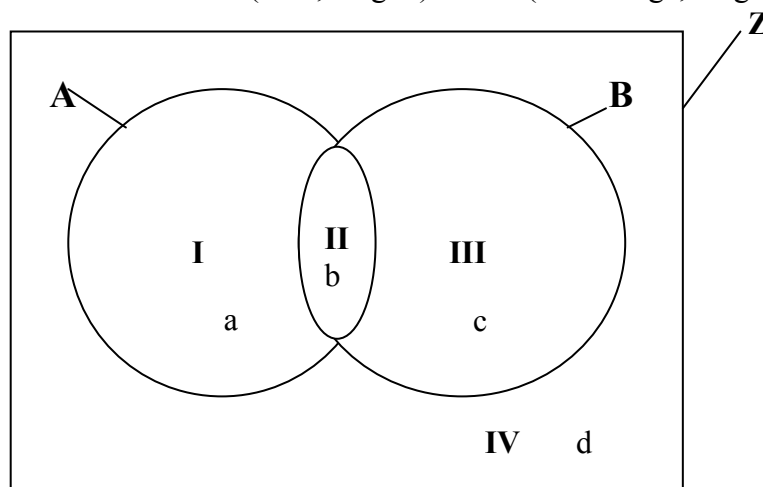


Slovní úlohy na sjednocení dvou množin s neprázdným průnikem

Vennův diagram (John Venn – 1834 (Hull, Anglie) –1923 (Cambridge, Anglie))



Životopis Johna Venna:

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Venn.html>

I..... $A - B = \{ x \in Z : x \in A \wedge x \notin B \}$

II..... $A \cap B = \{ x \in Z : x \in A \wedge x \in B \}$

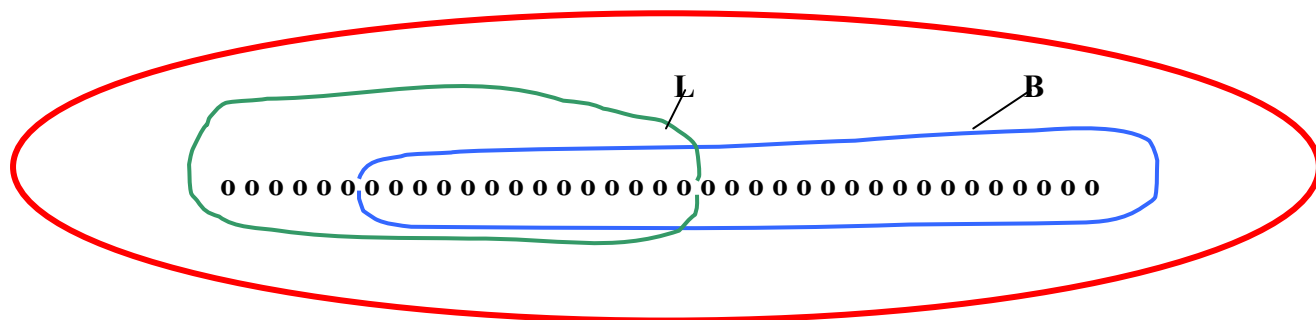
III..... $B - A = \{ x \in Z : x \notin A \wedge x \in B \}$

IV..... $(A \cup B)' = A' \cap B' = \{ x \in Z : x \notin A \wedge x \notin B \}$

V teorii vyučování matematice je možné využít termínu entropie, což je dle *Slovníku spisovné češtiny pro školu a veřejnost* (2.) míra neurčitosti nějakého systému. O pojmu entropie v didaktice matematiky se zmiňuje Doc. Pavel Květoň ve své publikaci *Kapitoly z didaktiky matematiky II* (str. 10) (3.). Podívejme na zadání úloh na sjednocení dvou množin s neprázdným průnikem a na míru neurčitosti při jejich řešení. Například zadáme-li slovní úlohu na sjednocení dvou množin s neprázdným průnikem :

Ve třídě je 37 žáků. Každý z nich umí lyžovat nebo umí bruslit. Lyžovat umí 20 žáků, bruslit umí 31 žák. Znázorněte a určete, kolik je ve třídě žáků, kteří umějí lyžovat a umějí bruslit (obojí).

Úlohu můžeme vizualizovat:

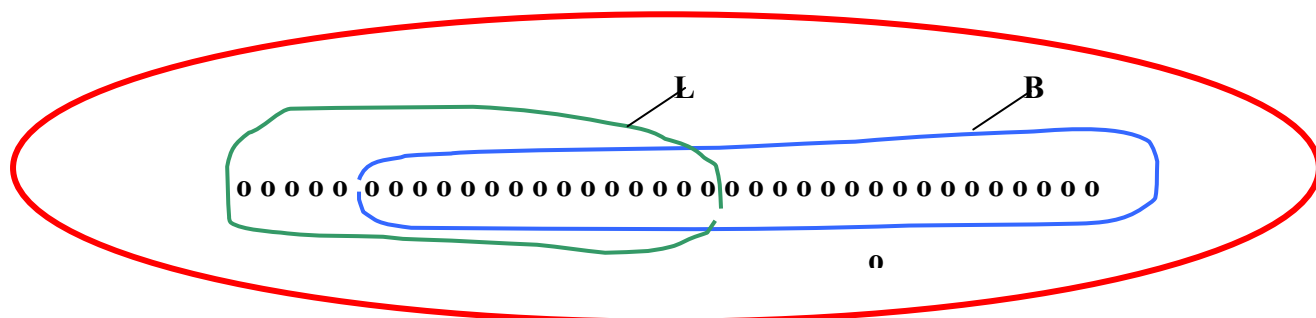


Názorně vidíme, že všichni žáci třídy, kteří umějí lyžovat a bruslit, náleží do průniku množin lyžujících a bruslících žáků. Celkem je jich 14. Úloha má právě jedno řešení.

Zadáme-li úlohu s vynecháním věty „Každý z nich umí lyžovat nebo umí bruslit“ tedy:

Ve třídě je 37 žáků. Lyžovat umí 20 žáků, bruslit umí 31 žák. Znázorněte a určete, kolik je ve třídě žáků, kteří umějí lyžovat a umějí bruslit (obojí), musíme zvažovat, kolik je ve třídě

žáků, kteří neumějí lyžovat a neumějí bruslit. Takových žáků není, pak jde o původní úlohu. Takový žák může být jeden, mohou být dva, tři, čtyři, pět, šest. Více jich být nemůže. Úlohu můžeme vizualizovat:



Úloha má při tomto zadání úlohy celkem sedm řešení. Lze tedy odpovědět, že záleží na počtu žáků, kteří neumějí lyžovat a neumějí bruslit a počet žáků, kteří umějí lyžovat a bruslit je 14 nebo 15 nebo 16 nebo 17 nebo 18 nebo 19 nebo 20. V případě, že 6 žáků neumí lyžovat a neumí bruslit jsou lyžující žáci podmnožinou žáků bruslících.

První slovní úloha má menší entropii, neboť řešení úlohy je právě jedno, Druhá slovní úloha má větší entropii, neboť míra neurčitosti je větší a úloha má 7 možných řešení.

Podíváme se na slovní úlohu na které si ukážeme rozmanitost možných otázek, které následují za podmínkami úlohy:

Z 33 žáků třídy jich 14 bruslí, 22 lyžuje. 6 žáků třídy nebruslí a nelyžuje. Kolik žáků třídy:
a) lyžuje a bruslí, b) lyžuje nebo bruslí, c) lyžuje a nebruslí, d) nelyžuje a bruslí. Kolik žáků třídy provozuje: e) právě jeden z těchto sportů, f) nejvýše jeden z těchto sportů, g) nejvýše dva z těchto sportů, h) právě dva z těchto sportů, aspoň jeden z těchto sportů?

Postup řešení:

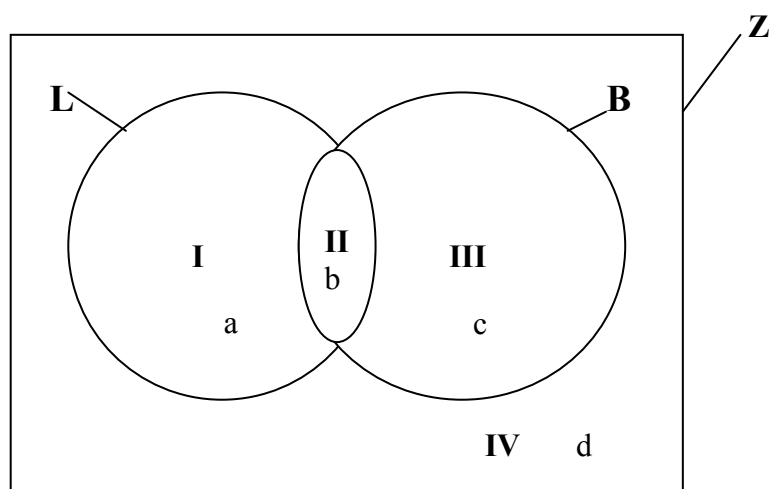
1) Určíme základní množinu **Z**

Z je množina všech žáků třídy

2) Určíme jednotlivé podmnožiny základní množiny **Z** a její charakteristické vlastnosti:

$\{x \in \mathbf{Z} : x \text{ bruslí}\} = \mathbf{B}$

$\{x \in \mathbf{Z} : x \text{ lyžuje}\} = \mathbf{L}$



3) Charakterizujeme množiny, na jejichž počet prvků se ptáme:

$\{x \in \mathbf{Z} : x \text{ lyžuje a } x \text{ bruslí}\} = \{x \in \mathbf{Z} : x \in \mathbf{L} \wedge x \in \mathbf{B}\} = \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \dots \dots \dots \text{II. část}$

$\{x \in \mathbf{Z} : x \text{ lyžuje nebo } x \text{ bruslí}\} = \{x \in \mathbf{Z} : x \in \mathbf{L} \vee x \in \mathbf{B}\} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \text{ I., II. a III. část}$

$\{x \in Z : x \text{ lyžuje a } x \text{ nebruslí}\} = \{x \in Z : x \in L \wedge x \notin B\} \dots \text{I. část}$

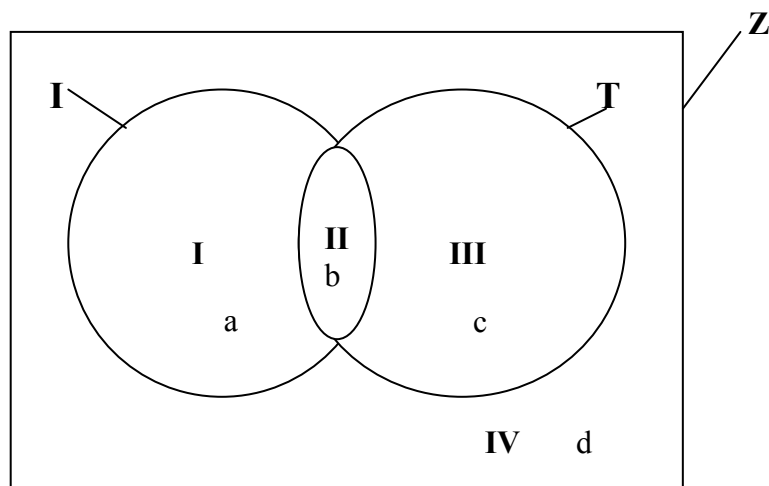
$\{x \in Z : x \text{ nelyžuje a } x \text{ bruslí}\} = \{x \in Z : x \notin L \wedge x \in B\} \dots \text{III. část}$

Jednoduše určíme, že $a = 5$, $b = 9$, $c = 13$ a z podmínky úlohy víme, že $d = 6$. Odpovíme na otázky úlohy:

- Ve třídě 9 žáků lyžuje a bruslí.
- Ve třídě 27 žáků lyžuje nebo bruslí.
- Ve třídě 13 žáků lyžuje a nebruslí.
- Ve třídě 5 žáků nelyžuje a bruslí.
- Ve třídě 18 žáků provozuje právě jeden z těchto sportů.
- Ve třídě 24 žáci provozují nejvýše jeden z těchto sportů.
- Ve třídě 33 žáci provozují nejvýše dva z těchto sportů.
- Ve třídě 9 žáků provozuje právě dva z těchto sportů.
- Ve třídě 27 žáků provozuje aspoň jeden z těchto sportů.

Slovní úlohu lze řešit i soustavou lineárních rovnic:

V cestovní kanceláři prodali 234 zájezdy. Největší zájem se soustředil na zájezdy do Itálie a na třídení autobusové zájezdy. Zájezdů do Itálie, které nebyly třídení autobusové, bylo 28. Bylo jich právě tolik, jako třídení autobusových zájezdů, které nebyly do Itálie. 78 zájezdů nebylo do Itálie a nebylo třídení autobusových. Kolik bylo třídení autobusových zájezdů do Itálie?



- Určíme základní množinu Z

Z je množina všech zájezdů

- Určíme jednotlivé podmnožiny základní množiny Z a její charakteristické vlastnosti:

$\{x \in Z : x \text{ je zájezd do Itálie}\} = I$

$\{x \in Z : x \text{ je třídení autobusový zájezd}\} = T$

- Charakterizujeme množinu, na jejichž počet prvků se ptáme:

$\{x \in Z : x \text{ je zájezd do Itálie a } x \text{ třídení autobusový zájezd}\} = \{x \in Z : x \in I \wedge x \in T\} = I \cap T$

Řešení: $a + b + c + d = 234$

$$a = 28$$

$$c = 28$$

$$d = 78$$

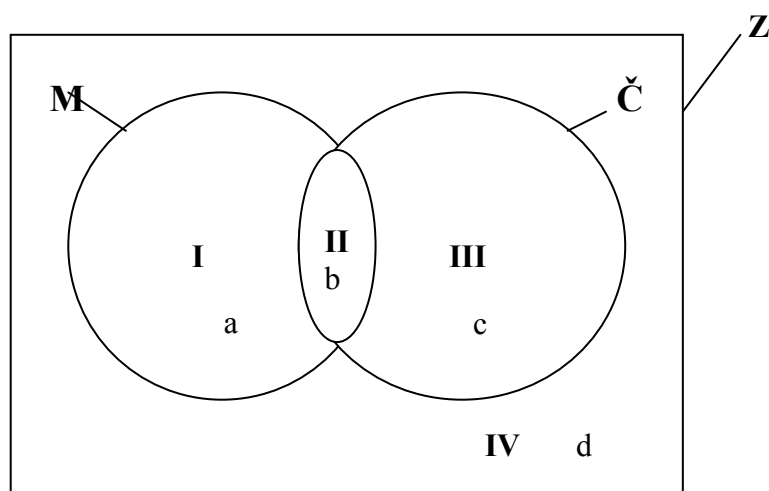
$$\underline{c = 100}$$

Třídení autobusových zájezdů do Itálie bylo 100.

Úlohu lze zadat i takto:

145 žáků se zúčastnilo přijímacích zkoušek na střední školu. Všichni žáci konali přijímací zkoušky z českého jazyka a z matematiky a byli hodnoceni. Aspoň jednu zkoušku vykonalo úspěšně 125 žáků. Nejvýše jednu zkoušku vykonali úspěšně 53 žáci. Zkoušku jen z matematiky vykonalo úspěšně 18 žáků.

- Kolik žáků vykonalo úspěšně obě zkoušky?
- Kolik žáků vykonalo úspěšně jen zkoušku z českého jazyka?
- Kolik žáků nevykonalo úspěšně zkoušku z matematiky a nevykonalo úspěšně zkoušku z českého jazyka?



- Určíme základní množinu Z
 Z je množina všech žáků, kteří konali přijímací zkoušky
- Určíme jednotlivé podmnožiny základní množiny Z a její charakteristické vlastnosti:
 $\{x \in Z : x \text{ je žák, který konal úspěšně přijímací zkoušku z matematiky}\} = M$
 $\{x \in Z : x \text{ je žák, který konal úspěšně přijímací zkoušku z českého jazyka}\} = T$
- Charakterizujeme množiny, na jejichž počet prvků se ptáme.
 $\{x \in Z : x \in M \wedge x \in \check{C}\} = M \cap \check{C} \dots \dots \dots II. \text{část}$
 $\{x \in Z : x \in \check{C} \wedge x \notin M\} = \check{C} - M \dots \dots \dots III. \text{část}$
 $\{x \in Z : x \notin M \wedge x \notin \check{C}\} = \check{C}' \cap M' \dots \dots \dots IV. \text{část}$

Pozorně čteme podmínky úlohy a zapisujeme:

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 145 \\ a + b + c &= 125 \\ d + a + c &= 53 \\ a &= 18 \end{aligned}$$

Od 1. rovnice odečteme 2. rovnici a dostaneme $d = 20$. Dosazením do 3. rovnice ($d = 20$, $a = 18$) dostaneme $c = 15$ a dosazením do 2. rovnice ($a = 18$, $c = 15$) dostaneme $b = 92$.

Odpověď:

- Obě zkoušky vykonali úspěšně 92 žáci.
- Zkoušku jen z českého jazyka vykonalo úspěšně 15 žáků.
- 20 žáků nevykonalo úspěšně zkoušku z matematiky a nevykonalo úspěšně zkoušku z českého jazyka.

V učebnici matematiky pro 4. ročník základní školy (1979) je uvedena tato úloha:

Pavel počítal hrnečky, které byly na stole a řekl: „Na stole je 12 velkých hrnečků.“ Ivan řekl: „Na stole je 9 červených hrnečků“. Kolik mohlo být na stole velkých nebo červených hrnečků?

Řešení:

- 1) Určíme základní množinu Z
 Z je množina všech hrnečků, které jsou na stole.
- 2) Určíme jednotlivé podmnožiny základní množiny Z a její charakteristické vlastnosti:
 $\{x \in Z : x \text{ je velký hrneček, který je na stole}\} = V$
 $\{x \in Z : x \text{ je červený hrneček, který je na stole}\} = Č$
- 3) Charakterizujeme množiny, na jejichž počet prvků se ptáme.
 $\{x \in Z : x \in V \vee x \in Č\} = V \cup Č$

Počet prvků ve sjednocení množin V nebo $Č$ je závislý na počtu prvků v průniku množin V a $Č$. Pokud bude průnik těchto množin prázdný je ve sjednocení 21 hrneček. Pokud bude v průniku 1 hrneček bude ve sjednocení 20 hrnečků, atd. Pokud bude ve sjednocení maximální možný počet, tj. 9 hrnečků bude ve sjednocení 12 hrnečků.

Odpověď: *Na stole mohlo být 9 až 21 hrnečků.*

Zajímavá je i tato dektektivní úloha:

Ve třídě se hledalo, kdo rozbil o polední přestávce okno. Učitel zjistil, že v této době byla všechna děvčata na školním pozemku a mimo třídu byli všichni chlapci, kteří chodí na oběd do školní jídelny. Ve třídě je celkem 38 žáků, z toho 16 dívek. Z celkového počtu žáků ve třídě se stravuje ve školní jídelně 30 žáků, z těchto stravujících se žáků je dvakrát více chlapců než dívek. Kolik žáků zůstává v podezření, že rozbili okno?

Řešení:

- 1) Určíme základní množinu Z
 Z je množina všech žáků ve třídě
- 2) Určíme jednotlivé podmnožiny základní množiny Z a její charakteristické vlastnosti:
 $\{x \in Z : x \text{ je žák stravující se ve školní jídelně}\} = J$
 $\{x \in Z : x \text{ je dívka}\} = D$
- 3) Charakterizujeme množiny, na jejichž počet prvků se ptáme.
 $\{x \in Z : x \notin J \wedge x \notin D\} = J' \cap D'$

Podezřelí budou všichni chlapci, kteří nechodí na oběd do školní jídelny.

Odpověď: *Podezřelí jsou 2 chlapci, kteří nechodí na oběd do školní jídelny.*

Literatura:

1. MELICHAR J. a kol. *Matematika pro 4. ročník základní školy*. 1.vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979. 160 s. 14-546-79
2. *Slovník spisovné češtiny pro školu a veřejnost*. 1. vyd. Praha: Academia, 1978. 800 s. 21-001-78
3. KVĚTOŇ P., *Kapitoly z didaktiky matematiky II*. 1. vyd. Ostrava: Pedagogická fakulta, 1986. 217 s. 60-265-86
4. MELICHAR J. a kol., *Cvičení z matematiky pro 5. ročník základní školy*, Státní pedagogické nakladatelství Praha, 1979, 14-580-79