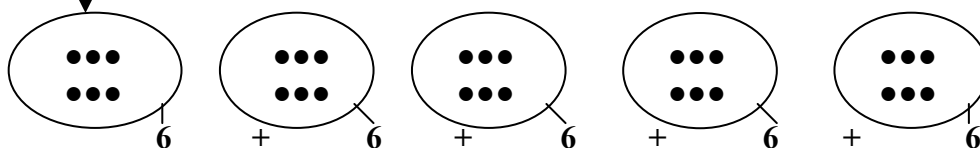
Pět kilogramů brambor stojí 30 korun.

Zvětšení čísla několikrát: Jeden kilogram brambor stojí 6 korun. Jeden kilogram meruněk stojí pět krát více než jeden kilogram brambor. Kolik stojí kilogram meruněk?

Cena 1 kilogramu brambor:

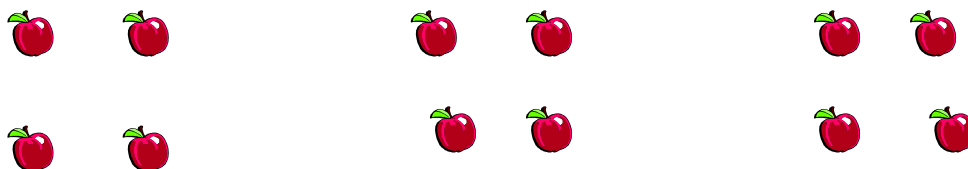


Cena 1 kilogramu meruněk:



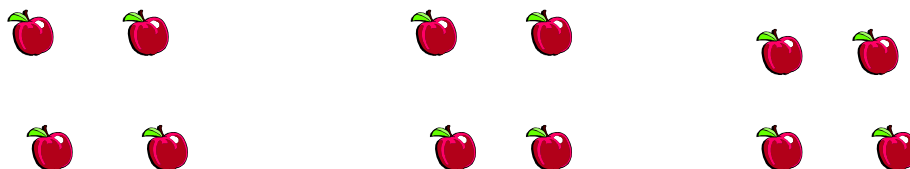
5 · 6 Jeden kilogram meruněk stojí 30 korun.

Dělení na stejné části: Dvanáct jablek máme podělit 3 chlapcům, tak aby každý měl stejný počet? Kolik jablek dostane každý z chlapců?



$$12 : 3 = 4 \quad \text{Každý z chlapců dostane 4 jablka.}$$

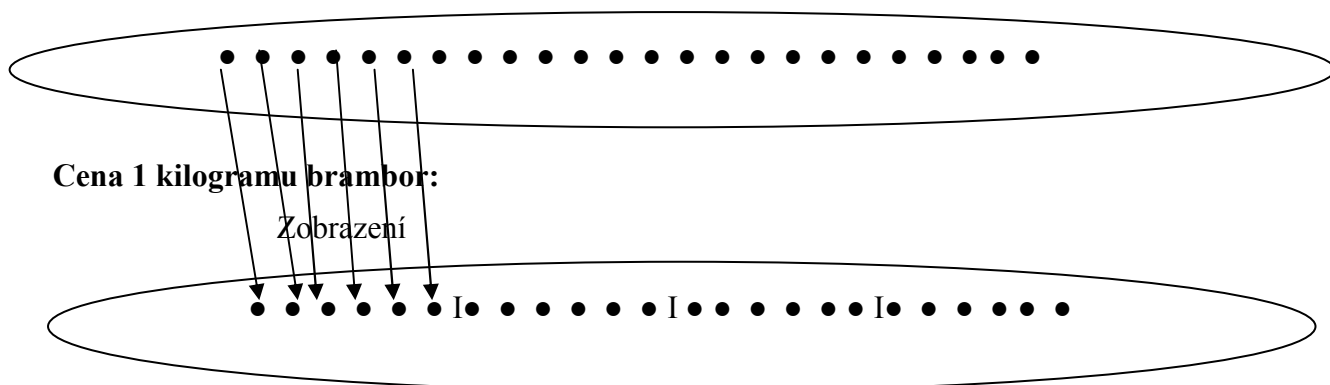
Dělení podle obsahu: Dvanáct jablek máme podělit tak, aby každý chlapec dostal 4 jablka. Kolik chlapců můžeme podělit?



$$12 : 4 = 3 \quad \text{Můžeme podělit 3 chlapce..}$$

Zmenšení čísla několikrát: Jeden kilogram pomerančů stojí 24 koruny. Jeden kilogram brambor je čtyři krát levnější než jeden kilogram pomerančů. Kolik stojí 1 kilogram brambor?

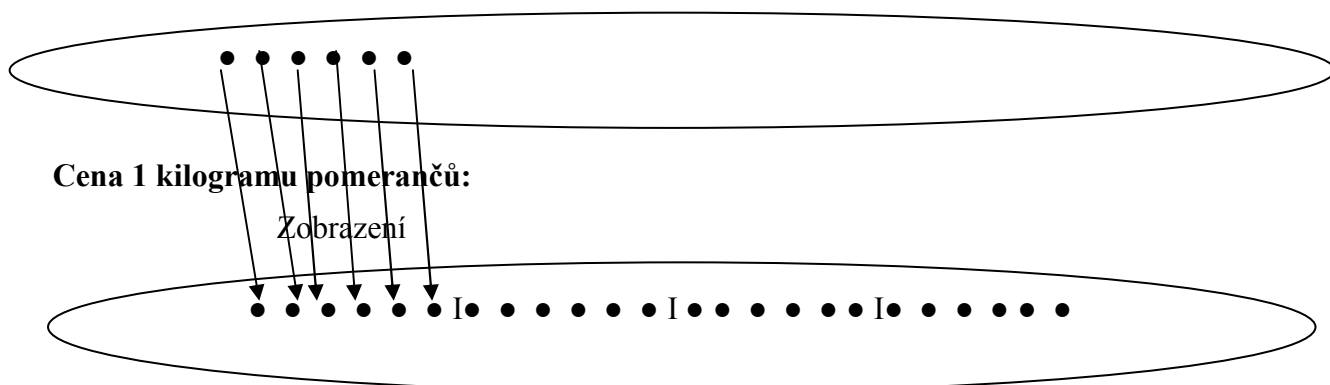
Cena 1 kilogramu pomerančů:



$24 : 4 = 6$ Jeden kilogram brambor stojí 6 korun. (Převádíme na dělení na stejné části).

Porovnávání podílem: Jeden kilogram pomerančů stojí 24 koruny. Jeden kilogram brambor 6 korun. Kolikrát je jeden kilogram brambor levnější než jeden kilogram pomerančů? Kolikrát je jeden kilogram pomerančů dražší než jeden kilogram brambor?

Cena 1 kilogramu brambor:



$24 : 6 = 4$ Jeden kilogram brambor je čtyři krát levnější než jeden kilogram pomerančů. Jeden kilogram pomerančů je čtyři krát dražší než jeden kilogram brambor. (Převádíme na dělení na podle obsahu).

Složené slovní úlohy

Za **složenou slovní úlohu** považujeme takovou slovní úlohu, k jejímuž řešení je třeba alespoň dvou početních výkonů. Složenou slovní úlohu řešíme tak, že ji rozkládáme na několik jednoduchých úloh, z nichž každá vede právě jen k jednomu početnímu výkonu. Tento rozklad je možno provést dvěma různými způsoby, z nichž jeden nazýváme analytický a druhý syntetický.

Při analytickém způsobu řešení složené slovní úlohy vyjdeme z otázky. Zjistíme, která čísla, abychom mohli provést početní výkon, který vede k odpovědi na danou otázku úlohy. Tak dostaneme jednu jednoduchou úlohu; přitom však aspoň jedno z čísel potřebných k jejímu řešení není dáno. Toto neznáme číslo vypočteme tak, že k jeho určení sestavíme další jednoduchou úlohu. Stačí-li údaje podmínky k řešení této jednoduché úlohy, je rozklad proveden. Není-li tomu tak sestavujeme další jednoduché úlohy, jejichž řešení vede k výpočtu dosud neznámých čísel, a tak pokračujeme tak dlouho, dokud nedostaneme jednoduché úlohy, k jejichž řešení jsou všechna potřebná čísla dána v podmínkách úlohy. Slovo analýza řecky

znamená rozklad. Při tomto způsobu řešení skutečně provádíme rozklad dané úlohy v jednoduché úlohy tak dlouho, dokud to jde.

Při syntetickém způsobu řešení složené slovní úlohy vycházíme z čísel, která jsou dána v podmínce slovní úlohy. Vybereme dvě z nich a složíme z nich jednoduchou úlohu, jejíž řešení poskytuje další údaj potřebný k řešení složené úlohy. Z tohoto údaje a z dalšího čísla vhodně vybraného z podmínek úlohy nebo z výsledku některé jiné pomocné jednoduché úlohy sestavíme další jednoduchou úlohu a tak pokračujeme tak dlouho, dokud nedojdeme k odpovědi na danou otázku. Při tomto způsobu řešení tedy odpověď na danou otázku skládáme z řešení jednoduchých úloh. Slovo syntéza je rovněž řecké slovo a znamená skládání.

Příklad:

Karel jel na mopedu z Teplic do Prahy přes Lovosice. Doba jeho jízdy z Teplic do Prahy byla 2 hodiny 54 minuty, průměrná rychlost z Teplic do Lovosic 30 km za hodinu a z Lovosic do Prahy 32 km za hodinu. Délka silnice z Teplic do Lovosic je 27 kilometrů. Kolik kilometrů je z Teplic do Prahy? Sestavte schéma a plán řešení a úlohu vyřešte.

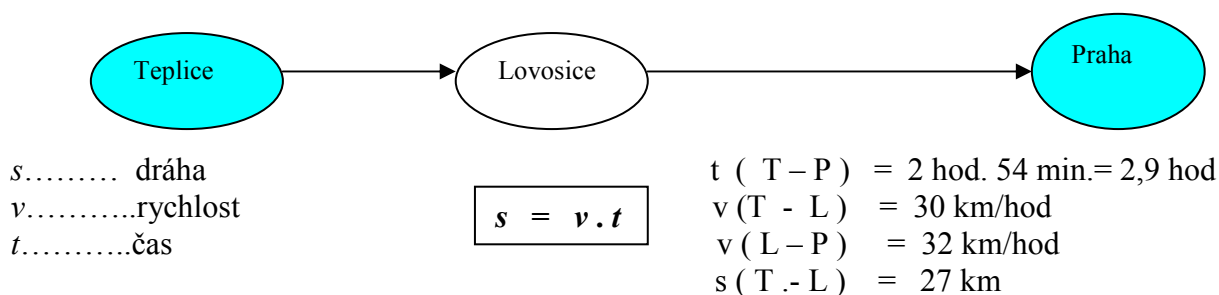
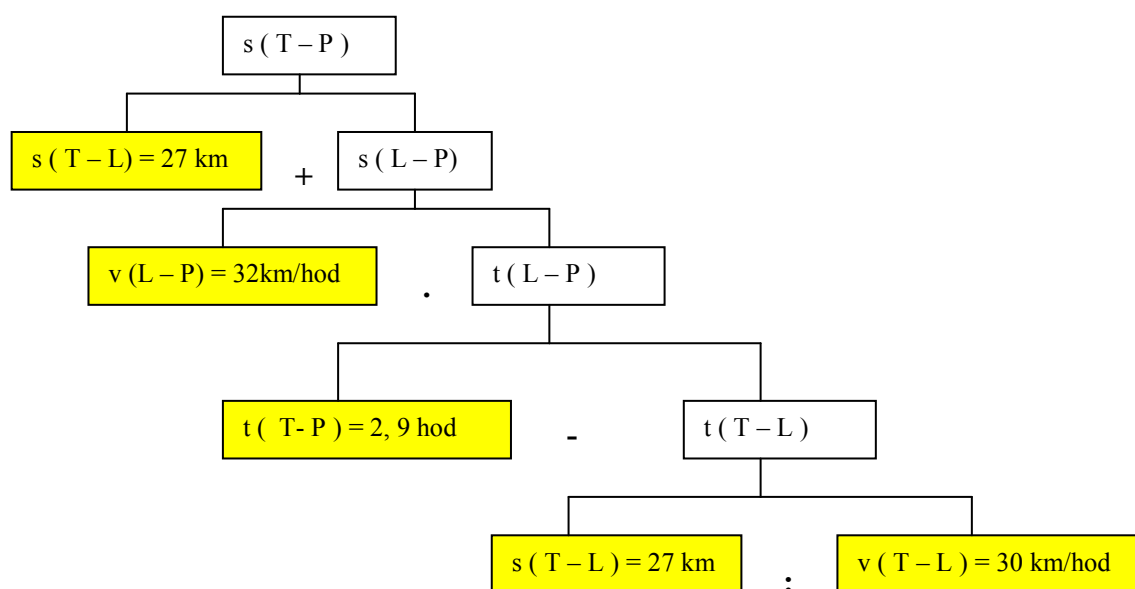


Schéma řešení:

$$\underline{s(T-P) = ?}$$



Plán řešení:

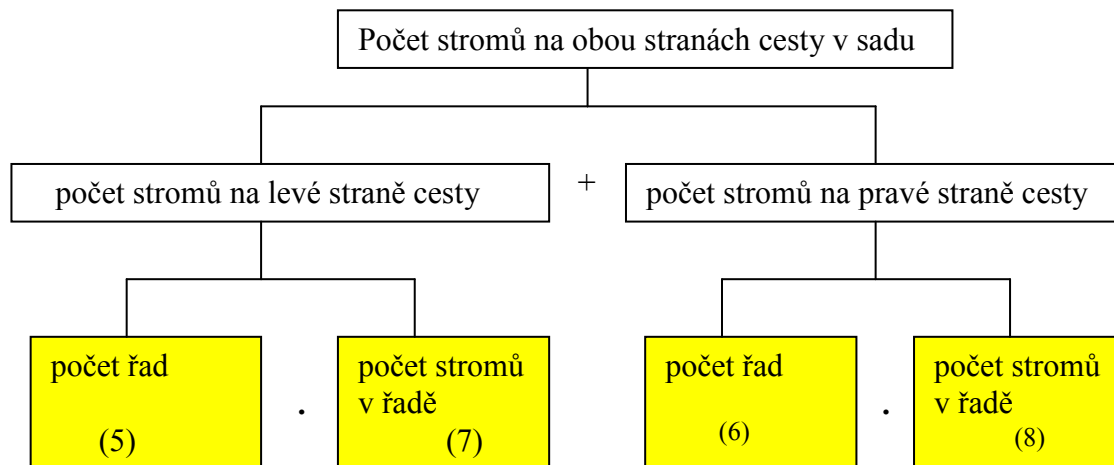
- 1) $t(T-L) = 27/30 = 0,9 \text{ hod.}$
- 2) $t(L-P) = 2,9 - 0,9 = 2 \text{ hod.}$
- 3) $s(L-P) = 32 \cdot 2 = 64 \text{ km}$
- 4) $s(T-L) = 27 + 64 = \underline{91 \text{ km}}$

Z Teplic do Prahy je 91 kilometr.

V učebnici matematiky pro 4. ročník vydané v 80. letech minulého století byla tato úloha včetně jejího rozboru:

Na levé straně cesty v sadu bylo 5 řad po 8 stromech, na pravé straně této cesty 6 řad po 8 stromech. Kolik stromů bylo v sadu po obou stranách cesty?

Schéma řešení:



Plán řešení: 1) Počet stromů na levé straně cesty v sadu $5 \cdot 7 = 35$
2) Počet stromů na pravé straně cesty v sadu $6 \cdot 8 = 48$
3) Počet stromů na obou stranách cesty v sadu $36 + 48 = 63$

Na obou stranách cesty v sadu byly 63 stromy.

Složené slovní úlohy lze rozdělit do těchto typů:

- 1) Typové úlohy řešené zvláštními obraty
 - 1.1) Určení zlomku z daného čísla
 - 1.2) Rozdělování v daném poměru
 - 1.3) Určení čísel z jejich lineárních kombinací
- 2) Typové úlohy ze zvláštním obsahem
 - 2.1) Úlohy o aritmetickém průměru
 - 2.2) Úlohy o směsích
 - 2.3) Úlohy o společné práci
 - 2.4) Úlohy o rovnoměrném pohybu

Literatura:

- 1) Novák B., Stopenová A.: Slovní úlohy ve vyučování matematice na 1. Stupni ZŠ, Pedagogická fakulta UP, Olomouc, 1993
- 2) Divíšek J. a kol.: Didaktika matematiky pro učitelství pro 1. Stupeň základní školy, SPN, Praha, 1989
- 3) Hrušák K.: Aritmetika pro III. a IV. ročník pedagogických škol pro vzdělání učitelů národních škol, SPN, Praha, 1958